

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TIAGO MAGNO DE SOUZA DUTRA

**PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO A RESPEITO DE NÚMEROS FIGURADOS EM UM
PROCESSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Vitória
2020

TIAGO MAGNO DE SOUZA DUTRA

**PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO A RESPEITO DE NÚMEROS FIGURADOS EM UM
PROCESSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Centro de Referência em Formação e em Educação do Instituto Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Chaves

Vitória
2020

(Biblioteca do Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância - Cefor)

D978p

Dutra, Tiago Magno de Souza .

Produção de significado a respeito de números figurados em um processo de formação de professores de matemática / Tiago Magno de Souza Dutra. - 2020. 123 f.

Orientador: Rodolfo Chaves

Dissertação(Pós-Graduação stricto sensu) Instituto Federal do Espírito Santo, Cefor, Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, 2020.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Formação de professores. 3. Matemática - aritmética. 4. Matemática – padrões numéricos. I. Chaves, Rodolfo . II. Título. III. Instituto Federal do Espírito Santo. IV. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Viviane Bessa Lopes Alvarenga CRB/06-ES nº 745



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TIAGO MAGNO DE SOUZA DUTRA

**PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO A RESPEITO DE NÚMEROS FIGURADOS EM UM
PROCESSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, modalidade profissional, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 28 de Fevereiro de 2020

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodolfo Chaves

Instituto Federal do Espírito Santo

Orientador

Prof. Dra. Ligia Arantes Sad

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Adelino Candido Pimenta

Pontifícia Universidade Católica de Goiás



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TIAGO MAGNO DE SOUZA DUTRA

DUTRA, Tiago Magno de Souza; CHAVES, Rodolfo. **Números figurados planos em formação de professores**. Vitória: Ifes, 2020. (Série Guias Didáticos de Matemática, 71)

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, modalidade profissional, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 28 de Fevereiro de 2020

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodolfo Chaves

Instituto Federal do Espírito Santo

Orientador

Profa. Dra. Lígia Arantes Sad

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Adelino Candido Pimenta

Pontifícia Universidade Católica de Goiás

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Declaro, para fins de pesquisa acadêmica, didática e técnico-científica, que esta dissertação de mestrado, e seu respectivo produto educacional, podem ser parcialmente utilizados, desde que se faça referência à fonte e ao autor.

Vitória, 28 de fevereiro de 2020.


Tiago Magno de Souza Dutra

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Rodolfo Chaves, meu orientador, pela compreensão e companheirismo fraternos durante todo o trajeto percorrido ao longo deste trabalho. Agradeço por todos os momentos que estivemos juntos nessa pesquisa e pelo aprendizado que me proporcionou.

Aos integrantes do Projeto “Pitágoras: em (e além do) teorema”, licenciandos e professores que me emprestaram um pouquinho de suas vivências e experiências na construção dessa pesquisa de mestrado, principalmente aos amigos: Bruna Moll Fernandes, Davi Magalhães Vieira, Esthefany Rabello Macedo, Filyppe Neves de Andrade, Ian Neto Bonfim e Lucca Jevaux Oliveira Bonatto.

A todos os integrantes do Gepemem, pelo apoio e dedicação em nossos planejamentos e plenárias de discussões sempre muito pertinentes.

À professora Marize Lyra Silva Passos, pelo apoio e compreensão em um momento que muito precisava.

À Kenia Costa Favalessa, a quem tenho muito carinho e estive comigo no início desta jornada, pelo apoio que me deu em momentos difíceis e que não será esquecido.

À Katiele Cezar de Moraes, pois sem sua ajuda não teria sequer iniciado essa jornada.

Aos professores Adelino Candido Pimenta, Alexandre Küger Zocolotti e Ligia Arantes Sad, membros da banca examinadora, pelas valiosas contribuições, disponibilidade e paciência.

Um agradecimento especial à Bianca Lucas Lima, uma amiga que me trouxe uma boa notícia.

Do mesmo modo que proponho uma educação matemática que não seja preparação para vida,
e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação.

(LINS, 1999, p. 94)

RESUMO

A presente dissertação, produto de nossa pesquisa de mestre em Educação Matemática, traz uma análise da produção de significados em um processo de formação de professores numa abordagem da Aritmética Pitagórica em que trabalharam no trânsito entre os modos de produção de significado geométrico, aritmético e algébrico. De cunho qualitativo, as ações de pesquisa foram elaboradas nos moldes da metodologia adotada, a pesquisa-ação, e como método de análise utilizamos o Modelo dos Campos Semânticos. Esse trabalho é uma resposta à nossa inquietação a respeito do panorama atual nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, na sala de aula da Educação Básica. Com o objetivo de contrapor-nos ao Ensino Tradicional da Matemática, organizamos grupos de trabalho com os atores da pesquisa (professores em formação inicial e continuada) através do Projeto Pitágoras: em (e além do) Teorema. Nesse projeto dividimo-nos em três frentes de pesquisa: História da Matemática; demonstração do Teorema; Aritmética Pitagórica. Em nossa pesquisa focamos na Aritmética Pitagórica, trabalhando com os números figurados. Inicialmente trabalhamos junto com os atores da pesquisa no desenvolvimento de propostas de ensino e aprendizagem, na perspectiva de Práticas Educativas Investigativas e de ações diferenciais, envolvendo números figurados e usando Materiais Didáticos-Pedagógicos produzidos a partir de materiais recicláveis, construídos pelos próprios atores do processo. Em continuidade ao trabalho, planejamos e executamos ações de intervenção, junto aos atores, que foram: oficinas, cursos de extensão, minicursos e congêneres, com o objetivo de analisar a dinâmica da produção de significado, acerca da apresentação de uma proposta, que envolvesse Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes de trabalhos apresentados pelo Projeto Pitágoras e com isso responder a seguinte pergunta-diretriz: que significados foram produzidos por professores em formação inicial e continuada acerca da Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes apresentados pelo Projeto Pitágoras: em (e além do) teorema? O trabalho feito com os participantes da pesquisa proporcionou, dentre outros, a produção de Materiais Didáticos-Pedagógicos como também um produto educacional que está em fase final de desenvolvimento para a entrega junto com a versão final da dissertação do trabalho de pesquisa em questão.

Palavras-chave: Produção de significado. História da Matemática. Números figurados. Formação de professores que ensinam Matemática. Práticas Educativas Investigativas.

ABSTRACT

The present dissertation, product of our research in order to obtain the title of Master in Mathematical Education, brings an analysis of the, provides an analysis of the meaning production in a teacher education process, in a Pythagorean Arithmetic approach wherein they worked in transit between the modes of meaning production of geometric, arithmetic and algebraic meaning. From a qualitative nature, the research actions were elaborated according to the adopted methodology, the action research, and as a method of analysis we used the Semantic Fields Model. This work is a response to our concern about the current scenario in the teaching and learning processes of mathematics in the Basic Education classroom. In order to counteract the traditional teaching of mathematics, we organized working groups with the research actors (teachers in initial and continuing education) through the Project “Pitágoras: em (e além do) teorema”. In this project we are divided into three research fronts: History of Mathematics; demonstration of the theorem; Pythagorean Arithmetic. In our research we focus on Pythagorean Arithmetic, working with the figurative numbers. Initially we worked together with the actors in the development of teaching and learning proposals, from the perspective of Investigative Educational Practices and differential actions, involving figurative numbers and using Pedagogical Teaching Materials produced from recyclable materials, built by the process actors themselves. Continuing the work, we planned and executed intervention actions, with the actors, which were: workshops, extension courses, short courses and the like, with the objective of analyzing the dynamics of the meaning production, of the actors, about the presentation of a proposal, which involved Pythagorean Arithmetic, in accordance with the work presented by the Pythagoras Project and thus answer the following guiding question: what meanings were produced by teachers in initial and continuing education about Pythagorean Arithmetic, in the model presented by the Pythagoras Project: in (and besides the) theorem? The work done with the research participants provided, among others, the production of Pedagogical Teaching Materials as well as an educational product that is in the final stages of development for delivery along with the final version of the dissertation of the research work in question.

Keywords: Meaning production. Mathematics History. Figurate numbers. Training of teachers who teach Mathematics. Investigate Educational Practices.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Formação de uma sequência de números triangulares com seixos e números figurados poligonais	44
Figura 2 – Formação de uma sequência de números quadrados	47
Figura 3 – Confeção dos <i>kits</i> de números figurados	65
Figura 4 – Sequência de números pentagonais.....	65
Figura 5 – Fórmula de Eüler para números pentagonais	66
Figura 6 – Gnomons e distribuição gnomônica de números figurados	68
Figura 7 – Sequências de números triangulares a partir de um número retangular.....	69
Figura 8 – Números quadrados como soma de 2 triangulares consecutivos	72
Figura 9 – Processo comunicativo no MCS – constituição do autor.....	74
Figura 10 – Processo comunicativo no MCS – constituição do leitor	75
Figura 11 – Efetiva comunicação: modelo clássico versus MCS.....	75
Figura 12 – Logo do Projeto Somar	79
Figura 13 – Prática com alunos da 1ª série	80
Figura 14 – Formando números figurados	80
Figura 15 – Construção geométrica de números pentagonais com tampinhas.....	88
Figura 16 – Construção geométrica de números hexagonais	89
Figura 17 – Construção geométrica de números pentagonais	90
Figura 18 – Tabela de números figurados pentagonais	90
Figura 19 – Tabela da sequência de números quadrados $f_4(n)$	96
Figura 20 – Número quadrado de 5ª ordem.....	96
Figura 21 – Operações envolvendo número quadrado com o grupo 4.....	100
Figura 22 – Formação de números triangulares do grupo 1	103
Figura 23 – Slide da tabela de números triangulares.....	105
Figura 24 – Soma gaussiana	107
Figura 25 – Soma gaussiana de triangulares	107
Figura 26 – Slide da sequência de números triangulares.....	108
Figura 27 – Formação de números triangulares do grupo 2	108
Figura 28 – Formação de números pentagonais na dinâmica eüleriana	111
Figura 29 – pentagonais como soma de quadrados e triangulares	113

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cenários no qual desenvolvemos nossa pesquisa.....	62
Quadro 2 – Noções categorias no processo de produção de significados	86
Quadro 3 – Caixa de diálogo participante Ruiva, do grupo 1	91
Quadro 4 – Caixa de diálogo de participantes do grupo 1.....	92
Quadro 5 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 3	92
Quadro 6 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 4.....	93
Quadro 7 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 1	94
Quadro 8 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 1 em relação aos pentagonais	94
Quadro 9 – Fragmentos do quadro 8	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição de números triangulares $f_3(n)$ até a 5ª ordem.....	104
Tabela 2 – Distribuição gnomônicas de números triangulares $f_3(n)$ até a 5ª ordem.....	109
Tabela 3 – Distribuição de números pentagonais $f_5(n)$ até a 5ª ordem.....	112

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AEC – Antes da Era Cristã

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

Cafobo – Centro Alternativo de Fomento à Formação

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Cefetes – Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Comat – Coordenadoria de Matemática do Ifes, *campus* Vitória

CS – Campo Semântico

DEC – Depois da Era Cristã

Educimat – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Ifes

EEEFM – Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio

EJA – Educação de Jovens e Adultos

ETM – Ensino Tradicional de Matemática

Gepemem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática

GPA – Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da Unesp – Rio Claro

GPAEM – Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UFV

Ifes – Instituto Federal do Espírito Santo

IFFar – Instituto Federal Farroupilha

Life – Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores

Limat – Curso de Licenciatura em Matemática do Ifes, *campus* Vitória

LPEI – Laboratório de Práticas de Ensino Integradas

MCS – Modelo dos Campos Semânticos

MDP – Material didático-pedagógico

MPS – Modos de produção de significado

NRP – Nota de rodapé

OG – Organizações Governamentais

PA – Progressão Aritmética

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

PGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp/Rio Claro

PEIs – Práticas Educativas Investigativas

Pibic – Programas de Iniciação Científica

Pibid – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

Semat – Semana da Matemática do Ifes, *campus* Vitória

UFSM – Universidade Federal de Santa Maria

UFV – Universidade Federal de Viçosa

Unesp – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 PROBLEMATIZAÇÃO	21
2.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA	27
2.2 O PROJETO “PITÁGORAS: EM (E ALÉM DO) TEOREMA”	30
2.3 O GEPEMEM.....	37
3 REVISÃO DE LITERATURA	40
3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS FIGURADOS	43
3.2 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MCS).....	48
3.2.1 Pesquisas que envolvem análise de produção de significado	50
3.3 PESQUISAS QUE ABORDARAM NÚMEROS FIGURADOS	55
4 PANORAMA DA PESQUISA	58
4.1 NATUREZA E MODALIDADE DA PESQUISA	58
4.2 PRINCÍPIO NORTEADOR DA PESQUISA	58
4.2.1 Pesquisa-ação	58
4.2.2 Objetivo geral e pergunta-diretriz	60
4.2.3 Objetivos específicos	61
4.3 HABITAT DA PESQUISA.....	62
4.3.1 Caracterização dos Cenários	63
4.3.2 Cenário 1 – Reuniões de planejamento do Projeto Pitágoras	63
4.3.3 Cenário 2 – As oficinas e minicursos	64
4.3.3.1 7ª Semana da Matemática (Semat) do Ifes, <i>campus</i> Vitória (mai. 2018).....	64
4.3.3.2 VI Escola de Inverno de Educação Matemática (EIEMAT), XIII Encontro gaúcho de Educação Matemática (EGEM) e 4º Encontro Nacional Pibid de Matemática, na UFSM (ago. 2018).....	71
4.3.4 Cenário 3 – As reuniões dos subgrupos e as plenárias do Gepemem	76

4.3.5 Cenário 4 – Projeto Somar	77
4.4 ATORES DA PESQUISA.....	81
4.4.1 Participantes	81
4.5 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS	82
4.5.1 Procedimentos metodológicos das entrevistas	82
4.5.2 Método de análise de produção de significados	83
5 ANÁLISES A PARTIR DAS LEITURAS LOCAL E GLOBAL	86
5.1 O CONJUNTO DE AÇÕES E OPERAÇÕES DESENVOLVIDO NAS OFICINAS	87
5.2 LEITURA LOCAL REFERENTE À 7ª SEMANA DA MATEMÁTICA (SEMAT) DO IFES <i>CAMPUS</i> VITÓRIA (mai. 2018)	91
5.2.1 Tarefas com números quadrados	91
5.2.1.1 Grupo 1	91
5.2.1.2 Grupo 3	92
5.2.1.3 Grupo 4.....	93
5.2.2 Tarefas com números triangulares	93
5.2.2.1 Grupo 1	93
5.2.3 Tarefas com números pentagonais	94
5.2.3.1 Grupo 1	94
5.3 LEITURA GLOBAL.....	95
5.3.1 Tarefas com números quadrados	95
5.3.1.1 Relativa às caixas de diálogos de participantes do grupo 1 (Quadros 3 e 4).....	95
5.3.1.2 Relativa à caixa de diálogo de participantes do grupo 4 (Quadro 5).....	100
5.3.1.3 Relativa à caixa de diálogo de participantes do grupo 3 (Quadro 6).....	101
5.3.2 Tarefas com números triangulares	102
5.3.2.1 Grupo 1	103
5.3.2.2 Grupo 2.....	108
5.3.2.3 Grupo 3	109

5.3.2.4 Grupo 4.....	109
5.3.3 Tarefas com números pentagonais.....	109
5.3.3.1 Grupo 1.....	110
6 PRODUTO EDUCACIONAL.....	115
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	116
REFERÊNCIAS.....	119

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de pesquisa foi motivado pela nossa inquietação e discordância a respeito de como a Matemática, quando pensamos em ensino e aprendizado aritmético, geométrico e algébrico em especial, tem sido tratada nas salas de aula da Educação Básica. Essa inquietação nos levou a percorrer um caminho histórico, refletindo a partir de estudos de referenciais que tratam da construção do conhecimento matemático desde os primórdios da organização humana como civilização, a fim de entender o porquê ocorrem certas incongruências e fracassos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Dessa forma, levantamos questionamentos a respeito da manutenção do *status quo* do ensino de Matemática que perpetua práticas, pensamentos e metodologias excludentes, produzindo na Educação Básica, ao nosso ver, fracassos como os que são apontados em Baldino e Carrera de Souza (1997), Baldino (1998), Lins e Giménez (1997) e Chaves (2000; 2004). Apoiando-nos em tal referencial, propusemos reflexões e práticas para o enfrentamento do que denominamos como Ensino Tradicional da Matemática (ETM). Entendemos ETM, tal como apresentado em Chaves (2004), sendo uma prática na qual predominam aulas expositivas, descontextualizadas (voltadas exclusivamente à Matemática, sem qualquer relação com referências à realidade do aluno), centradas no professor, onde a programação curricular se sobrepõe à aprendizagem. Por isso, entendemos que tal prática contribui para uma possível manutenção do cenário descrito.

A esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), ao tratar a Resolução de Problemas como recurso didático, aponta que, de maneira tradicional, os problemas não têm desempenhado seu papel no ensino da Matemática, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de saberes adquiridos anteriormente pelos alunos em sala de aula, ou seja, denunciando o que entendemos como ETM. Com a pretensão de irmos além em nossas investigações, começamos a trilhar nosso caminho, primeiramente, buscando entender esse tal cenário, como foi construído, como se mantém e se sustenta. Ao buscar essa compreensão, debruçamo-nos em diversas obras e documentos oficiais que estabelecem as diretrizes do ensino da Matemática na Educação Básica.

Na busca do entendimento da formação histórica de saberes matemáticos seguimos com Boyer (1978 [1974]) e Eves (2008 [2004]) principalmente. Pautamo-nos em Lins e Giménez (1997) para discutir os problemas relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem de legitimidades relativas à Aritmética e Álgebra. Os documentos oficiais relativos ao ensino de Matemática que tomamos foram: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), elementos que nos deram base legal para nos alicerçar em nossas análises. Verificamos então, a partir de tais textos, que as práticas na sala de aula da Educação Básica (baseadas no ETM, como já fora explicitado, e trabalhando uma Matemática segmentada, abordando cada segmento de maneira isolada e fora de um contexto que ligue o aluno à sua realidade) divergem das diretrizes curriculares estabelecidas. Em Lins e Giménez (1997) temos um apontamento sobre como a Geometria e a Aritmética se inter-relacionam e que essa inter-relação é bem explícita ao analisarmos a Matemática dos gregos. Entendemos que explorar tal inter-relação constitui-se como um caminho que pode ser adotado para uma transformação no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Adotamos como objeto de estudo, para percorrer o caminho escolhido para o enfrentamento do problema descrito, os números figurados da Aritmética Pitagórica, justamente por expor tal inter-relação apontada. Tais números, que já foram objeto de estudo de muitos matemáticos durante a história, tiveram sua origem com Pitágoras e os pitagóricos, por volta de 500 AEC. Entendemos, por isso, tais números como uma ferramenta a ser utilizada numa proposta de formação de professores, que se colocasse em oposição às práticas hegemônicas do ETM. Com essa abordagem, objetivamos analisar a dinâmica da produção de significado dos atores do processo acerca da apresentação de uma proposta envolvendo alguns aspectos da Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes apresentados pelo Projeto “Pitágoras: em (e além do) teorema”. Tal objetivo gerou a seguinte pergunta-diretriz: que significados foram produzidos por professores em formação inicial e continuada acerca da Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes apresentados pelo Projeto Pitágoras: em (e além do) teorema? Dessa forma, gerar uma proposta, uma direção à reflexão e à ação, sugerindo práticas de ensino com o objetivo de romper com a inércia mantenedora do ETM.

Uma das bases de nossa proposta foi trabalhar em processos de formação de professores utilizando padrões, sobretudo numéricos e geométricos, a partir de sequências de números figurados, advindos da escola pitagórica. Como meio, por onde conduzimos nossa pesquisa, apresentamos o “Projeto Pitágoras: em (e além) do teorema”, que tem funcionado como um corpo operacional do Grupo de Estudos em Educação Matemática e Modelo dos Campos

Semânticos (Gepemem), que também apresentamos nesse capítulo, ambos coordenados pelo orientador desta pesquisa. A proposta de trabalho adotado pelo do Gepemem segue a perspectiva indissociável de ensino-pesquisa-extensão, desenvolvendo PEIs (Práticas Educativas Investigativas), conforme apresentado em Chaves (2004). Todos os planejamentos, bem como a execução de oficinas, curso de extensão, projetos de extensão e a produção de MDP (Material Didático-Pedagógico), que se constituem como cenários de pesquisa do nosso trabalho, são feitos a partir do Projeto Pitágoras. Tanto o Projeto Pitágoras quanto o Gepemem adotam como *locus* do nosso solo epistemológico, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que tem a produção de significados como aspecto central de toda aprendizagem.

Portanto, por entendermos, principalmente, que a Geometria e a Aritmética se inter-relacionam, e isso é posto historicamente, propomos um processo formativo adotando os números figurados, que nos permitisse analisar o trânsito da produção de significados entre os modos de produção de significado (MPS) geométrico, aritmético e algébrico. Entendemos que, ao pensarmos nos processos de ensino e de aprendizagem de noções fundamentais que são construídas na Educação Básica, trazemos como reflexão uma proposta de levar para sala de aula uma educação baseada na produção de significado.

No capítulo 2, trazemos a explanação do nosso pensamento^{1, 2} em relação ao problema de pesquisa e problematização do tema que será trabalhado, tendo o objetivo de construir uma visão geral a respeito do problema tratado. Fazendo uma análise a partir de uma visão tanto histórica como cultural a respeito de modos de produção de significados (MPS) aritmético, geométrico e algébrico e de como ideias fundamentais a esse respeito, desde sua gênese, tem uma inter-relação, propomos uma reflexão a respeito da abordagem dada de maneira segmentada e separada nas salas de aula e porque essa prática é um dos caminhos que apontamos como causa dos fracassos aos quais nos referimos. Nesse espaço fazemos

¹ Trataremos o sintagma “pensamento” como apresentado em Sad (1999), ao considerar que os pensamentos são proporcionados por nossas “percepções e funções mentais básicas – capacidade de atenção, de formação de imagens e de conexões – cuja atuação consideramos sempre em um meio psíquico-social (aqui o hífen é para lembrar o quanto estão imbricados) [...] Entendemos **pensamento** como relações e combinações, conscientes, das funções mentais básicas – associação, atenção, formação de imagens e conexões –. Concordamos com Vygotsky, quando diz que ‘o pensamento não é algo acabado, pronto para ser expresso. O pensamento se precipita, realiza função, como trabalho. Este trabalho do pensamento é a transição desde as sensações da tarefa – através da construção do significado – ao desenvolvimento do próprio pensamento’” (VYGOTSKY, 1991, p. 125 apud SAD, 1999, p. 77).

² Assumimos então que, em nosso trabalho, operaremos com a premissa de que o sujeito estrutura o pensamento por objetos, tal como apresentado em Silva (2003), ao defender que no MCS, colocamo-nos em contraposição ao modelo piagetiano que considera o pensamento como sendo estruturado por conceitos.

apontamentos e preparamos também uma base histórica na qual construímos nosso raciocínio em torno da discussão levantada. Pontuando peculiaridades históricas a respeito do pensamento (NRP 1, 2) aritmético, geométrico e algébrico desde a Matemática grega, mas também fazendo alusão aos primórdios da organização humana como civilização.

Pontuamos, a partir de nossos referenciais, que o problema do fracasso advém também do fato de nossos estudantes viverem numa dicotomia quando se trata de operar com a Matemática, e por isso levando-nos a compreender a existência de pelo menos duas Matemáticas, que classificamos como a da rua e a da escola. Discutimos sobre o ETM nos ambientes de aprendizado e suas peculiaridades. Ao denunciar o ambiente hegemônico de aprendizagem do ETM como um dos caminhos que pode levar também ao dito fracasso, portanto, não levando em consideração a Matemática da rua e bagagem cultural dos alunos, apontamos, com base nos referenciais estudados, caminhos para se romper com tal prática, convidando-nos a testar ambientes de aprendizagem que possam oportunizar ao aluno o prazer de investigar.

No capítulo 3, de início, trazemos nossa revisão de literatura, apresentamos e discutimos as obras que nos inspiraram no levantamento do problema de pesquisa, como também nos embasaram na discussão e análise durante o trajeto percorrido na condução do trabalho. Nessa parte fazemos apontamentos a partir da BNCC como anteparo às nossas propostas, ideias e práticas. Trazemos uma passagem histórica para apresentar os números figurados, objeto de trabalho desta pesquisa, falamos de sua intrigante origem e de como era a abordagem dada pelos antigos matemáticos a tais números. Em seguida, abrimos a discussão ao MCS, como já mencionado, nosso principal lastro epistemológico. Trazemos a explicação do que é o MCS, como também sua história, seu criador e o que o motivou à criação dessa que é tida como uma teorização que só faz sentido de existir na ação. Buscamos observar e comentar trabalhos anteriores que usaram essa teorização em suas pesquisas e os resultados que foram obtidos, reforçando, no nosso entendimento, a solidez de nosso aparato epistemológico. Por fim, apresentamos o levantamento de alguns trabalhos de pesquisas acadêmicas que tiveram como objeto de estudo os números figurados.

No capítulo 4, explanamos o panorama geral da pesquisa, discutimos sua natureza e modalidade. Apresentamos a metodologia adotada em nosso trabalho, a pesquisa-ação, pois durante o percurso desenvolvemos ações de intervenção participativa. Pontuamos todos os referenciais nos quais embasamos as práticas da adoção, no que diz respeito ao uso da pesquisa-ação. Nesse espaço, colocamos o objetivo geral, relacionado à pergunta-diretriz,

mostrando que ambos foram delineados com a análise da problemática que apresentamos. Também mostramos todos os nossos cenários em que atuamos durante as intervenções e coleta de dados, assim como trazemos uma análise global da aplicação das oficinas de intervenção em processos de formação de professores. Apresentamos os atores que participaram de nossa pesquisa e detalhamos sobre os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos metodológicos usados. Explicamos como se dá o método de análise de produção de significados, dada que essa é a metodologia base que adotamos.

No capítulo 5, trazemos um aprofundamento da análise dos dados levantados, mostrando o que denominamos de acordo com o referencial de análise a partir das leituras local e global por meio de uma leitura plausível. Descrevemos as noções categorias e todas as ações e operações que foram desenvolvidas nas oficinas. É neste momento que aplicamos o método de análise de produção de significados de maneira sistemática, desnudando todos os acontecimentos que presenciamos durante a coleta de dados à luz do MCS.

No capítulo 6, levantamos discussão em torno do que foi produzido e damos nossas considerações a respeito. Apontamos o que foi observado durante as ações nos processos de formação de professores e o que pudemos concluir a respeito dos significados produzidos pelos atores no processo. Nossos apontamentos aqui não se identificam com juízo de valor, apenas explanaremos o que a nós foi construtivo de acordo com nossa leitura durante todo esse aprendizado.

No capítulo 7, trazemos todos os referenciais que nos forneceram alicerces durante o trajeto percorrido.

O produto educacional, com título Números figurado planos em formação de professores, apresentado na forma de guia didático, é destinado a professores (em exercício ou em formação), no qual narramos tarefas, atividades, ações e operações desenvolvidas nos minicursos envolvendo números figurados. Apresentamos nosso aporte teórico, as bases históricas a respeito dessa temática associada à Aritmética Pitagórica. Nosso propósito com esse guia foi levar aos leitores uma possibilidade de se trabalhar no viés da Teoria da Atividade e do MCS, com vistas à possibilidade de ir além da relação dicotômica de erro ou acerto.

2 PROBLEMATIZAÇÃO

Um ilustre Professor da Universidade de Paris, Fernand Faure, assim caracterizou o papel dos números nas ciências sociais: Os matemáticos, êsses mestres dos números, costumam repetir que os números governam o mundo, *mudum regunt numeri*. Isto, porém, não é exato, pois os números são criações do nosso espírito. Nada governam. Os estatísticos, menos ambiciosos, contentam-se em dizer, como Goethe, “que os números servem para nos explicar como o mundo é governado. Esforçam-se, o mais conscientemente que é possível, em reuni-los e pô-los à disposição dos homens de ciência”. Ensinam as enciclopédias que os homens, muito antes de se aproveitarem dos dedos, para escrever, já dêles se utilizavam para contar as coisas. A superstição desde logo se apoderou dos números, e a própria Filosofia grega, analisando-lhes, com a habitual sutileza, os característicos e as qualidades, deu-lhes, com Pitágoras e Platão, um papel demasiado importante na teoria das idéias (HORTA apud TAHAN, 1967 [1959], p. 11 – *ipsis litteris*).

No espectro do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), modos de produção de significados (MPS) são “‘campos semânticos idealizados’ que existem na forma de repertórios segundo os quais nos preparamos para tentar antecipar de que é que os outros estão falando ou se, o que dizem, é legítimo ou não” (LINS, 2012, p. 29, grifos do autor). Já “significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 145-146, grifos do autor).

Partiremos do entendimento de que os MPS geométricos e aritméticos são indissociáveis do fazer humano e, de acordo com registros de estudos históricos [Almeida (2017); Domingues (2017 [1991]); Brolezzi (2014); Roque (2014 [2012]); Eves (2008 [2004]); Boyer (1978 [1974])], a Matemática, na condição de ciência dedutiva, e também seu caráter abstrato, no ocidente, teve início com os gregos, mais especificamente com Tales e Pitágoras, segundo Boyer (1978 [1974]).

Tomando como base Os Elementos (EUCLIDES, 2009), nossas investigações a respeito da Aritmética Pitagórica [Souza (2018); Almeida (2017); Domingues (2017 [1991]); Brolezzi (2014); Roque (2014 [2012]); Pickover (2009); Cattanei (2005); Eves (2008 [2004]); Gundlach (1992); Boyer (1978 [1974]); Tahan (1972 [1965], 1967a [1959]); Mello e Souza (1939)]. Por esse espectro, é possível entendermos, então, que a Matemática grega era essencialmente geométrica, onde as formas eram valoradas. No entanto, é evidente como a Aritmética se inter-relaciona, de maneira clara, com a Geometria, como afirma Lins e Giménez (1997, p. 36), quando nos traz como exemplo, o fato de que, quando vamos medir alguma coisa, aplicamos a ideia geométrica de unidade e calculamos (aritmeticamente)

quantas vezes a temos. Essa inter-relação está presente na Matemática dos gregos, como podemos observar no Livro VII, de Os Elementos, nas definições apresentadas:

Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
 E número é a quantidade composta de unidades.
 Um número é a parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.
 E partes, quando não meça exatamente.
 [...]
 17. E quando dois números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é dito plano, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.
 18. E quando três números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é sólido, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.
 19. Um número quadrado é igual ao mesmo número de vezes ou [o] contido por dois números iguais.
 20. E um cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais.
 [...]
 22. Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção (EUCLIDES, 2009, p. 270).

Tais evidências são referendadas em Souza (2018) ao afirmar que:

Números (*arithmos*) e grandezas (*mégéthos*) são tratados separadamente na obra de Euclides, mas ambos são representados por segmentos de retas. Os primeiros são agrupamentos de unidades – que são indivisíveis – mas as grandezas geométricas são divisíveis em partes de mesma natureza (como as linhas em parte de linha, as superfícies em parte de superfície etc.). Algumas definições de Euclides dão conta desse tratamento específico (SOUZA, 2018, p. 94).

Se observarmos, em Os Elementos – nos livros que tratam de números (VII, VIII e IX) – constataremos que estes números são associados a medidas de segmentos e, segundo Souza (2018, p. 94), são utilizados para facilitar o entendimento das proposições, sobretudo as de números 30, 31 e 32, no Livro VII, que são tidas como motivadoras do Teorema Fundamental da Aritmética³.

O desenvolvimento da capacidade e habilidade de fazer contagem e medir situa-se na gênese do fazer matemático e, concomitantemente, da construção da civilização como nós conhecemos. O quantificar, a princípio, de pequenas coleções de objetos e, posteriormente, perpassando por formas e padrões cada vez mais complexos envolvendo grandes quantidades, de acordo com as exigências e necessidades crescentes com o propósito de atender as demandas sociais de cada época, levou a humanidade a diversas transformações. Essa

³ O Teorema Fundamental da Aritmética sustenta que todos os números inteiros positivos maiores que 1 podem ser decompostos num produto de números primos, de forma que tal decomposição é única a menos de permutações de fatores. Tal teorema foi proposto e demonstrado por Carl Friedrich Gauss em 1796.

dinâmica nos leva ao entendimento do quão natural e comum são os MPS geométrico, aritmético e algébrico, bem como o trânsito entre eles, que praticamos no nosso dia a dia.

Quando nos referimos a tais MPS, tomamos como premissa a Aritmética, cujas raízes advém de *Arithmētikē (tēknē)* – arte ou técnica de lidar com números (*arithmos* – contagem, quantidade) – que, por definição, é a parte da Matemática que estuda e lida com contagem e operações numéricas, como, por exemplo, adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, logaritmar⁴, dentre outras. Todavia, destacamos a necessidade de entendimento da concepção pitagórica de número

Centrada na conexão entre pares de números, tende a pôr em nítido destaque os aspectos teóricos ou racionais do conceito de número, relegando a segundo plano o papel do número como instrumento de cálculo ou de medida aproximada. Assim era possível conceber a aritmética como uma disciplina intelectual, mais que como uma técnica: uma transição nesse sentido parece exatamente ter sido feita no âmbito da escola pitagórica⁵ (CATTANEI, 2005, p. 25).

Isso porque a gênese da Aritmética é encontrada nos pitagóricos, onde a escola pitagórica tratava a Matemática de maneira muito filosófica e abstrata, desvinculada das exigências da vida prática e, daí, decorre a dicotomização que faziam:

– de um lado o estudo teórico dos números (Aritmética = estudo das relações abstratas envolvendo números);

– e, do outro, os cálculos práticos (Logística = arte prática de calcular com números).

No entanto, ao nos referirmos a MPS geométrico básico, envolve nesse repertório a capacidade de medir, definir áreas e volumes, reconhecer formas e tamanhos e até mesmo definir a localização de objetos quaisquer num dado espaço. Dessa forma, o que nos inquietou foi: o que se sucede para que ocorra o tipo de fracasso já mencionado, no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem, quando se trata do âmbito escolar, ao se falar de Aritmética e Geometria?

Para atacarmos o problema de como se dá esse fracasso, pautamo-nos em Lins e Giménez (1997) quando trata de que o mesmo (o fracasso) não se restringe apenas ao entorno dos

⁴ Segundo Caraça (1984 [1948], p. 17), desde os anos iniciais da Educação Básica, aprendemos em Aritmética que as quatro operações fundamentais são: adição; subtração; multiplicação; divisão. “A estas há que juntar mais três que se lhes ligam imediatamente; são a potenciação, a radiciação e a logaritmação”.

⁵ Boyer, *Storia...*, p. 63. Sobre o universo pitagórico dos *logoi*, que são pares ordenados de números, em contraposição aos dos números inteiros positivos que os compõem, cf. infra, capítulo quarto, primeira parte: “Aristóteles e as ciências matemáticas de seu tempo” (Nota do autor).

muros da escola; ao contrário disso, estende-se além-muros. Embora em muitos casos tal fracasso seja mais amplo, indicando que o aluno não aprende o que lhe é proposto, pelo menos segundo os padrões esperados pela escola, existem outros tipos de fracasso igualmente preocupantes, como, por exemplo, o que se refere à “farsa” de que as pessoas aprendem o que lhes é ensinado na escola, mas apenas para a escola. Sobre isso, os PCNs apontam como inadequada a frequente prática de se ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema, cujo o formato pré-determinado busca exatamente a aplicação do procedimento ou técnica ensinado anteriormente, e com isso avaliar se os alunos sabem empregar o que lhes foi ensinado. Lins e Giménez (1997), ao nos trazer tal questão, denunciada inclusive pelos PCNs, nos leva ao entendimento de que fora da escola fazem-se uso de outra Matemática. Ou seja, entendemos a possibilidade da existência de pelo menos duas Matemáticas – a da rua e a da escola – isso sem levar em conta as Matemáticas da academia.

Na escola, temos adição, multiplicação, subtração, divisão, frações, cálculo de áreas de figuras geométricas, medição de distâncias imaginárias e também, por exemplo, a localização de lugares em mapas dentre outras; mas isso em nada tem a ver com a rua. O que queremos dizer com isso é como todas essas tarefas citadas, dadas em sala de aula, não fazem sentido na rua onde tudo isso é usado para calcular preços, tamanho, distâncias reais, tempos e volumes de coisas palpáveis e que é feito tão naturalmente pelas pessoas no seu cotidiano, e muitas vezes feito com considerável habilidade, mesmo por aqueles que pouco frequentaram a escola ou mesmo que nunca frequentaram. Na rua, desenvolve-se métodos próprios para realizar essas operações, no interior de cada atividade própria da rua.

Segundo Lins e Giménez (1997, p. 12), a questão é que “na escola os números não são números de nada e na rua eles têm outros significados, podendo ser o tamanho de alguma coisa”. Na Aritmética da rua, por exemplo, a precisão – no sentido da cartesiana exatidão dos livros didáticos – nem sempre é o mais importante, pois na prática os “arredondamentos” e as aproximações são mais adequadas para aquele usuário. É nesse ponto onde se escuta de pessoas comuns que boa parte da Matemática escolar é “inútil” porque se vê que é bem possível aprender ideias e princípios da Matemática da rua na própria rua.

Um exemplo disso pode ser encontrado em Chaves (2004, p. 138-149), em Reintrodução de espécies nativas para conter erosão (PEI⁶ desenvolvida com alunos do ensino fundamental e seus professores) – *In Situ* 07– e Aprendendo com uma aluna – *In natura* 13 – quando alunos de 8º e 9º anos desenvolveram 7 estratégias diferentes para calcular a área de uma superfície irregular, trabalhando com MPS (MPS) geométrico-aritmético – pelo menos nos moldes de uma Geometria Euclidiana – para determinar a quantidade de sacos de composto – fosfato simples – necessária para corrigir o solo em uma área a recuperar, reintroduzindo espécies nativas de vegetação de restinga, utilizando assim a Matemática escolar para resolver um problema local, portanto, voltado à Matemática da rua, mas também levando em consideração o conhecimento matemático da rua (procedimentos de medida adotados pelos alunos) na tentativa de estimar e calcular o que fora proposto, tal como Lins (1999, p. 92) sugere, ao nos lembrar a relevância de explicitar e produzir legitimidade, na escola, para os MPS da rua, como ato político e também pedagógico.

Nas estratégias apresentadas, os alunos confrontaram seus resultados por acréscimo, ou por redução, ou por estimativas (determinísticas ou *fuzzy*), ou por soma de áreas – que retomavam o princípio geométrico das somas de Riemann – para obtenção dos valores possíveis que os levassem a calcular a quantidade de fosfato simples a utilizar. As áreas variaram de 665 a 903 m², e as quantidades de fosfato variaram de 125 a 140 kg do referido composto, mas, na prática, tal variação de resultados pouco interferiu pois, em todos os resultados obtidos, os alunos concluíram que deveriam utilizar mais de 3 e menos de 4 sacos de 40kg, o que implica que deveriam adquirir 4 sacos do referido composto e não 3.

Essa prática relatada nos dois parágrafos antecedentes – tal como apresentada por Lins (1999, p. 92), ao propor novos MPS, que, aliados aos da rua, propiciaram a resolução de um problema – mostra como, na rua, as ditas áreas da Matemática (Geometria, Aritmética e Álgebra, por exemplo) não estão separadas em “caixas” ou “gavetas”, para que as usemos ordenada e separadamente, uma de cada vez. Vale ressaltar que a recém-publicada BNCC, propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar de saberes, o estímulo à sua aplicação na realidade, bem como a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e ao protagonismo do estudante. Esse mesmo documento, na unidade Números, aponta que o pensamento numérico é aprofundado e ampliado quando se discutem situações

⁶ PEI – Práticas Educativas Investigativas, desenvolvidas em Chaves (2004), que defende ações políticas e não metodológicas ou didáticas, na tentativa de romper com a inércia mantenedora do ETM.

que envolvam “conteúdos” das demais unidades temáticas, como a Álgebra e a Geometria, por exemplo (BRASIL, 2018).

Analisando tal questão, em Chaves (2004) e Lins e Giménez (1997), verificamos que a escola desqualifica os saberes da rua, sejam eles aritméticos ou geométricos. Entre os argumentos para essa desqualificação estão uma suposta falta de formalismo e a não abrangência da totalidade das situações tratadas pela Matemática escolar, chancelada pela academia e por organizações governamentais (OG). Da mesma forma, a rua não aceita a Matemática escolar por ser muito “complicada” e não fazer sentido diante dos significados próprios da rua acerca dos números e objetos. Para Lins e Giménez (1997, p. 17), a rua e a escola se negam, pois, cada uma delas desenvolve seus próprios significados, maneiras de proceder e avaliar os resultados dos seus procedimentos.

Segundo as obras supracitadas, e pelas premissas que adotaremos – explicitadas a seguir – a Educação Matemática transvaloriza-se quando reconhece ambas as posições como legítimas, o que quer dizer que os alunos estão vivendo em dois mundos distintos, cada um com organização própria e modos legítimos de produção de significado. Um grande problema e confusão se coloca quando é trazido para a sala de aula algum exemplo do cotidiano do aluno, que normalmente se dá na rua, para usar como meio para se ensinar a Aritmética escolar, ou seja, construir os significados aritméticos escolares. Essa atitude propõe aos alunos que a Aritmética da rua não é o método certo. A rua não se caracteriza pelas coisas que se faz na rua, e sim por seus significados próprios, (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 27). Dessa forma, o caminho para lidar com essa problemática do ensino da Matemática é propor uma Educação Matemática baseada na dinâmica da produção de significado, sem ignorar as diversidades – da sala de aula e da rua – criar novas perspectivas para superar o ensino tradicional da Matemática (ETM), tal como posto em Chaves (2004) e apresentado a seguir em (P₇) – “A Educação Matemática que defendemos produz legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua (ato político, ato pedagógico)” (LINS, 1999, p. 92).

Dessa forma, apontamos a necessidade de, na escola, nos processos de ensino e de aprendizagem, construirmos mecanismos de análise de hipóteses, que possam testar e validar, mesmo que de maneira empírica, os significados produzidos por alunos ao construírem certo raciocínio, que Bicudo (2005 [1987]) denomina de influência de Platão, onde:

Essa se refere à ausência da explicitação do caminho que vai da experiência individual à estruturação de verdades ou de afirmações mais gerais e abstratas, de

modo que a racionalidade dessa ciência passou a trabalhar apenas com o movimento dedutivo, indo do geral (leis científicas) ao particular (exemplos, aplicações a casos individuais) [...] afirmações, um tanto vazias de significado científico (BICUDO, 2005 [1987], p. 16-17).

Diante do exposto, propomos fazer um enfrentamento dos problemas relativos ao fracasso do ensino da Matemática formando grupos de estudos, trabalhos – e pesquisas – envolvidos em discussões a partir da sistemática adotada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – Gepemem, que mantém sólido lastro teórico [teoria da atividade (LEONTIEV (1984); Práticas Educativas Investigativas – PEI – (CHAVES, 2004, 2005); Modelo dos Campos Semânticos – MCS – (LINS, 2012, 2004, 1999, 1993; SILVA, 2003); Assimilação Solidária (BALDINO, 1998)], de maneira que se possa planejar e desenvolver atividades, ações e operações que proporcionem um caminho e atitudes de investigação em ambientes de aprendizagem, mais ainda, que possam romper a inércia mantenedora dos quadros de fracasso já citados, apresentando possibilidades de (re)pensar a Educação Matemática nas salas de aula, influenciando educadores de forma a transvalorizarem-se, sem ter a pretensão de esgotar o tema e muito menos estabelecer uma espécie de padrão, método ou forma que deva ser adotado em sala de aula, o que tiraria a liberdade de ação e criação de professores e alunos.

2.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Chaves (2004, p. 160-161), ao tratar de ambientes de aprendizagem típicos do ETM – “onde o aluno é colocado como um ser passivo às informações advindas do professor por meio de exposições homiléticas” – aponta que tal quadro não é exclusividade das sociedades modernas e pós-modernas. Arquitas⁷, “responsável pela continuidade da tradição pitagórica, pôs a Aritmética acima da Geometria” (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 4), faz uso de um expediente peculiar do ETM, ao tratar certo conteúdo com um grau de relevância maior em detrimento de outro. Esses mesmos elementos surgem nas concepções positivistas, onde a Matemática é entendida como uma ciência simples e abstrata, configurando-se então “como a gênese da taxonomia hierárquico-evolutiva das ciências, que em sua macro-estrutura de

⁷ Sábio grego (428 a 365 AEC) a quem foi atribuído o desenvolvimento do processo e algoritmo para extração de raiz quadrada (processo conhecido como algoritmo de Newton) mas, segundo Boyer (1978 [1974], p. 21), este processo já era conhecido pelos mesopotâmios (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 4).

construção teórica, sustenta-se em uma tríade reducionista que imobiliza as idéias em quadros e classificações que levam à idéia do saber acabado” (CHAVES, 2004, p. 104).

Todavia, tal obra relata que a relação de Arquitas com os números não se constituía da maneira esotérica tal como tratada por Pitágoras, ou de forma mística e religiosa, como fora para Filolau de Crotona⁸.

Arquitas parece ter dado considerável atenção ao papel da matemática no aprendizado, e foi-lhe atribuída a designação dos quatro ramos no *quadrivium* matemático – aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandeza em movimento). Esses temas, juntos com o *trivium* consistindo de gramática, retórica e dialética (que Aristóteles atribuía a Zeno), constituíram mais tarde as sete artes liberais, portanto o papel proeminente que a matemática desempenhou na educação se deve em não pequena medida a Arquitas (BOYER, 1978 [1974], p. 52).

Para romper com o caráter hegemônico proposto pelo paradigma do ETM – “pautado em verdades cristalizadas, que põem a ordem curricular acima do diálogo, da criatividade e da investigação como forma de aprendizagem”, portanto, não levando em consideração a Matemática da rua – Chaves e Rodrigues (2014a, p. 4) apontam que, no período pós Arquitas, vê-se “um apego às coisas estáticas onde a ideia de movimento foi gradativamente esquecida, tornando-a assim estática, descontextualizada”.

Pelo modelo usual de se ensinar Matemática, adotado pelo ETM, o professor é o emissor da enunciação e o aluno o receptor e por isso lembremo-nos que, quem produz significado a respeito do que foi enunciado é o receptor e não o emissor da enunciação; dessa forma ensinar não implica necessariamente aprender. Assim, entendemos que não adianta pensarmos em passar uma grande quantidade de conteúdos e conceitos se estes não forem bem assimilados, apreendidos. Logo, ao invés de quantidade, por que não nos preocupar com qualidade de informação (qualidade referente à aplicabilidade, à assimilação, à contextualização, à possibilidade de conexões com outras áreas do conhecimento) (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 6)?

Tomando tais questões, o referido texto convida-nos a rompermos com o ambiente hegemônico de “aulas centradas no professor, alunos passivos a ideias prontas, grades curriculares rígidas, extensas, lineares, descontextualizadas etc.” (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 6) com o propósito de testar outros ambientes de aprendizagem que propiciem ao aluno “o prazer de investigar para produzir novos saberes” (p. 6) e, com isso, outros significados, que não os que já produziam. Segundo a obra em curso, tais ambientes devem quebrar o caráter do *ergon* (grego) ou *opus* (latim) – vocábulos que se referem a trabalhos

⁸ Filósofo grego (± 470 a 385 AEC) que escreveu um livro em que expunha a doutrina pitagórica (que era reservada apenas aos discípulos). Foi o primeiro pensador a atribuir movimento à Terra propondo um sistema no qual a Terra girava em torno de um fogo central, que não era o Sol (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 4).

concluídos – para lançarmo-nos em processos e não em produtos (*ergon* e *opus*), pois os produtos fixam e tornam hegemônicos os meios de produção de conhecimento da Matemática escolar, bem como da Matemática acadêmica, inviabilizando a produção do que apresentamos anteriormente como sendo a Matemática da rua. Para tal, propõe

um processo de capacitação para o ensino de Matemática que toma como base um referencial teórico que se contrapõe ao dispositivo tático do ETM, o *paradigma do exercício* e seus dispositivos de controle. Esse processo é destinado àqueles que queiram romper com tal ambiente e buscam um ambiente investigativo a partir da História da Matemática e da Arte, bem como de instrumentos manipulativos que privilegiem a ação (a dinâmica) no lugar do produto (o *ergon* ou o *opus*). Nossa expectativa é que essa prática seja entendida como uma ferramenta pedagógica – de reflexão de nossas práticas docentes – que sirva como um elemento norteador na elaboração de planos e roteiros de atividades que coloquem o aluno como ator e coautor de um processo investigativo.

É relevante não perdemos de vista os motivos pelo qual tal dinâmica será apresentada. Convidamos-lhes a entendê-la como *um* – e não *o* – referencial; *um* subsídio à capacitação de professores de Matemática, de maneira que os mesmos possam trabalhar de forma integrada, participativa e colaborativa com demais professores de outras áreas do conhecimento no desenvolvimento de temas que sejam substanciais à formação do indivíduo, como ser reflexivo, sobretudo sobre suas próprias atitudes (CHAVES; RODRIGUES, 2014a, p. 10 – grifos do autor).

Dessa forma, o referido texto nos convida – em processos de formação de professores – a trabalharmos, com padrões – sobretudo, numéricos e geométricos – por entender ser “peculiar ao ser humano, bem como a outros animais – os corvos⁹, por exemplo – avaliar, analisar e comparar padrões, mas um padrão não é um olhar universal” (CHAVES; RODRIGUES, 2014b, p. 10). Com tal justificativa, a obra convida seus leitores a realizar o que denominou de “uma arqueologia a respeito de padrões tomados pela História da humanidade”.

A partir de tais questões, de ideias relativas ao MCS – de que: (i) “a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 113), (ii) a atividade algébrica, em sua gênese, também lida com questões quantitativas (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 113), (iii) “é essencial estabelecer, de forma clara, a distinção entre ‘genérico’ e ‘generalizado’ (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 114), (iv) uma “situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 114), enquanto uma “situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral, sem a intermediação dos casos particulares” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 114) – e em posição diametralmente oposta à

⁹ Dantzig (1970, apud: BRASIL, 2014, p. 7) afirma que alguns animais também possuem senso numérico, mesmo que rudimentares e restritos, como o caso específico do corvo que consegue identificar se são retirados dois ou mais ovos de seus ninhos.

proposta davydoviana de ascensão do abstrato ao concreto – portanto, partindo do concreto ao abstrato – propusemos um grupo de tarefas de ensino (com suas respectivas ações e operações), junto às oficinas e minicursos do Projeto Pitágoras, utilizando materiais concretos e manipulativos, técnicas de recorrência, princípios de contagem, uso de tabelas, considerando os MPS geométrico, aritmético, algébrico, bem como o trânsito entre eles, levanto em conta princípios propostos por Luria (2005 [1990]) de desenvolvimento e tarefas de:

- (i) **percepção** (nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas, respostas a ilusões visuais);
- (ii) **abstração e generalização** (comparação, discriminação e agrupamento de objetos, definição de conceitos);
- (iii) **dedução e inferência** (estabelecimento de conclusões lógicas a partir de informações dadas);
- (iv) **solução de problemas matemáticos** a partir de situações hipotéticas apresentadas oralmente;
- (v) **imaginação** (elaboração de perguntas ao experimentador);
- (vi) **auto-análise** (avaliação de suas próprias características) (OLIVEIRA, 1997, p. 90 – grifos do autor).

Nosso propósito não é divergir ou tentar provar que Vasily Vasilovich Davydov estava “errado” – e, portanto, nós que estamos “certos” – mas simplesmente analisar a dinâmica do processo de produção de significado a partir da nossa proposta de trabalho, nos moldes do MCS.

2.2 O PROJETO “PITÁGORAS: EM (E ALÉM DO) TEOREMA”

Pitágoras: em (e além) do teorema é um projeto de pesquisa, cadastrado junto à diretoria de pesquisa do Ifes, *campus* Vitória, PJ00004234, desde setembro de 2017, do Gepemem. É um projeto guarda-chuva que abarca três subgrupos de pesquisa que visa trabalhar na perspectiva indissociável de ensino-pesquisa-extensão, com formação de professores, assumindo as três frentes de trabalho [(i) demonstrações do teorema – históricas, clássicas e didáticas; (ii) Aritmética Pitagórica; (iii) História da Matemática] voltadas à produção de Materiais Didático-Pedagógicos (MDP), tomando como base ações diferenciais¹⁰ e levando em conta a

¹⁰ Ação que visa alcançar os objetivos estabelecidos em grupos de pesquisa-ação para produção de materiais didático-pedagógicos (MDP) ou que leve o grupo/indivíduo a desenvolver determinada tarefa ou a refletir a respeito de sua prática ou de um tema proposto. Tal ação é consequência de uma intervenção diferencial autorregulada. Na intervenção diferencial autorregulada (intervenção na realidade por diferenciação da ação esperada dos atores) o professor intervém, em sala de aula, a partir de sua margem natural de liberdade, permanecendo como juiz de suas próprias ações, pois produz modificações neste ambiente à medida que as discute com os demais professores (BALDINO; CARRERA DE SOUZA, 1997).

sistemática do conjunto de ações desenvolvidas pelo professor no ciclo de discussão em grupo sobre um problema:

A sistemática do conjunto de ações desenvolvidas pelo professor no ciclo de discussão em grupo sobre um problema ↔ planejamento de uma ação diferencial para atacar esse problema ↔ aplicação conjunta (professor + monitor/licenciando + aluno) da ação diferencial planejada ↔ discussão da ação realizada ↔ replanejamento (CHAVES, 2000, p. 201).

Os participantes desse projeto são dois professores da Educação Básica de escolas públicas da Grande Vitória, professores formadores, quatro do Ifes e um da Ufes (que trabalham em cursos de formação de professores, em nível de graduação e pós-graduação), oito licenciandos em Matemática e mestrandos em Educação Matemática, que se reúnem semanalmente para discutir as ações dos subgrupos (Demonstrações históricas do teorema de Pitágoras; Histórica da Matemática; Aritmética Pitagórica). Cada subgrupo possui uma reunião semanal, de aproximadamente duas horas de trabalho e há uma plenária semanal, aberta a todos os componentes do projeto e, a partir do tema de pesquisa, buscam desenvolver PEI. Esses atores, no projeto, foram categorizados como

(i.1) **professora(e)s-pesquisadora(e)s** – professora(e)s da Coordenadoria de Matemática (COMAT) e egressos do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes (Limat), *campus* Vitória, que atuam na Educação Básica, na Grande Vitória, mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) e que são membros do Gepemem. São os responsáveis pela execução do projeto, bem como pela orientação de licenciandos do Limat (monitores) participantes.

(i.2) **professora(e)s-pesquisadora(e)s** – professora(e)s de Matemática, egressos do Limat, *campus* Vitória, que atuam na Educação Básica, na Grande Vitória e que são membros do Gepemem e que auxiliaram na execução, planejamento, orientação de monitores e produção de MDP.

(ii) **monitora(e)s** – licencianda (o)s do Limat, *campus* Vitória, participantes do Gepemem que atuarão na produção da pesquisa e, por conseguinte, de MDP, bem como nas práticas de extensão, junto a professora(e)s e seus alunos, na aplicação de ações junto a escolas das redes públicas da Grande Vitória.

(iii) **extensionistas** – professora(e)s e licencianda(o)s do Ifes, bem como de outras instituições, que se inscreverem para participar de nossas oficinas, minicursos, seminários programados e PEI;

(iv) **aluna(o)s** – dos extensionistas ou professores-pesquisadores que, por ventura, participarem das práticas elaboradas, em suas aulas, junto com seu(ua) respectiva(o)s professora(e)s (CHAVES; ZOCOLOTTI, 2017, p. 16 – grifos do autor).

Pitágoras: em (e além do) teorema é a base de nossa pesquisa e tomaremos à frente (ii), de Aritmética Pitagórica, voltada à formação de professores, com o propósito de analisar a

produção de significados, dos atores, ao serem apresentados ao MDP produzido segundo a sistemática proposta. Com isso, nos propusemos a analisar que significados os atores produziram ao serem apresentados a esses MDP a partir da sistemática proposta.

No desenvolvimento dos trabalhos e nas dinâmicas estabelecidas, propusemos trabalhar a partir dos seguintes eixos: História da Matemática, com ênfase na vida e obra de Pitágoras; conteúdos matemáticos desenvolvidos por Pitágoras e seus seguidores, com ênfase nos números figurados, tríades pitagóricas, representações gnomônicas de números e o teorema com várias de suas representações; Produção de MDP relativo ao tema.

Os MDP produzidos servem de suporte às aulas de Matemática e possuem o propósito de motivarem alunos e professores nos processos de ensino e de aprendizagem, relativos ao tema.

Usamos os MDP produzidos, durante práticas de extensão, em oficinas, minicursos, bem como nas respectivas salas de aula dos envolvidos, tomando como modelo as ações diferenciais e a sistemática do conjunto de ações.

Ao trabalharmos indissociavelmente com a tríade ensino-pesquisa-extensão tomamos Chaves (2005; 2004) e Chaves, Vitória e Novais (2015), que apresentam como política pedagógica a proposta de implementação de PEI que não se restringe ao ambiente da sala de aula e que se constrói por meio de ambientes e cenários investigativos em que há o compromisso de estimular a curiosidade, a espontaneidade de pensamentos e de ações. Uma prática educativa é investigativa por agregar os indivíduos envolvidos no processo em torno da resolução de um problema local, construída a partir das dúvidas e das incertezas que surgem ao longo do processo.

No Gepemem adotamos uma dinâmica advinda de uma proposta político-educativa denominada PEI e os textos supracitados argumentam que o uso destas práticas não só possibilita a desestabilização da inércia mantenedora do ETM, mas também permite que se viabilize trabalhar no viés socioambiental. Para tal, é apresentado a relevância de se: (i) pensar o papel da Matemática escolar e da rua em nossas práticas letivas; (ii) repensar nossas práticas (ações docentes, no campo político-filosófico); (iii) produzir significados de como se processa uma PEI na aula de Matemática e quais as possíveis implicações no desenvolvimento das mesmas.

Para Chaves, Vitória e Novais (2015), o âmago das PEIs encontra-se em instrumentalizar o aluno para que ele possa agir e intervir em um problema local (agir localmente, mas pensando globalmente). Isso permite exaltar valores como a solidariedade e a liberdade, para que se possa produzir conhecimento a partir de (e para) um problema que leve à sistematização de princípios e ideias, de forma a colocar as ciências a serviço da coletividade. Dessa forma, ao agir para efetuar intervenções locais objetiva-se romper com formas de ensino que sejam excludentes e descontextualizadas, portanto, bancárias e meritocráticas, como apresentado em Freire (1987).

Entendemos por Prática Educativa Investigativa (PEI) aquela que não se restringe ao ambiente da sala de aula, que se constrói através de ambientes e cenários investigativos em que há o compromisso de estimular a curiosidade, a espontaneidade de pensamentos e de ações. Uma PEI por agregar os indivíduos envolvidos no processo em torno da resolução de um problema local, construída a partir das dúvidas e das incertezas que surgem ao longo do processo – na alternância (CHAVES, 2005, p. 128).

Em relação a uma PEI, Chaves (2005) apresenta sete princípios denominados de fundantes:

(1) O princípio da liberdade de expressão – pertinente ao professor; consiste em deixar que o aluno fale, que produza incertezas e que discuta o erro como forma de propiciar a construção de novos aprendizados. [...]

(2) O princípio da ordem natural (primeiro surge o problema e depois o instrumental para enfrentá-lo) – consiste em permitir que o conteúdo surja a partir da necessidade de se obter respostas à situação que se está investigando. [...]

(3) O princípio colaborativo – consiste em assinalar o tipo de interferência que o professor realiza nos grupos de trabalho. Sua participação é fundamental na organização do processo, o que não significa que ele deva centralizar informações, nem tampouco que deva passá-las aos alunos como algo pronto e acabado, desta forma, superamos a clássica relação do aluno passivo (ouvinte) e do professor ativo (dono da palavra, detentor de conhecimentos imutáveis). [...]

(4) O princípio da integração – consiste em facultar que ocorra uma discussão conjunta com diversas áreas do conhecimento, não se tratando mais de um trabalho exclusivo de certa área do conhecimento: Não é, por exemplo, a Matemática que está no centro do processo, mas a possibilidade de desestabilizar uma inércia, intervindo localmente. Também faz parte do princípio da integração a organização do espaço, bem como o desenvolvimento de quaisquer tarefas, laboriosas ou não; tarefas estas que são assumidas pelos alunos e orientadas pelos professores. Assim, o professor de Matemática pode experimentar algo novo, deixando aflorar o seu papel também de educador e não somente o de matemático. Com a integração, o foco central não é a Matemática, mas a busca da resolução de um problema presente, em que a Matemática é uma das ferramentas no processo. [...]

(5) O princípio da intervenção – é estratégico, consiste em implementar uma PEI voltada para situações locais que envolvam o aluno e o seu habitat (escola, comunidade, família etc.), de tal forma que ele possa utilizar a Matemática como uma ferramenta, um conjunto de técnicas que o possibilite produzir conhecimento que lhe permita intervir nestas situações locais, com o propósito de operar possíveis transformações nos quadros sócio ambientais apresentados. [...]

(6) O princípio do dispositivo tático – consiste em desenvolver a produção de conflitos, incertezas e confrontos que propiciem a produção de conhecimento para se contrapor às verdades impostas pela produção de conhecimentos que minimizam, ocultam ou mascaram os problemas típicos das questões socioambientais existentes (aqueles propagados pelo ETM) [...] por isso, em uma PEI, se fala em produção de conhecimento, exaltamos a produção de uma obra (o processo de realização do trabalho) e não o trabalho realizado, pronto e acabado. [...]

(7) O princípio da liberdade enquanto fim – como expressão genuína da criatividade e de espontaneidade dos indivíduos no processo de aprendizagem dos conhecimentos tem grande relevância em uma PEI. A liberdade, somada à criatividade e à espontaneidade [...] permite que aflore a dinâmica de auto-organização e de auto responsabilização no processo de aprendizagem dos múltiplos saberes, e estas são pilares que orientam o comportamento dos envolvidos em uma PEI no sentido de aprendizados integrados, opondo-se à fragmentação curricular e também ao enrijecimento de programas e currículos (CHAVES, 2005, p. 127-130).

No Projeto Pitágoras, bem como na dinâmica de funcionamento do Gepemem, adotamos esses sete princípios e ainda tomamos como postulado as seguintes premissas:

(P₁) – No que se refere aos processos de formação de professores (inicial – pré-serviço – e continuada – em serviço) é indispensável que se trabalhe indissociavelmente a partir da tríade ensino, pesquisa e extensão para nos contrapormos ao ETM.

(P₂) – Que se tome como referência, modelo e código as concepções de Patrick Geddes de que “um aluno em contato com a realidade do seu ambiente desenvolve atitudes criativas em relação ao mesmo, cabendo aos professores desempenhar o papel de interlocutores de uma educação que incorpore uma análise da realidade socioambiental opondo-se àquela em que o aluno é levado a ignorar as consequências dos seus atos”.

(P₃) – Frente a diferentes realidades, distintos saberes de natureza matemática são produzidos.

(P₄) – A intervenção sociocultural de uma ação pedagógica não vinculada à realidade dos alunos possibilita um enfraquecimento da identidade cultural desses alunos e a torna frágil (a identidade) no que se refere à manutenção de seus valores.

(P₅) – Quem produz significado não é o autor, mas o leitor da enunciação que se constitui como texto e, portanto, a produção de significado se dá sempre no interior de atividades.

(P₆) – As formas como se produz conhecimento são dependentes de diversas variáveis que compõem as dinâmicas de uma cultura, logo, não há como pensar em produção única que seja válida em todos os contextos a todos os indivíduos.

(P₇) – A Educação Matemática que defendemos produz legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua (ato político, ato pedagógico).

(P₈) – O desenvolvimento intelectual se origina na interiorização de formas produzidas socialmente (CHAVES, 2015, p. 7-8).

A partir de tais premissas, as PEI:

(1) são planejadas por grupos de professores-pesquisadores), nos moldes de uma ação diferencial (BALDINO; CARRERA DE SOUZA, 1997);

(2) desenvolvem-se a partir de uma dinâmica denominada sistemática do conjunto de ações (CHAVES, 2000, p. 201);

(3) levam em consideração que, no que se refere aos conteúdos programáticos:

Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória (BRASIL, 1998, p. 49 – grifos do autor).

(4) a respeito da dinâmica de trabalho de um conteúdo, leva em consideração que:

(i) se pense o papel da Matemática nas nossas práticas letivas;

(ii) repense nossas práticas (ações docentes, no campo político-filosófico);

(iii) se venha a conhecer o que é e como se processa uma PEI na aula de Matemática e quais as implicações no desenvolvimento dessas práticas.

As práticas de ensino-pesquisa-extensão, desenvolvidas a partir do Projeto Pitágoras, são produzidas a partir de atividades propriamente ditas, ações e operações (níveis de funcionamento da atividade humana, segundo Leontiev).

O conceito de atividade, adotado no Projeto, é o proposto por Leontiev em sua teoria da atividade, voltada a um domínio coletivo, desenvolvida a partir dos postulados básicos de Vygotsky – onde se entende que todo conhecimento¹¹ é produto social e, portanto, resultado das interações humanas. Logo, entendemos que atividade é processo e atividade humana é forma de relação do homem com o mundo, construída historicamente, mediada por instrumentos, dirigida por motivos, fins a serem alcançados, é orientada por objetivos, visto que o homem age intencionalmente, a partir de ações planejadas. Entendemos como ação o processo em que o objeto e o motivo não coincidem, mas que faz parte da atividade. Ela é, ao

¹¹ Entendemos conhecimento como uma crença-afirmação associada a uma justificação que nos permite produzir aquela enunciação. Ele é do domínio da enunciação e há sempre um sujeito do conhecimento (cognitivo e não biológico), que não é do conhecer (LINS, 2012, 1999). Pelo mesmo referencial entendemos “enunciação como o ato de enunciar algo a algum interlocutor e, discurso, como uma enunciação ou um enunciado (resíduos de uma enunciação). Ambos utilizam, constantemente, um processo de inferência lógica dedutiva por meio da linguagem” (SAD, 1999, p. 123 – grifos do autor).

mesmo tempo, estimulada pelo motivo e direcionada para o objetivo. “Visivelmente a ação só é possível no seio de um processo coletivo agindo sobre a natureza” (LEONTIEV, 1984, p. 69). Já operação constitui-se como o terceiro nível da atividade humana, que se refere aos modos de execução de uma tarefa e se configura como aspecto operacional de uma ação (SILVA, 2003, p. 33).

Já os respectivos entendimentos de atividade de ensino, de experimentação e de tarefa de ensino, são oriundos da Psicologia pedagógica de Vasily Vasilovich Davydov.

No Gepemem, e, portanto, no Projeto Pitágoras, toma-se como solo epistemológico o MCS, que entende a produção de significado como “o aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda a cognição humana” (LINS, 1999, p. 86). Cabe destacar que, no MCS, significado

é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 145-146).

Ao adotarmos o MCS, objetivamos analisar a produção de significado, tanto didático, quanto matemático, a respeito das propostas de utilização dos MDP apresentados aos atores do processo.

O trabalho com o projeto Pitágoras iniciou-se em setembro de 2017 e, até o presente momento, desenvolvemos: três oficinas/minicursos para professores (formações inicial e continuada), três mostras/feiras com enfoque na produção de MDP recicláveis advindos de processos de coleta seletiva; uma prática de ensino na disciplina de Geometria Axiomática do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes, *campus* Vitória; um artigo científico sobre números figurados; um projeto de extensão (SOMAR) junto a EEEFM Almirante Barroso em Vitória – ES.

A previsão de continuidade do projeto é até dezembro de 2019, onde reavaliaremos os seus rumos.

O referencial teórico adotado tem sido fundamental ao desenvolvimento e à dinâmica do Gepemem e à proposta do projeto. O trabalho interativo e cooperativo envolvendo alunos da Educação Básica e professores (em formação e já em exercício e formadores), nos moldes de PEI e de ações diferenciais leva-nos ao encontro das premissas (P₁) a (P₈).

A partir do MCS, observamos o envolvimento de alunos e professores com as práticas e projetos, apresentando desde já um diferencial no que se refere à motivação dos mesmos e à redução dos índices de evasão na escola onde construímos parceria.

Não nos preocupamos com “pirotecnia”, mas com a produção coletiva de MDP a partir das premissas balizadoras [(P₁) a (P₈)], de forma a desenvolvermos PEI que sejam construídas a muitas mãos, pois, “Na universidade se produz o saber, mas é no chão da escola que se prova o sabor, ou, como os licenciandos se acostumaram a dizer, a universidade ‘dá’ o saber, mas a escola ‘dá’ o sabor” (CHAVES, 2017, p. 1).

2.3 O GEPEMEM

O Gepemem foi criado nos idos de 2008, quando do início do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes, *campus* Vitória (Limat), que na época ainda configurava como Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo (Cefetes). O intuito era agregar os professores da Coordenadoria de Matemática (Comat) que não desenvolviam pesquisas e, portanto, não estavam envolvidos com os grupos de pesquisas existentes nessa coordenadoria. Em 2010, o grupo foi cadastrado junto ao diretório de grupos de pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) com o nome de Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática.

Desde sua gênese, o Gepemem adota a metodologia do processo da produção de significado, para análise de seus trabalhos, mantendo como lastro epistemológico o MCS, dedicando-se ao desenvolvimento de pesquisas em programas de iniciação científica (Pibic), com o projeto guarda-chuva denominado de Ferramentas midiáticas e ambientes investigativos de aprendizagem em aulas de Matemática, com desdobramentos em 5 subprojetos a saber: (i) utilização de mídias e ambientes interativos em aulas de Variáveis Complexas; (ii) utilização de mídias e ambientes interativos em aulas de Cálculo Diferencial e Integral; (iii) utilização de mídias e ambientes interativos em aulas de História da Matemática; (iv) utilização de mídias e ambientes interativos em aulas de Matemáticas Aplicadas à Ecologia e à Engenharia Ambiental; (v) utilização de mídias e ambientes interativos em aulas de Álgebra Linear. Participaram dessa etapa professores da Comat (Rodolfo Chaves, Celso Soprani, Lourenço

Gonçalves Junior, Fernanda Capucho Cezana, Maria Clara Caliman e Geraldo Cláudio Broetto) e discentes dos cursos superiores de Engenharia Sanitária e Ambiental (Jamily Faé Stocco), Engenharia Elétrica (Gustavo Passamani Corteletti, Kim Castro Lemos Filho, Larissa Mota de Souza e Priscila Prezotti de Medeiros Marins) e Licenciatura em Matemática (Isaías Amorim, Roberta Meschese e Victor Alberti).

Em 2017, com o desenlace do professor Romulo Campos Lins, o líder do Gepemem, que fora orientando do professor Romulo em seu doutorado, convida a Prof^a Dr^a Ligia Arantes Sad, também ex-orientanda de doutorado do professor Romulo – para atuar como vice-líder do grupo e, a partir de então, ambos optam por assumir o MCS não apenas como uma estratégia de análise de suas investigações, mas como solo epistêmico de suas pesquisas, assumindo que tal escolha fora de base histórica, cultural e ideológica e então, passou a adotar o nome de Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), bem como as 8 premissas [(P₁) a (P₈)], já apresentadas, como princípios ou proposições lógicas de um argumento cuja conclusão nos conduz ao desenvolvimento de PEI, como ação política, que possibilita pôr em prática a tríade de uma Educação Matemática praticável, segundo o MCS:

1. explicitar, na escola, os modos de produção de significado da rua;
2. produzir legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua (ato político, ato pedagógico);
3. propor novos¹² modos de produção de significado, que se juntam aos da rua, ao invés de substituí-los (LINS, 1999, p. 92).

O que é realmente relevante é que tradicionalmente a escola negou os significados da rua, e se esforçou em tentar implementar o domínio dos significados da escola; no caso da Matemática, os significados matemáticos (oficiais), e aqui voltamos outra vez à importância de examinarmos pressupostos (LINS, 1999, p. 90).

O Gepemem trabalha a partir da tríade indissociável de ensino-pesquisa-extensão, no momento, com o desenvolvimento do Projeto Pitágoras: em (e além do) teorema, envolvendo professores do Educimat (Ligia Arantes Sad e Rodolfo Chaves), mestrandos do Educimat (Aline da Silva Vaz, Ana Paula Azevedo Moura, Larissa Toniato, Solange Taranto de Reis,

¹² No MCS, para realizarmos análises dos resíduos de enunciação dos atores do processo, adotamos o método de análise de produção de significados com vistas a realizar leituras positivas da produção de significado dos envolvidos. Neste processo, três grandes categorias interagem – o novo, a justificação e o dado – e estão presentes na produção de conhecimento. Lins e Giménez (1997) destacam que, em um “conhecimento produzido, a crença-afirmação corresponde ao que é novo, ao passo que a justificação corresponde ao que é dado” (p. 144 – grifos do autor). “A justificação é o que garante – para o sujeito do conhecimento – que ele pode enunciar aquela crença-afirmação” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 142 – grifos do autor).

Stevão Carneiro de Sousa, Thays Xavier de Araujo, Tiago Magno de Souza Dutra e Veronica Borsonelli Marcarini), professores da COMAT (Alexandre Krüger Zocolotti, Lourenço Gonçalves Junior, Douglas Araújo Victor e Deborah Pereira Domingues), professores das redes públicas de ensino da região metropolitana de Vitória (Bea Karla Flores Machado Teixeira, Caio Lopes Rodrigues, Gilson Abdala Prata Filho, Mariana dos Santos Cezar, Luanda Carvalho da Silva Nascimento e Weverton Augusto da Vitória) e licenciandos em Matemática do Ifes, *campus* Vitória (Bruna Moll Fernandes, Davi Magalhães Vieira, Erika Isabel Flores, Esthefany Rabello Macedo, Filyppe Neves de Andrade, Ian Neto Bonfim, Lucas dos Santos Reis, Lucca Jevaux Oliveira Bonatto e Lucia dos Santos Bezerra de Faria).

Além de participar de eventos científicos como Encontros, Colóquios, Congressos, o Gepemem desenvolve trabalhos em escolas das redes públicas de Vitória e região, dá apoio ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) e ao Programa de Residência Pedagógica, do Ifes, *campus* Vitória, com a produção de MDP e práticas envolvendo estes materiais.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Do mesmo modo que proponho uma educação matemática que não seja preparação para a vida, e sim vida, proponho uma reflexão que não seja preparação para a ação, e sim ação (LINS, 1999, p. 94).

Ao discutir, refletir e repensar possíveis transformações do ensino da Matemática, em específico se tratando do ensino da Aritmética e da Álgebra, Lins e Giménez (1997) vão de encontro à forma tradicional de como a Aritmética e a Álgebra é trabalhada na Educação Básica. Como apontado no texto em questão, a Álgebra escolar tem sido vista como uma generalização da Aritmética e também posta como abstrata, enquanto a Aritmética vem sendo tratada como concreta no Ensino Básico. Uma questão que entendemos ser fundamental é discutir, tanto nas escolas como na academia, como essa visão é inadequada em alguns casos e, algumas vezes, errada em outros.

A BNCC (BRASIL, 2018), em consonância com o que fora sugerido em Lins e Giménez (1997), aponta a possibilidade de se considerar a Álgebra e a Aritmética como duas faces de uma mesma prática, sugerindo-se que as mesmas sejam ensinadas concomitantemente desde os anos iniciais na educação escolar.

Tradicionalmente, a álgebra escolar é vista como uma generalização da aritmética. Mais ainda, esta é vista como concreta (e, portanto, mais fácil), e aquela como abstrata (e, portanto, mais difícil) [...] buscamos mostrar que essa visão é inadequada em alguns aspectos, e errada em outros. Considerando a álgebra e a aritmética como duas faces da mesma atividade – lidar com relações quantitativas –, exploramos a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra, e de que modo isso sugere mudanças na educação matemática escolar. Propomos “desenvolvimento de um senso numérico” em vez de “aprendizagem aritmética”, e também “produção de significados para a álgebra” em vez de “aprendizagem da álgebra” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, posfácio, grifos do autor).

Essa discussão se desenvolve no âmbito do processo de produção de significado e a proposta é iniciar mais cedo o trabalho com a Álgebra junto com a Aritmética, de modo que se desenvolvam concomitantemente, e de forma que uma implica no desenvolvimento da outra. A Aritmética trabalha com as operações numéricas de adição, subtração, multiplicação, divisão e suas diversas aplicações, reconhecendo que tais aplicações são diferentes no cotidiano dos alunos. O texto em análise estabelece a existência e diferenças da Aritmética da rua e da escola e, principalmente, pelo fato de que uma tende a não reconhecer a “eficácia” da outra, ou mesmo não dar legitimidade. Dessa forma, o texto de Lins e Giménez (1997) sugere

que uma nova proposta para a Educação Matemática gira em torno de reconhecer essas duas Aritméticas como legítimas – a da rua e a da escola – entendendo que ambas fazem parte de dois contextos diferentes da vida dos alunos e essas duas Aritméticas detêm seus próprios modos legítimos de produção de significado, que não se podem anular uma em prol da outra, com o risco de estreitar a visão dos alunos e prejudicar sua formação. No enfrentamento dessa dicotomia do conhecimento aritmético temos a seguinte posição, apoiada no referencial teórico em questão:

A alternativa que vamos defender é que o papel da escola é participar da análise e da tematização dos significados da matemática da rua – no caso particular da Educação Matemática-, e do desenvolvimento de novos significados, possivelmente matemáticos, que irão coexistir com os significados não-matemáticos, em vez de tentar substituí-los (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 18).

Para atacar a dicotomia existente entre os MPS, postos pela escola e pela rua, de maneira a legitimar os da rua em relação aos da escola, Chaves (2004) propõe “anarquizar o ETM intervindo em questões socioambientais” e, para tal, apresenta aspectos epistemológicos do que seria uma proposta de PEI (CHAVES, 2005, 2004).

Quanto à relação entre o ETM, seus dispositivos de controle e o fracasso do ensino da Matemática, Chaves (2004, p. 78-80) aponta que uma das formas de se propagar ideologias – dentre elas a de uma Matemática escolar meritocrática, que é uma das responsáveis pelo fracasso do ensino nesta área – é por intermédio do discurso que, “dentre outras coisas, divulga verdades na tentativa de convencer o aluno de que as ordens curriculares¹³ estabelecidas e alicerçadas, normalmente em modelos que fomentam a erudição, lhes serão de grande serventia para um futuro ainda opaco” (CHAVES, 2004, p. 78).

Para alicerçar seus argumentos, o texto em questão recorre à ideia de que, “de acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício” (SKOVSMOSE, 2000, p. 1). E, ainda, lembra-nos que no paradigma do exercício

a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. [...] existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que

¹³ O ambiente de aprendizagem a que nos referimos, peculiar às práticas educativas expositivistas na aula de Matemática, identifica-se como um ambiente de aprendizagem pautado no ensino tradicional, apresentado através do discurso unilateral, do professor, com referências à Matemática e onde uma programação curricular rígida se põe à frente do processo (CHAVES, 2004, p. 79).

o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essa e muitas observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correta (SKOVSMOSE, 2000, p. 67-68).

No que se refere ao expositivismo exacerbado¹⁴, no mesmo texto, Chaves (2004), recorrendo a Nietzsche e suas conjecturas a respeito do instinto de rebanho, afirma que há uma dinâmica que mais se parece com uma homilia, onde o professor se põe como um pastor¹⁵ que conduz seu rebanho.

O problema identificado neste texto, com referência a Skovsmose (2000), é que uma das funções dessas práticas – que algumas vezes denomina de “homiléticas” e outras como panoptismo – é que estas funcionam como um dispositivo de controle com o propósito de “rejeitar, separar, rechaçar, enfraquecer e desvalorizar (técnicas de negação de um discurso) quaisquer tentativas de trânsito entre outros ambientes de aprendizagem” (CHAVES, 2004, p. 80).

Com o objetivo de atacar tais problemas, Chaves (2004) entende que é necessário ouvir o aluno para compreender o que ele diz e a partir de que referencial. Para tal, defende que um caminho possível para isso é adotar um posicionamento de forma a se fazer uma leitura plausível do estudante, no viés da dinâmica da produção de significado, proposta pelo MCS, discutida por Silva (2003) como caminho à produção do conhecimento. Tal postura, à luz do MCS implica em iniciar um processo de descentramento¹⁶ com vistas a romper com possíveis limites epistemológicos¹⁷ para produção de novos significados.

¹⁴ No paradigma do exercício, a aula expositiva ou expositivismo professoral é o principal dispositivo de controle daquilo que conhecemos como ensino tradicional de matemática (ETM), onde o conteúdo programático é o elemento central, principal e irrefutavelmente é colocado além do bem e do mal (CHAVES, 2004, p. 79).

¹⁵ “A aula expositiva, nos moldes do ETM, é o lugar-comum da pregação enunciativa do expositivista ou de práticas educativas expositivistas; uma aula onde o professor – ser falante – ocupa grande parte do tempo envolvido com a exposição, e, o aluno – ser ouvinte – aceita passivamente as verdades apresentadas” (CHAVES, 2004, p. 79).

¹⁶ Processo pelo qual você tenta mudar de lugar no mundo, mudar de interlocutor; isto é, “mudar o centro, é você sair de você como centro e tentar ir para o lugar onde o outro está como centro” (SANTOS; LINS, 2016, p. 337).

¹⁷ “[...] impossibilidade do sujeito produzir significado para o resíduo de enunciação numa certa direção devido à sua maneira de operar” (SILVA, 2012, p. 88).

3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS FIGURADOS

Qualidades abstratas como harmonia e a retidão, eram vistas também como números, desse modo, se chegou à teoria geral de que os números são as essências racionais de todas as coisas (POPPER, 1972, p. 106).

A partir de dois nomes, por volta do século XI – Antes da Era Cristã (AEC) – Tales e Pitágoras, a Matemática no mundo ocidental deixou de ser um exercício de aplicação de processos numéricos a problemas específicos na vida prática, para se tornar de fato uma ciência dedutiva e demonstrativa, como observa Boyer (1978 [1974]). Embora os primeiros passos nessa direção tenham sido dados por Tales, foi com os pitagóricos que tal desenvolvimento ocorreu de fato.

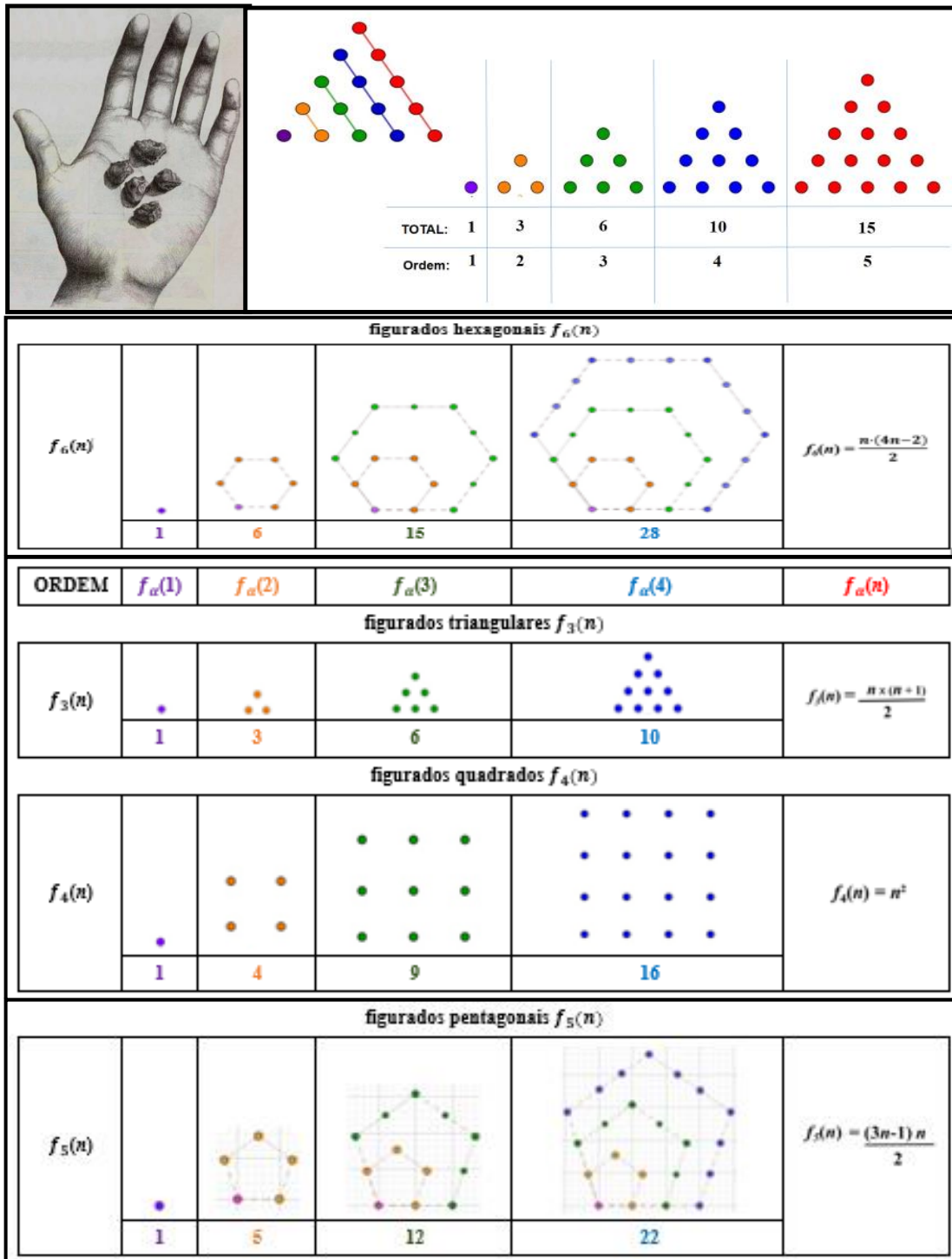
Os pitagóricos constituíam-se como uma fraternidade religiosa e mística, uma escola iniciática onde os neófitos dividiam-se em esotéricos e exotéricos e, nessa fraternidade, atribuía-se toda existência como originada e mantida a partir dos números. Foram responsáveis por terem criado a definição dos números pares e ímpares, bem como teoremas envolvendo esses números.

O estudo dos números para eles era dividido em dois segmentos, um totalmente separado das exigências da vida prática, a partir de um foco teórico, e outro para os cálculos práticos usados no dia a dia. Ao estudo teórico dos números chamavam Aritmética, e aos estudos para o uso dos números na vida prática chamavam Logística. A Aritmética dos pitagóricos é tida como a gênese do que hoje chamamos Teoria dos Números. Assim, eles denominaram diversos números, de acordo como os julgavam dado os atributos observados. Diversos foram os tipos de números trabalhados e denominados pelos pitagóricos: números amigáveis, perfeitos, imperfeitos, abundantes, figurados e vários outros. No entanto, voltaremos nossa atenção aos figurados, números denominados assim devido à forma geométrica (números triangulares (figura 1), quadrados, pentagonais, hexagonais, heptagonais etc.), como eram dispostos, utilizando-se seixos (*psephoi* – *ψηφοι*) (figura 1), ou marcas no chão (“uso de pedrinhas ou marcas de pontos na areia” (DOMINGUES, 2017, p. 28)).

Todos os números, ou seres, teriam evoluído a partir do Um. Os números divididos em tipos associados a diferentes tipos de coisas. Para cada tipo, havia um primeiro, ou menor número, considerando sua “raiz”. As relações entre os números não representavam, portanto, uma cadeia linear na qual todas as relações internas eram semelhantes. Cada arranjo designava uma ordem distinta, com ligações próprias. Daí

o papel dos números figurados na matemática pitagórica. Esses números eram, de fato, figuras formadas por pontos, como as que encontramos em um dado. Não é uma cifra, como 3, que serve de representação pictórica para um número, mas a delimitação de uma área constituída de pontos, como uma constelação (ROQUE, 2014 [2012], p. 105).

Figura 1 – Formação de uma sequência de números triangulares com seixos e números figurados poligonais



Fonte: Bonatto, Chaves, Zocolotti e Dutra (2019)

A matemática atribuída a Pitágoras é a aritmética de pontinhos [...] não é lícito dizer que o conceito pitagórico de número fosse abstrato. De certo ponto de vista, dado seu caráter espacial e concreto, poderíamos afirmar que os números pitagóricos não eram objetos matemáticos que conhecemos hoje, isto é, entes abstratos. Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não eram matemáticos e que remetiam a elementos discretos: pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração (ROQUE, 2014 [2012], p. 103-104).

Tais números exercem uma forte influência na Geometria, inclusive como base para validação (demonstração) de resultados.

Para os Pitagóricos todo o universo e a respectiva harmonia se podia reduzir em números; é portanto natural que os estudassem ao pormenor. Eles utilizavam muitas vezes representações figurada dos números, dispondo pequenas pedras de formas diferentes, geralmente em figuras geométricas. Isto permitiu-lhes várias descobertas sobre certas propriedades dos números, conseguindo outros, a partir dos anteriores, aplicando a regra que tinha a sequência com que estavam trabalhando (MARQUES, 2011, p. 106, grifos do autor, *ipsis litteris*).

Os números figurados, por representarem formas geométricas, ganharam bastante destaque entre os pitagóricos.

Os Pitagóricos viam Matemática em tudo, desde a observação de uma pedra até um animal, num misto de ciência e misticismo [...] Acreditavam que nos números havia espírito e constantemente diziam: “Tudo é número”, “Deus conta”. Os Pitagóricos tiveram grande influência no misticismo dos números [...] Além do aspecto místico, Pitágoras levantou outras relações entre os números [...] Há muitas indicações de que naquela época os números eram representados por pontos, o que possibilitou uma primeira relação entre a teoria numérica e a intuição geométrica (CYRINO, 1986, p. 39-43, grifos do autor).

E não é uma coincidência essa característica da cultura da Matemática grega, de relacionar a Geometria com a Aritmética nos números figurados, tanto que em Lins e Giménez (1997, p. 36) é observado como a Aritmética e a Geometria se inter-relacionam e a defesa de tal observação é justificada da seguinte maneira:

O ensino da aritmética tem se preocupado demasiadamente em transmitir velhas histórias sem atualizá-las. Tal é o caso da grande influência de questões de divisibilidade elementar, os quadrados mágicos e as ternas pitagóricas. Tudo isso fez com que se esquecesse de um aspecto importante, que é indicar a origem dos problemas que deram lugar a esses conhecimentos aritméticos: cálculo de cereais, observações zodiacais, terrenos. [...] A aritmética e a geometria se inter-relacionam claramente, e isso não é posto de manifesto. Assim, apresentam-se regras aritméticas teóricas sem suas imagens geométricas (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 35-36).

Vale recordar que, a Aritmética, junto com a Música, a Geometria e a Astronomia, eram matérias formativas das Artes Liberais, do programa educacional da escola pitagórica. Durante a Idade Média, esse mesmo conjunto ficou conhecido como *quadrivium* que acrescido do *trivium* (Gramática, Lógica e Retórica) passou a formar as sete Artes Liberais

consideradas como bagagem cultural fundamental às pessoas educadas. Eves (2008 [2004], p. 97) aponta que, segundo a Filosofia pitagórica, os números inteiros são “causa última das várias características do homem e da matéria” e, por assim ser, o pitagorismo dedicou-se à exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da Aritmética, dentre outras matérias das Artes Liberais básicas do programa pitagórico de estudo, como já admitimos anteriormente. Entre essas quatro “artes” do *quadrivium* havia uma relação. Por exemplo, vimos em Tahan (1967a [1959]), Boyer (1978 [1974]) e Eves (2008 [2004]) que entre Geometria (arte das formas estáticas) e Astronomia (arte das formas em movimento) havia uma relação da mesma forma que entre Aritmética (arte dos números estáticos) e Música (arte dos números em movimento), pois, para os gregos, a dicotomia entre o dinâmico e o estático era objeto de análise e reflexão.

Os pitagóricos dividiam os assuntos matemáticos em quatro seções: os números absolutos ou a Aritmética; os números aplicados ou a Música; as grandezas no estado de repouso ou a Geometria, as grandezas em movimento ou a Astronomia. Êsse “quadrivium” foi durante muito tempo considerado como constituindo um curso mínimo para uma instrução liberal¹⁸ (TAHAN, 1967a [1959], p. 78-79, grifos do autor, *ipsis litteris*).

Em todas as sequências de números figurados, o primeiro termo de cada uma delas é sempre o 1 – “Todos os números, ou seres, teriam evoluído a partir do Um” (ROQUE, 2014 [2012, p. 105) –, pois para os pitagóricos ele é o princípio criador, a mônada, que para os gregos é o uno, um princípio gerador (“O número 1 era considerado o gerador de todos os outros números” (MARQUES, 2011, p. 106); “O número um é o gerador dos números, o princípio criador, o número da razão” (CYRINO, 1986, p. 40)).

Pitágoras considerava o número como essência e princípio de tôdas as coisas e ensinava a seus discípulos que a realidade ao mesmo tempo fundamental e suprema é Um; o ser que é um é Deus; dêsse número, que é Um, derivam todos os outros números que são o próprio fundamento dos sêres, a sua razão íntima, a sua essência; nós somos números mais ou menos perfeitos; cada coisa criada é um número mais ou menos perfeito. Demais, o mundo, assim regido por combinações de números, existiu sempre, existirá sempre. Simplesmente, desenvolve-se, segundo uma série numérica cuja chave não possuímos mas que podemos presumir (TAHAN, 1967b [1959], p. 180, *ipsis litteris*).

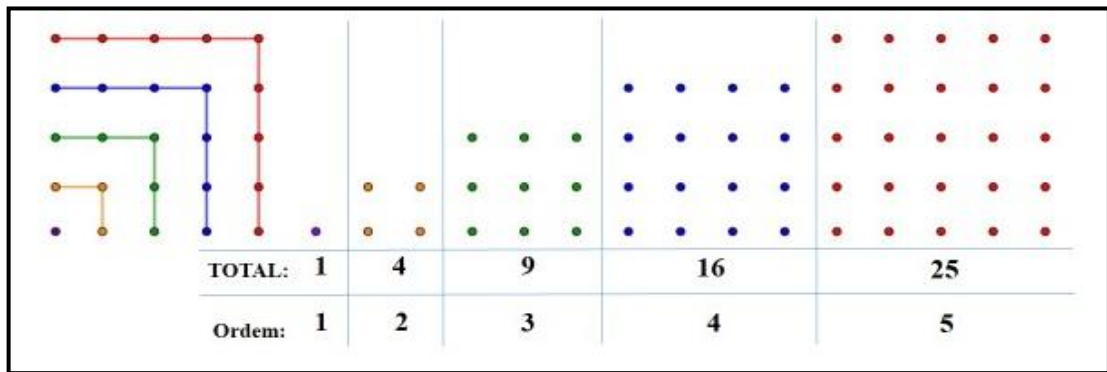
Via de regra, a primeira sequência de números figurados que se apresenta é a de números triangulares, basicamente construída de maneira que se visualizasse um triângulo nos seixos

¹⁸ Cf. BALL, H. Acrescenta F. A. Vasconcellos: “A Pitágoras deve-se também o conceito geométrico de espaço, como ente contínuo, ilimitado, o estudo e construção dos poliedros regulares e dos polígonos. Além disso, pelo estudo das propriedades das figuras, traduzindo-se por meio das relações entre números em relação com a Geometria, chegou à noção de número irracional e às grandezas incomensuráveis” (VASCONCELLOS, H., 158) (Nota do autor).

ou nos pontos desenhados ao chão (figura 1). O número mínimo de pontos que se pode formar um número triangular, considerando a forma, é 3, então, a partir de três pontos é possível formar diversos outros números triangulares. Dessa forma, temos outros exemplares de números triangulares como o 6, 10, 15 e muitos além.

Os números quadrados naturalmente são os que possuem a forma de um quadrado. Da mesma maneira que se pode notar nos triangulares, os números quadrados são compostos de no mínimo quatro pontos, e a partir do quatro pode-se formar uma infinidade de outros números quadrados (figura 2).

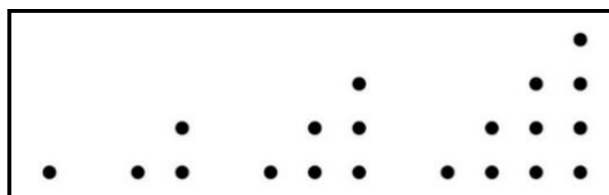
Figura 2 – Formação de uma sequência de números quadrados



Fonte: Chaves et al. (2018)

Lins e Giménez (1997) nos lembram que nos dias de hoje, com o processo de comunicação centrado, sobretudo, no apelo visual, objetiva além de maiores atrativos, causar maior impacto, mas também porque é comprovado que raciocinamos melhor a partir de imagens visuais, “por isso, as configurações pontuais de números (ou seja, desenhar cinco pontos para indicar 5, um retângulo de 2 x 3 pontos para indicar 6 etc.) adquirem valor” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 64). Ao ser abordada tal questão, como exemplo de uma situação que envolva o visual numérico, esta obra nos lembra dos números poligonais ou figurados:

O caso mais conhecido é o dos números triangulares (1, 1+2, 1+2+3, ...) associados ao jovem Gauss, de quem se diz, com 11 anos, soube calcular o triângulo de 100 linhas; abaixo, apresentamos as configurações visuais para os primeiros números triangulares.



Os estudantes adotam diversas resoluções na visualização correspondente. Assim, estabelece-se um primeiro grau de generalização, que é encontrar a regra de formação e contagem dos números triangulares (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 64).

A respeito, discutiremos quando abordarmos as dinâmicas adotadas nos planejamentos de nossas ações e práticas para o desenvolvimento das oficinas que ministramos e que algumas se configuraram como cenário de nossa pesquisa.

Seguindo o mesmo princípio, como já foi mostrado, é possível se formar números poligonais, ou figurados, de qualquer ordem – pentagonais, hexagonais etc. – assim como se pode estabelecer uma relação entre todos os números figurados. Os quadrados são a soma de dois números triangulares, sendo um de mesma ordem e outro de uma ordem imediatamente inferior; os pentagonais podem ser formados com um número quadrado e outro triangular de ordem inferior. Essa possibilidade de se relacionar geométrica, aritmética e algebricamente aponta à lógica das operações que sustenta os números figurados. Boyer (1978 [1974], p. 40) acrescenta que esse processo, o de formar números figurados, se estende facilmente ao espaço tridimensional, em que os números figurados se tornam poliedrais. Os pitagóricos foram extremamente inventivos em seus trabalhos com os números que, para eles, eram a medida de todas as coisas. Esse vasto trabalho, hoje, nos leva a muitos estudos a respeito, e quanto mais a pesquisa se aprofunda e alarga, vemos a impossibilidade de esgotar o tema.

3.2 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MCS)

As primeiras ideias do MCS são de 1986 (e 1987) e foram idealizadas pelo Prof. Dr. Romulo Campos Lins (*in memoriam*), vislumbrando a possibilidade de ir além da relação dicotômica de “acertar” ou “errar”. Sua motivação era obter respostas sobre o que os alunos estavam pensando quando “erravam”, mas sem recorrer à ideia do erro. Esses alunos estavam pensando em alguma coisa e o objetivo do autor era tratar essas outras coisas que os alunos estavam pensando do mesmo modo (com o mesmo referencial teórico) que as coisas certas.

Romulo Campos Lins objetiva “dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando ‘erravam’, mas sem recorrer a esta ideia de erro” (LINS, 2012, p. 11), para que os mesmos passassem a questionar suas próprias respostas, produzindo significados (CHAVES et al., 2017, p. 168 – grifos do autor).

Com base nas leituras que realizamos até então, segundo o MCS, produção de significado “é o aspecto central de toda aprendizagem” (LINS, 1999, p. 86) e ainda, “um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)” (LINS, 2012, p. 12).

Complementando essa afirmação, Silva (2003) esclarece que a crença, a afirmação e a justificação são os pontos base para o conhecimento e o que possibilita que o indivíduo acredite naquilo que está afirmando, é a crença na sua justificação. Silva (2003) também destaca que não é suficiente que a pessoa acredite e afirme, ela deve justificar aquilo em que acredita e afirmar para que a produção de conhecimento ocorra. Dessa forma, a justificação não tem a função de explicar a crença-afirmação, mas sim de tornar a enunciação legítima, o que faz com que as justificações tenham um papel central na produção do conhecimento do indivíduo. Um conhecimento não é mais nem menos que isso, afirma Lins (2012), o que constitui um conhecimento são esses três elementos, a crença, a afirmação e a justificação, o que diferencia o MCS de outras teorizações a respeito do conhecimento.

Ainda a respeito da produção de significado, Lins (2012) destaca que esta acontece a partir de uma enunciação e essa enunciação pode ser um texto, uma fala, um discurso, ou qualquer ação de comunicação, que essa obra denomina de texto, colocando a enunciação de forma genérica.

Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor (LINS, 2012, p. 14).

Campo semântico (CS), na definição de Lins (2012), é um processo que, quando colocado em marcha, cria condições para sua própria transformação, como um jogo no qual as regras (se existem) mudam o tempo todo e também podem ser diferentes para os vários jogadores dentro de limites que só se sabem *a posteriori*; enquanto a interação continua as pessoas estão operando no mesmo campo semântico. No MCS, a definição que se dá a campo semântico é “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012, p. 17).

Sendo um processo, como afirmado em Lins (2012), no MCS, admite que se fale de dinâmicas desse processo: nucleação, silêncio, impermeabilização etc., definindo assim que

um campo semântico é um modo legítimo de produção de significado, onde essa legitimidade se dá pelo fato de estar em acontecimento. Por isso, é no interior de campos semânticos que se produz conhecimento, significados e se pode identificar que objetos são constituídos. O campo semântico então, articula, do ponto de vista da teorização, “produção de conhecimento”, “significado”, “produção de significado” e “objeto” (LINS, 2012).

Em se tratando do ponto de vista da produção de conhecimento, o MCS toma como referencial o conceito de atividade apresentado por Leontiev na teoria da atividade, no caso da análise da atividade humana, utilizando-a como unidade de análise adequada. O interesse do MCS é no processo de produção de significado, produção de conhecimento, e em sua leitura, e não na permanência, mas esta pode ser teorizada, no modelo, como (apenas) uma foto datada de um processo (de produção de significado) (LINS, 2012).

Para Silva (2003), quando uma pessoa se propõe a produzir significados para um resíduo de enunciação, observamos, da perspectiva do MCS, o desencadeamento de processos de produção de significados – que envolve: (i) a constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos; (ii) a formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e sua lógica; (iii) a produção de conhecimento; (iv) os interlocutores; (v) as legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior da atividade considerada.

O novo, o que queremos entender, o movimento na produção de significados é o que chamamos de processo de produção de significados. Tal método é denominado por Silva (2003) de Método de Leitura Positiva¹⁹ (doravante Leitura Plausível), que tem como objetivo permitir um entendimento da produção de significados dos sujeitos humanos a partir da análise dos resíduos de suas ações enunciativas.

3.2.1 Pesquisas que envolvem análise de produção de significado

¹⁹ “A leitura positiva dirige-se a saber onde o outro (cognitivo) está, para que eu possa dizer ‘acho que sei como você está pensando, e eu estou pensando de uma forma diferente’ [...] a leitura positiva tem por objetivo, por assim dizer, mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está” (LINS, 2012, p. 23-24 – grifos do autor).

O texto de Silva (1997) é fruto de uma pesquisa, junto ao curso de mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula, cujo o título é Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear, que discute, a partir do procedimento de análise de produção de significado, a respeito da noção de base, a partir da leitura de livros textos de Álgebra Linear. Como resultado dessas análises verificou-se que diferentes significados matemáticos podem ser produzidos pelo sujeito que se constitui em um leitor. O ponto central é que modos distintos de falar a respeito de base de um espaço vetorial de dimensão finita implica em diferentes produções de significados e, como consequência, diferentes conhecimentos são produzidos. Silva (1997) entende que esses modos distintos de falar a respeito do tema em questão, para o matemático comum, seriam apenas definições equivalentes para o objeto base.

Em considerações conclusivas, Silva (1997) coloca que, ao assumir a posição de um leitor ideal, permite-se gerar frases das quais apresentam-se possíveis significados matemáticos à noção de base, isso relacionando diversas noções constitutivas. Tais noções constitutivas, em geral, aparecem dissociadas nos livros, assim como estipulações locais elas são apresentadas linearmente, precedendo a noção de base, das quais seriam constitutivas, do ponto de vista matemático.

Silva (2003) – pesquisa de doutorado que resultou no trabalho de tese intitulado Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro – produziu relevantes conclusões, tanto no âmbito da Educação Matemática como para o referencial teórico adotado como método de análise do MCS. Trabalhando em torno de questões relativas à disciplina Álgebra Linear, tal pesquisa estabeleceu 5 noções categorias (i. constituição de objetos; ii. formação de núcleo; iii. produção de conhecimento; iv. interlocutores; v. legitimidades) (SILVA, 2003, p. 65; SILVA, 2012, p. 81) para realizar sua análise a respeito dos significados produzidos pelos atores – alunos de uma disciplina ofertada por seu orientador, Prof. Romulo Campos Lins, precursor do MCS, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM), na Unesp/Rio Claro – que se depararam com a proposta de investigar o seguinte problema:

\mathbb{R}^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, \mathbb{R} é o corpo dos escalares) onde \mathbb{R}^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3 (SILVA, 2012, p. 80).

A partir do problema de investigação proposto observou, na perspectiva do MCS, o desencadeamento de um processo denominado processo de produção de significados, que envolve as noções categorias supracitadas (SILVA, 2003, p. 65), bem como limites epistemológicos e certas impermeabilidades presentes nos resíduos de enunciação dos atores.

Oliveira (2002) abordou a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear e adotou como ferramenta o método de análise da produção de significados, pertinente ao MCS. Propôs uma análise para possíveis leituras, a respeito de resíduos de enunciação de seus atores de pesquisa, referentes à noção de transformação linear, tal como abordada em cursos de Álgebra Linear, oferecidos a professores que ensinam Matemática. Também destaca a relevância dessa disciplina para as áreas de Engenharias, Economia e Administração, por exemplo. Ao analisar sobre a produção de significados para a noção de transformação linear, Oliveira (2002) entende que o desenvolvimento de tal pesquisa pode contribuir para um aprimoramento de sua prática docente. A pesquisa por ela desenvolvida compõe as frentes que trabalha a dinâmica do processo da produção de significado e estudo de relações entre *Enseñaza Problémica* e o MCS, para a possibilidade de contribuir na produção de um texto de referência para um curso de Álgebra Linear na licenciatura.

A pesquisa apresentada em tal obra constituiu-se em três linhas de frente: (1) estudo histórico-crítico com objetivo de levantar possíveis maneiras de se falar em transformações lineares; (2) análise de livros-textos buscando identificar os possíveis significados que podem ser produzidos em transformações lineares a partir deles; (3) entrevistas com estudantes de um primeiro curso de Álgebra Linear. A proposta inicial foi analisar a produção de significados para a noção de transformação linear, para subsidiar uma posterior reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear, com o olhar voltado à formação inicial do professor de Matemática. O MCS possibilitou uma leitura plausível dos textos que foram estudados na construção da pesquisa de mestrado, como também na leitura dos resíduos de enunciação dos sujeitos envolvidos durante as tarefas propostas. Para Oliveira (2002), essa pesquisa possibilitou reflexões sobre a situação do ensino da Matemática, onde fortes indícios levaram a entender que, não só a disciplina de Álgebra Linear, mas também outras disciplinas Matemáticas, não oferecem oportunidades para que o aluno se desenvolva matematicamente,

onde desenvolver matematicamente seria ampliar os significados produzidos para as ideias matemáticas, sem com isso corrigir ou eliminar as ideias naturalizadas.

Mariana dos Santos Cezar (2014), em seu trabalho, *Produções de Significados Matemáticos na Construção dos Números Reais*, apresenta uma pesquisa de mestrado que teve o intuito de analisar a produção de significados matemáticos em relação aos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais, passando por uma compreensão dos números racionais e irracionais. Suas ações foram de cunho qualitativo nos moldes da pesquisa-ação.

Na pesquisa desenvolvida, Cezar (2014) procurou interagir com professores de Matemática no exercício e professores em formação inicial, propondo que pensassem de forma reflexiva a respeito de suas práticas pedagógicas. Tomou como atores, tanto alunos do 1º período quanto alunos concluintes (5 alunos) do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), *campus* Vitória.

Cezar (2014) apresenta o MCS como fundamentação teórica na observância da produção de significados e na construção do conhecimento, como a própria autora ressalta. Em seu percurso constatou, por meio das considerações dos atores participantes do processo, a existência de problemas nos processos de ensino e de aprendizagem acerca do tema números reais. E isso, tanto evidenciado na Educação Básica e em formações (inicial e continuada) do professor de Matemática. Através dessas leituras foi percebido que a construção dos números reais não tem sido tratada com maior relevância nos cursos de formação de professores de Matemática porque é evidenciado um ensino mais axiomático do que construtivo. Cezar (2014) ressalta que o trabalhar com o MCS, em sua pesquisa, representou um diferencial; a partir dessa fundamentação passou a prestar mais atenção no que os sujeitos enunciam e também a refletir a respeito dos significados que eles produzem nos processos de ensino e de aprendizagem.

Teixeira (2015) desenvolveu sua pesquisa de mestrado, *Teoria dos grafos a partir do ensino médio: uma abordagem no espectro do modelo dos campos semânticos*, com o propósito de analisar o processo de produção de significado dos envolvidos. E estes atores foram alunos pibidianos do Programa Institucional de Bolsa de iniciação à Docência (Pibid) do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes, *campus* Vitória (Limat). O trabalho advindo deste texto teve enfoque no estudo de caso e tomou a resolução de problemas como procedimento metodológico de ação e como método de análise o MCS.

Os atores do processo, supracitados, participaram da oficina de teoria dos grafos, desenvolvida como prática de campo no Laboratório de Práticas de Ensino Integradas (LPEI), do Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores (Life), mantido pela coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Teixeira (2015) assume que, no momento de aplicação das práticas, a autora, na condição de condutora da oficina, estava mais inclinada a falar do que a ouvir e por isso deixou que o papel de professora sobressaísse ao de pesquisadora. Isso no afã de compartilhar um espaço comunicativo em “passar conteúdo”, no entanto, sem se afastar dos procedimentos da Resolução de Problemas.

A pesquisadora, no entanto, fez considerações a respeito do quanto interferiu no processo, assumiu que estava mais inclinada a falar do que a ouvir no momento da aplicação das atividades, porém pondera que tais intervenções não são condenáveis, pois mesmo na posição de analisar os MPS dos atores, o MCS se dá na ação; por esse motivo, as intervenções não invalidam a pesquisa, elas tão somente apontaram para caminhos que não se esperavam, afirma. A proposta inicial, Teoria dos grafos a partir do ensino médio, levando em conta a heterogeneidade em relação ao nível de conhecimento dos autores, devido às condições não favoráveis, levou-a a novos delineamentos, por não exercer controle nos graus de pertinência que estimava. Então, a partir daí, abandonou a ideia de apresentar uma proposta e passou a analisar os MPS.

O debate desejado não foi possível de ocorrer durante a oficina de Teoria dos Grafos, e por ter desenvolvido um estudo de caso, onde os atores da pesquisa foram alunos pibidianos e concluintes do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes (*Campus* Vitória) e participantes do Gepemem, a pesquisadora tomou para análise a grade curricular deste curso, bem como as respectivas ementas das disciplinas. Por fim, Teixeira (2015) entende que não basta propor um rol de conteúdos matemáticos; é fundamental que as propostas (de conteúdos ou disciplina) estejam comprometidas com os princípios de integração e intervenção de uma PEI.

Novais (2017), em dissertação fruto da pesquisa de mestrado que possui como título *Dinâmica da produção de significado de construção pataxó por alunos de ensino médio em aula de campo*, teve o enfoque no estudo de caso. Seu objetivo foi analisar a produção de significados matemáticos, desenvolvida pelos atores da pesquisa, acerca do processo de construção de edificações pataxó em núcleos das aldeias de Barra Velha e Pequi, (Bahia). O autor estabeleceu treze ações de pesquisa para tal análise, pautando-se na teoria da atividade.

O MCS, assim como no presente trabalho, foi adotado como método de análise da produção de significado e o cenário de pesquisa constituiu-se em dois espaços: uma escola do município de Teixeira de Freitas – BA – e em duas aldeias pataxó no extremo sul da Bahia. Os atores do processo foram trinta e dois alunos da 1ª série do Ensino Médio; 4 professores da Escola, que desenvolveram um trabalho na perspectiva interdisciplinar; um cacique pataxó; um diretor de escola pataxó; um coordenador pataxó; dois professores pataxós e dois construtores pataxós.

Algo peculiar em relação aos trabalhos comentados anteriormente que adotaram o MCS em seus métodos de análise foi que, durante o processo de leitura global, o autor identificou doze categorias de análise que foram formuladas durante o processo: abordagem histórica; questões socioculturais; unidades de medidas; aspectos geométricos; técnicas de construção – aspectos práticos e operacionais; questões socioambientais; aspectos geográficos; questões políticas; abordagens étnicas; divisão e distribuição de espaço físico; aspectos linguísticos; trânsito entre saberes hegemônicos e não-hegemônicos. O autor demonstrou a grande plasticidade do referencial teórico proposto para análise ao identificar e estabelecer essas doze categorias. Na análise dos resíduos de enunciação, o autor tomou todos os textos produzidos pelos alunos atores do processo – algo que não fizemos, em contrapartida, devido aos instrumentos de coletas de dados por nós adotados e em função do elevado número de atores. Por isso, analisaremos os resíduos de enunciação em um dos quatro cenários de nossa pesquisa.

Em suas conclusões, com base no resultado da pesquisa, Novais (2017) identifica a necessidade de estabelecer um diálogo entre Matemática, História e Arte de forma que produzam frutos que alimentem a aprendizagem e deem mais força para o ato de ensinar (inclusive a Matemática) e que seja, efetivamente, posto em curso para o desenvolvimento de práticas interdisciplinares. O autor também conclui que as formas com o que o conhecimento se produz são dependentes de diversas variáveis; variáveis essas que compõem as dinâmicas de uma cultura, por isso não tem como pensar uma produção única que seja válida em todos os contextos e a todos os indivíduos.

3.3 PESQUISAS QUE ABORDARAM NÚMEROS FIGURADOS

Os números figurados, que já foram objeto de estudos em outros trabalhos de pesquisa, mostram-se como um campo próprio para se pensar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Um dos trabalhos por nós analisado foi a dissertação intitulada Eüler e os números pentagonais, de Cota (2011). Esse trabalho mostra como um dos grandes matemáticos de nossa história, Leonhard Eüler (1707-1783), se dedicou ao estudo dos números figurados, em especial os números pentagonais. Essa obra aborda o envolvimento do matemático supracitado com os números pentagonais e refere-se ao texto escrito por Eüler denominado *Mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium*, momento em que a autora aproveita para revisar a vida de Eüler. Após efetuar tal revisão histórica, a pesquisadora disserta sobre o que ela define como “a busca euleriana” – o trabalho de Eüler em direção ao teorema dos números pentagonais. Eüler mantinha diálogo com outros matemáticos de sua época – como, Daniel Bernouli, Nikolaous Bernouli e Christian Goldbach – para discutir sobre os números pentagonais. Cota (2011) afirma que esses diálogos e discussões progrediram até que se atingisse a demonstração, publicada em sua obra (E541) *Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ in seriem simplicem*²⁰. Essa obra de Eüler foi apresentada à Academia de São Petersburgo, em 1775 e publicada em 1780. Nela, a expansão do conceito de número pentagonal é, então, explicada e justificada, com a comparação das representações geométrica e algébrica desses números pentagonais com a dos números pentagonais tradicionais, tal como apresentada pelos pitagóricos.

Cota (2011) apresenta como objetivo de sua pesquisa a análise histórica do Teorema dos Números Pentagonais, conceituando os números figurados, e mostrando como Eüler expandiu o conceito dos números pentagonais. O texto em questão aponta também os resultados de Eüler como um dos mais significativos nessa área, devido à fecundidade do resultado; nas palavras da própria autora, ele é a ilustração da sagacidade frequentemente comentada da intuição matemática de Eüler. E também conclui que o artigo E542, um dos materiais usados na pesquisa, é um trabalho rico em possibilidades de estudos, e que além das contribuições de sua pesquisa em tal artigo de Eüler, seu estudo abre caminho para outras investigações nos demais artigos conexos a esse estudo. Com isso destacou como seu trabalho pode oferecer subsídios que ampliem as possibilidades matemáticas, históricas e pedagógicas da utilização de saberes elementares dos números pentagonais, ou, como a própria autora destaca, da Teoria dos Números.

²⁰ Expansão do produto infinito $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ em uma série simples (Tradução da autora).

Outra pesquisa que analisamos, envolvendo o tema números figurados, mas que não aborda o MCS, encontra-se na dissertação intitulada Números Figurados e as Sequências Recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados (CHICONELLO, 2013), onde o autor justifica seu trabalho pela escassez de práticas pedagógicas que abordem sequências definidas recursivamente e da importância desse tema para jovens estudantes, fato esse que o autor justifica a partir de sua experiência profissional de aproximadamente 20 anos lecionando Matemática. Sua pesquisa levou à elaboração de um produto de ensino na forma de folhas de tarefas que gradativamente levam o estudante à compreensão do conceito de recursividade, reconhecimento de padrões, testes de conjecturas e obtenção de fórmulas, tudo isso pôde ser aferido com a aplicação dessas folhas de tarefas em duas turmas do Ensino Médio de uma Escola Técnica Estadual.

Nesse texto de Chiconello (2013), a metodologia aplicada foi a engenharia didática²¹, com o desenvolvimento de tarefas a serem aplicadas às turmas, usando os números triangulares e quadrados. Segundo a obra, em suas práticas de campo foi usado, segundo o autor, uma sequência didática com a utilização de cubinhos de madeira empilhando-os na forma dos números triangulares e quadrados. Chiconello (2013) afirma que a sequência didática que foi criada mostrou ser um método de ensino bastante eficiente e ainda pode-se perceber o nível de compreensão e as dificuldades que os estudantes apresentaram, em particular quando trabalharam com a linguagem matemática, principalmente algébrica. Dessa obra, nos interessou depositar um olhar, especificamente, no que se refere à parte matemática.

²¹ Nessa obra, engenharia didática é tomada a partir do entendimento de Artigue (2002), que diz ser uma forma de trabalho didático como se fosse o trabalho do engenheiro na realização de um projeto, se apoiando em seus próprios conhecimentos científicos de domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. Como metodologia de pesquisa, é tida como esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" em sala de aula; isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino.

4 PANORAMA DA PESQUISA

4.1 NATUREZA E MODALIDADE DA PESQUISA

Adotamos neste trabalho o gênero de pesquisa prática, tal como apresentado em Demo (1994; 2000), por ser

ligada à práxis, ou seja, à prática histórica em termos de conhecimento científico para fins explícitos de intervenção; não esconde a ideologia, mas sem perder o rigor metodológico. Alguns métodos qualitativos seguem esta direção, como por exemplo, pesquisa participante, pesquisa-ação, onde, via de regra, o pesquisador faz devolução dos dados à comunidade estudada para as possíveis intervenções (DEMO, 2000, p. 22).

Para o desenvolvimento deste trabalho, optamos por uma pesquisa com abordagem qualitativa, cuja metodologia foi a pesquisa-ação, o que possibilita aos atores condições de investigar sua própria prática de forma crítica e reflexiva.

4.2 PRINCÍPIO NORTEADOR DA PESQUISA

4.2.1 Pesquisa-ação

No que se refere à metodologia que adotamos em nosso trabalho, deixamos claro que a proposta foi desenvolvermos ações de intervenção que fossem de cunho qualitativo, constituídas nos moldes da pesquisa-ação, com o propósito de desenvolver reflexões, discussões e intervenções, tanto por parte dos pesquisadores quanto por parte dos atores da pesquisa, para, juntos, analisarmos a dinâmica da produção de significado matemático a respeito do tema Aritmética Pitagórica, tratada nos moldes de PEIs (CHAVES, 2004, 2005), tomando os níveis de funcionamento da atividade humana (LEONTIEV, 1978) como base.

No que se refere à pesquisa-ação, trabalhamos segundo as concepções de Thiollent (2011 [1988]) e Baldino e Carrera de Souza (1997) a respeito de como um trabalho, segundo tais parâmetros, pode ser desenvolvido. Dessa forma, entenderemos que a pesquisa-ação “supõe

uma forma de ação planejada de caráter social, educacional, técnico ou outro, que nem sempre se encontra em propostas de pesquisa participante” (THIOLLENT, 2011 [1988], p. 13-14), diferenciando-se “da pesquisa participante pelo fato de focalizar ações ou transformações específicas que exigem um direcionamento bastante explicitado” (THIOLLENT, 2011 [1988], p. 84).

Cezar (2014, p. 49) apoia-se em Thiollent (2011 [1988]) para apontar que há uma convergência no que se refere aos respectivos entendimentos a respeito da pesquisa-ação, ressaltando que Chaves (2000) destaca o caráter participativo da pesquisa-ação e lembra-nos que a pesquisa-ação é participante, todavia, nem toda pesquisa participante segue as bases e compromissos, sobretudo sociais e políticos de uma pesquisa-ação.

Cezar (2014), recorrendo a Thiollent (2011), também resalta que na pesquisa-ação há a necessidade de organizarmos a investigação considerando a concepção, a dinâmica e a avaliação das ações previamente planejadas, de forma que a participação e, conseqüentemente, intervenções do pesquisador, não substitua as iniciativas e as atividades do grupo.

Assim, tal como Cezar (2014), assumimos que nossa pesquisa estará inserida em um contexto de uma pesquisa-ação, pois a escolha dos atores se deu a partir da necessidade da participação dos mesmos nas intervenções propostas, de forma que essa se configure como

um tipo de pesquisa baseado numa metodologia de observação participante na qual os pesquisadores estabelecem relações comunicativas com pessoas ou grupos da situação investigada com o intuito de serem melhor aceitos. Nesse caso, a participação é sobretudo participação dos pesquisadores e consiste em aparente identificação com os valores e os comportamentos que são necessários para a sua aceitação pelo grupo considerado (THIOLLENT, 2011 [1988], p. 21).

Dessa maneira, trataremos a pesquisa-ação como um método²², por entendermos a mesma como um caminho que relaciona o conhecimento produzido e a ação ou, ainda, como em Cezar (2014) e Chaves (2000), focando na produção de conhecimento a partir da ação, de maneira que possa ser entendida como “um quadro de referência metodológico em projetos e programas sociais de grande porte, apoiado por reitorias e órgãos do poder público” (THIOLLENT, 2011 [1988], p. 8). Nossa opção pela pesquisa-ação deve-se principalmente por entendermos que

²² No sentido dado por Thiollent (2011 [1988], p. 8): pesquisa-ação “é o caminho prático da investigação”.

O método de pesquisa-ação consiste essencialmente em elucidar problemas sociais e técnicos, cientificamente relevantes, por intermédio de grupos em que encontram-se reunidos pesquisadores, membros da situação-problema e outros atores e parceiros interessados na resolução de problemas levantados ou, pelo menos, no avanço a ser dado para que sejam formuladas adequadas respostas sociais, educacionais, técnicas e/ou políticas (THIOLENT, 2011 [1988], p. 7).

Na pesquisa-ação os pesquisadores desempenham um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, no acompanhamento e na avaliação das ações desencadeadoras em função dos problemas [...] ela exige uma estrutura de relação entre pesquisadores e pessoas da situação investigada que seja do tipo participativo. Os problemas de aceitação dos pesquisadores no meio pesquisado têm que ser resolvidos no decurso da pesquisa. Mas a participação do pesquisador não qualifica a especificidade da pesquisa-ação, que consiste em organizar a investigação em torno da concepção, do desenrolar e da avaliação de uma ação planejada (THIOLENT, 2011 [1988], p. 15).

A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLENT, 2011 [1988], p. 20).

Do ponto de vista científico, a pesquisa-ação é uma proposta metodológica e técnica que oferece subsídios para organizar a pesquisa social aplicada sem os excessos da postura convencional ao nível da observação, processamento de dados, experimentação etc. Com ela se introduz uma maior flexibilidade na concepção e na aplicação dos meios de investigação concreta (THIOLENT, 2011 [1988], p. 30).

A função política da Pesquisa-Ação está intimamente relacionada com o tipo de ação proposta e com os atores considerados. A investigação está valorativamente inserida numa política de transformação (THIOLENT, 2011 [1988], p. 43).

Destacando ainda a flexibilidade do planejamento de uma Pesquisa-Ação, possuindo fases ordenadas, visto que ao se elaborar uma divisão em fases a ordem é infringida em função das respostas que surgem.

4.2.2 Objetivo geral e pergunta-diretriz

O objetivo geral desta pesquisa é analisar a dinâmica da produção de significado dos atores do processo acerca da apresentação de uma proposta que envolva Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes apresentados pelo Projeto Pitágoras: em (e além do) Teorema.

Tal objetivo gerou a seguinte pergunta-diretriz: que significados foram produzidos por professores em formação inicial e continuada acerca da Aritmética Pitagórica dos números figurados, nos moldes apresentados pelo Projeto Pitágoras: em (e além do) teorema?

4.2.3 Objetivos específicos

Para atingirmos o objetivo geral e respondermos a pergunta-diretriz, propusemo-nos desenvolver os seguintes objetivos específicos:

(1) elaborar e aplicar práticas (ações e operações) para produção de conhecimento matemático, a respeito da Aritmética Pitagórica, envolvendo ludicidade e a proposta de tarefas desenvolvidas por Luria (2005 [1990]) em processos de formação de professores, considerando:

- a utilização da técnica de recorrência para identificação e construção de modelos matemáticos que representem padrões numéricos;
- as sequências de números figurados poligonais (triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais etc.);
- a representação gnomônica de números.

(2) confeccionar, como Produto Educacional, material advindo das práticas desenvolvidas em processos de formação de professores de Matemática, a partir do que tratamos nos itens (1) e (3) supracitados.

(3) realizar oficinas, minicursos e congêneres envolvendo processos de formação de professores (inicial e continuada) de Matemática, no viés de PEI.

(4) produzir MDP nas linhas de materiais concretos e manipulativos.

(5) analisar dialógica, reflexiva e criticamente, para produzir subsídios, as formulações de práticas pedagógicas (e MDP) – por parte dos envolvidos – que objetivam estabelecer uma

proposta de ensino de Matemática que possa contribuir para o fortalecimento de culturas e práticas sociais locais.

4.3 HABITAT DA PESQUISA

O habitat de nossa pesquisa constituiu-se a partir de vários cenários, como por exemplo, as oficinas e minicursos que desenvolvemos junto a instituições públicas de ensino (Semat-Ifes, EIEMAT-UFSM, EEEFM Almirante Barroso etc.), as plenárias do Gepemem e do Projeto Pitágoras, desenvolvidas no Laboratório de Práticas de Ensino Integradas (LPEI), a partir do Centro Alternativo de Fomento à Formação do Gepemem (Cafofo), salas de aula do Ensino Médio (cursos técnicos e Proeja) – Ifes, *campus* Vitória etc.

Quadro 1 – Cenários no qual desenvolvemos nossa pesquisa

Cenário	Evento	Caracterização	Intervalo de tempo
1	Reuniões do planejamento do Projeto Pitágoras	Reuniões de estudos e planejamentos para a produção de MDP ²³ em minicursos e oficinas desenvolvidas com professores – em formação inicial ou em serviço – com duração média de 4h, envolvendo o estudo de padrões numéricos (números figurados) efetuando o trânsito entre modos de produção de significados geométricos, aritméticos e algébricos para generalização de um termo geral a partir de recursividade	09/2017 a 10/2019
2	As oficinas e minicursos	Reuniões em que discutíamos os resíduos de enunciação para análise dos significados produzidos durante as reuniões de planejamento do Projeto Pitágoras	05/2018 e 08/2018
3	As reuniões dos subgrupos e as plenárias do Gepemem	Desenvolvimento de práticas envolvendo o estudo de seqüências de números figurados, em turmas de Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino.	09/2017 a 10/2019
4	Projeto de Extensão Somar	Desenvolvimento de práticas envolvendo o estudo de seqüências de números figurados, em turmas de EJA ²⁴ no <i>campus</i> Vitória do Ifes.	03/2018 a 07/2018
5	Intervenções em salas de aula do Ensino Médio		2º semestre de 2018 1º e 2º semestres de 2019

Fonte: Autor da pesquisa

No subitem 4.3.1 caracterizamos tais cenários e no subitem 4.3.3 situamos as oficinas, apresentando uma leitura global, que, segundo Silva (2003, p. 68) refere-se ao direcionamento e um olhar à produção de significados dos atores do processo na interação face a face. Com

²³ MDP – Materiais didático-pedagógicos.

²⁴ EJA – Educação de Jovens e Adultos.

isso, procuramos entender como se processou a dinâmica do processo no referido contexto e, para tal, realizamos o que denominamos de leitura global do processo. Todavia, devido a uma questão de espaço e de análise dos resíduos de enunciação disponíveis, analisaremos tão somente alguns resíduos de enunciação do cenário relativo à oficina que desenvolvemos na 7ª SEMAT (cenário 2 do quadro 1).

4.3.1 Caracterização dos Cenários

Os cenários de nossa pesquisa são formados a partir: (i) das reuniões de planejamento envolvendo os integrantes do Projeto Pitágoras (cenário 1); (ii) integrantes estes que atuam como monitores nos minicursos e oficinas que desenvolvemos como projetos de extensão; essas oficinas e minicursos também configuram-se como cenário (cenário 2); (iii) as reuniões temáticas e as plenárias do Gepemem onde os integrantes do Projeto Pitágoras apresentam suas rotinas de trabalho (cenário 3); (iv) o Projeto de Extensão Somar, desenvolvido no 1º semestre de 2018, com alunos e professores da 1ª série do Ensino Médio, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (EEEFM) Almirante Barroso, localizada no Bairro de Goiabeiras, no município de Vitória (cenário 4); (v) Intervenções em salas de aula do Ensino Médio (duas turmas de Eletrotécnica, quatro turmas de Proeja e uma turma de Turismo), no Ifes, *campus* Vitória.

4.3.2 Cenário 1 – Reuniões de planejamento do Projeto Pitágoras

O Projeto Pitágoras foi criado em setembro de 2017 e concluído em dezembro de 2019; suas ações foram divididas em três frentes de pesquisa: Aritmética Pitagórica; História da Matemática com foco na suposta existência de Pitágoras e a escola pitagórica; teorema de Pitágoras, com demonstrações históricas. As reuniões deste projeto aconteceram semanalmente, divididas por subgrupos e também com todos os subgrupos, na modalidade de plenária. Nestas, acontecem discussões e planejamentos para ações para intervenção em sala

de aula, planejamentos de projetos de extensão, produção de artigos científicos, produção de oficinas em minicursos destinadas a professores – em formação inicial ou continuada – que ensinam Matemática. Durante as plenárias do Projeto, como também nas reuniões específicas de cada subgrupo responsável por cada frente de pesquisa, os integrantes são observados em suas ações e enunciações, no intuito de tomarmos seus resíduos de enunciação para análise sobre quais significados estão sendo produzidos em torno do tema proposto por esta pesquisa, ou a respeito das propostas e execuções das práticas de extensão.

4.3.3 Cenário 2 – As oficinas e minicursos

4.3.3.1 7ª Semana da Matemática (Semat) do Ifes, *campus* Vitória (mai. 2018)

Na primeira oficina que desenvolvemos, tendo como temática padrões de números figurados, organizada pelos integrantes do Projeto Pitágoras, contamos com vinte e seis participantes: dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes; quatro alunos do Educimat; dez professores atuantes no sistema público de ensino da Grande Vitória; dois professores do Município de Teixeira de Freitas – BA.

Para realizar a dinâmica proposta na oficina de números figurados, todos os participantes foram organizados de forma a trabalharem em subgrupo de seis pessoas, sendo cinco participantes e um monitor. Os monitores foram membros Gepemem, integrantes do Projeto Pitágoras. A participação do monitor visa orientar e guiar os participantes em determinados momentos de forma a executarem as tarefas dadas sem que haja dúvida nas instruções passadas pelo professor, coordenador da oficina, ou seja, no trânsito dos MPS geométrico para o aritmético e, conseqüentemente, usando recursividade, para o MPS algébrico.

A oficina iniciou com a entrega dos materiais a serem usados que denominamos de *kits* da oficina de figurados (figura 03). Tais *kits* continham: uma bolsa produzida artesanalmente com sobra de lona plásticas de banner; sete envelopes, tamanho A4 – também construídos artesanalmente a partir de sobras de banners – contendo jogos coloridos de tampinhas de

garrafas PET no lugar de seixos para formação dos números figurados e tabelas impressas para o preenchimento durante a prática.

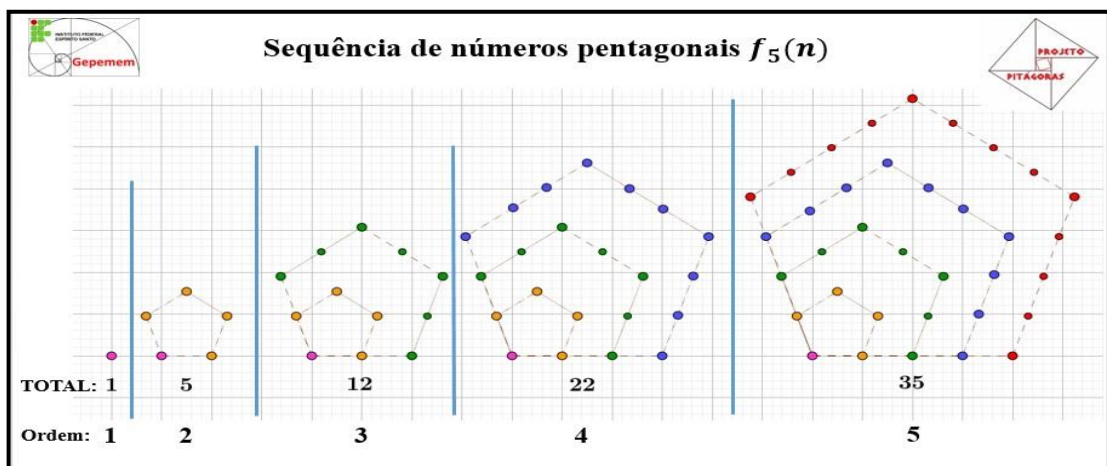
Figura 3 – Confeção dos *kits* de números figurados



Fonte: Chaves et al (2018)

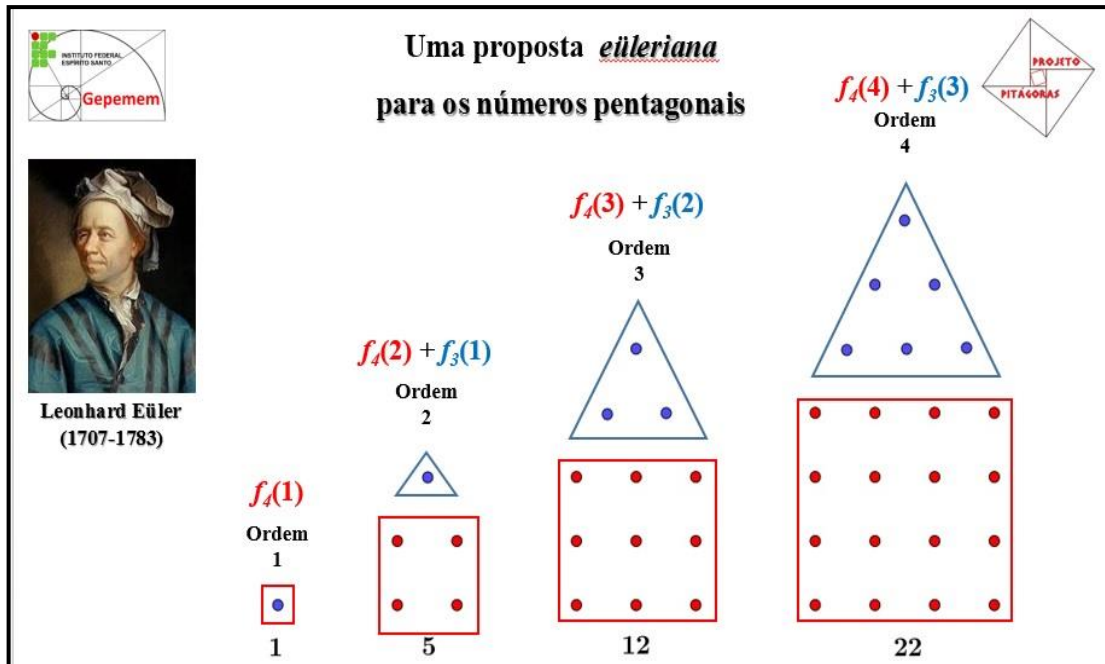
Com o propósito de estimular a compreensão da utilização da técnica de recorrência, bem como os respectivos trânsitos entre os MPS (geométrico para o aritmético e aritmético para o algébrico) optamos, durante o planejamento da oficina, por trabalharmos inicialmente com os números quadrados (figura 02) e depois passarmos para os triangulares (figura 01), pentagonais (figura 04); quadrados a partir de dois números triangulares, pentagonais a partir de um número triangular e um número quadrado (figura 05) – relação de Eüler.

Figura 4 – Sequência de números pentagonais



Fonte: Chaves et al. (2018)

Figura 5 – Fórmula de Eüler para números pentagonais



Fonte: Chaves et al. (2018)

Ao receberem o material, bem como as instruções do que fazer, o grupo 1 logo se dispôs a separar as tampinhas por cores, antes mesmo de terem qualquer orientação a respeito; com isso, o grupo 2 também seguiu fazendo o mesmo – não havendo certeza se foram induzidos por verem o grupo 1 ou se fizeram por intuição ou percepção, tal como aponta Luria (2005 [1990]) ao considerar uma tarefa de percepção quando se leva em conta a nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas e respostas a ilusões visuais; o grupo 3 antecipou-se e partiu direto para o preenchimento das tabelas após as instruções iniciais, não esperando as orientações do que fariam inicialmente. Um dos membros do grupo 1 (Jhulia) deduziu que o número quadrado ao ser generalizado é da forma

$$f_4(n) = n^2$$

e, a partir daí, seu grupo deduziu o uso da soma dos termos de uma Progressão Aritmética – PA, antes mesmo de apresentarmos qualquer proposta.

Foi questionado aos grupos, depois da exposição e explicações iniciais, assim como a construção pela ordem dos cinco primeiros termos iniciais, qual seria o termo da 37ª ordem dos números quadrados. Percebemos aí que o grupo 4 estabeleceria um limite

epistemológico²⁵, pois a forma com que operavam restringia-se ao modo de produção de significado geométrico, ou seja, dependiam do número de tampinhas de garrafa PET para formar o número figurado em questão. Eles não conseguiam efetuar o trânsito do modo de produção de significado geométrico para o aritmético sem o uso do MDP. Mesmo com as tentativas do monitor de oferecer-lhes novas propostas, os mesmos encontravam-se impermeáveis²⁶, pois estipularam como núcleo a representação geométrica e não a possibilidade da formação de uma sequência numérica, portanto, contendo uma padronização a ser observada.

O grupo 3 optou por somar todos os números ímpares até a 37ª ordem.

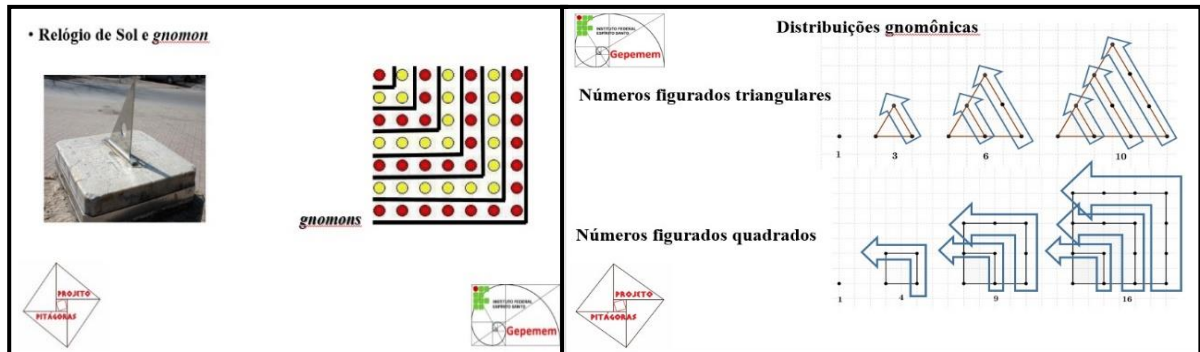
Terminada a prática com os números quadrados, iniciou-se o trabalho com os números triangulares. Os grupos 1 e 3, de imediato, formaram um triângulo com as tampinhas, separando por cores diferentes os gnomons²⁷; o grupo 2 também trabalhou construindo os números triangulares separando as fileiras por cores das tampinhas. O grupo 4 optou por somar as fileiras, ou seja, pela distribuição gnomônica (figura 06) e conseguiu estabelecer uma relação para o próximo número triangular; outro membro desse mesmo grupo tentou encontrar uma relação usando a soma para estabelecer o termo geral. No entanto, por estarem impermeáveis ao trânsito entre os MPS aritmético e algébrico, enfrentaram dificuldades para encontrar, por recorrência, o termo geral dos números triangulares.

²⁵ Quando tratamos de limites epistemológicos, referimo-nos à “impossibilidade do sujeito produzir significado para o resíduo de enunciação numa certa direção devido à sua maneira de operar” (SILVA, 2012, p. 88).

²⁶ No MCS designamos por impermeabilização ao “processo que leva os alunos a não compartilharem novos interlocutores em situação de interação face a face, diferente daqueles para o qual eles estavam voltados; de não se propor a produzir significados numa outra direção” (SILVA, 2012, p. 79). Identificar e entender um processo dessa natureza é relevante, por exemplo, quando se enxerga a “possibilidade do professor perceber que isto está acontecendo com seus alunos e auxiliá-los em suas dificuldades de aprendizagem, caracterizadas pelo MCS como um obstáculo ou limite epistemológico” (SILVA, 2012, p. 79).

²⁷ Inicialmente os gnomons referiam-se aos ponteiros de um relógio de sol, mas, no que se refere aos números figurados, eles designam as linhas formadas a cada nova ordem (figura 06). Popper (1972, p. 104) destaca que o tratamento dos problemas geométricos advindos da escola pitagórica, sobretudo no que se refere à harmonia musical e sua relação com as razões 1:2, 2:3, 3:4 etc., bem como a relação entre o ângulo reto e as razões numéricas 3:4:5 ou 5:12:13, se baseavam no chamado gnomon que possui sua gênese na Babilônia.

Figura 6 – Gnomons e distribuição gnomônica de números figurados



Fonte: Chaves et al. (2018)

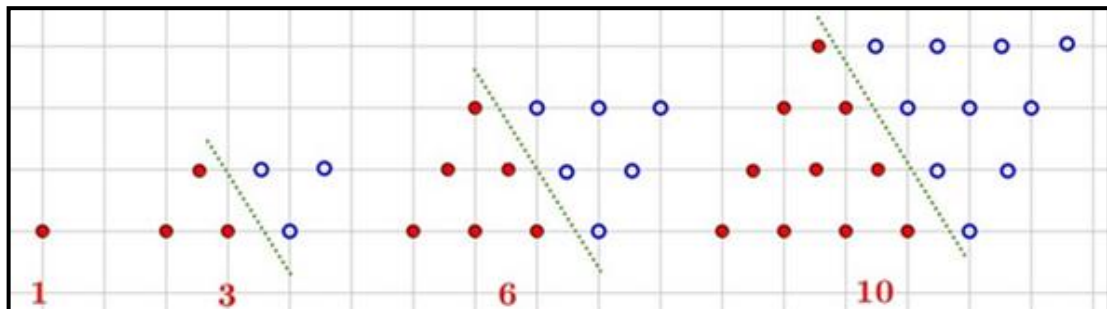
O grupo 1 recorre ao uso das tampinhas coloridas na tentativa de construírem o raciocínio e estabelecer uma relação que pudesse levar a generalização do termo geral, o que lhes se configurou como um limite epistemológico, pois tentavam operar passando do modo de produção de significado geométrico diretamente para o algébrico. Tal tentativa os tornava impermeáveis aos trânsitos do geométrico para o aritmético e subsequentemente do aritmético para o algébrico. Concomitantemente, esse grupo tentou estabelecer uma relação com o termo geral dos números quadrados, trabalhados anteriormente.

$$\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right),$$

Os membros do grupo 1 desenvolveram a produção de significados algébrico, na tentativa de relacionar a formação de um número triangular com o modo de calcular a área do triângulo, uma possibilidade de vislumbrar algum caminho à generalização dos números figurados triangulares. Eles recorreram ao uso de uma quantidade maior de tampinhas para formar um quadrado na tentativa de se encontrar um padrão para assim generalizar e se estabelecer uma relação para o termo geral dos triangulares. Mas, ao operarem dessa maneira, os mesmos não chegaram a uma possível expressão para o termo procurado, pois ao se fixarem em determinar uma altura – que se configurou como um limite epistemológico – os mesmos tornaram-se impermeáveis a outros modos de operar, como por exemplo, produzirem um número retangular a partir da formação de dois números triangulares de mesma ordem, formando um número retangular designado nos compêndios de História da Matemática por números oblongos (números da forma, segundo Gundlach (1992, p. 40)), ou como enunciado por Nicômaco de Gerasa (60-120 DEC.), números heteroméricos, que possui o dobro da quantidade de tampinhas de um triangular de mesma ordem (figura 07). Como sempre adotamos a dinâmica de, após uma oficina, nos reunirmos para avaliarmos e replanejarmos,

tomamos como desafio efetuar um descentramento²⁸ para a proposta deste grupo, foi quando encontramos na História da Matemática a representação dos números retangulares e, operando como os componentes do grupo, formamos números oblongos ou heteromécicos formando com os triangulares a disposição de paralelogramos ao dobrarmos a quantidade de tampinhas de cada formação triangular (figura 7).

Figura 7 – Sequências de números triangulares a partir de um número retangular



Fonte: Chaves et al. (2018)

O grupo 3 segue sempre somando novas distribuições gnomônicas, em todas as tentativas de se chegar ao último termo solicitado, no trabalho com os números figurados; ou seja, após efetuarem o trânsito entre os MPS geométrico para o aritmético, eles deixaram de operar geometricamente e se fixaram em obter somas, na tentativa de, a partir dos resultados numéricos, obterem o termo geral, expresso algebricamente. Esse grupo, desde o início, quando apresentamos os números quadrados, apontou para uma maior impermeabilidade quando comparado com os demais grupos. Seguiu fazendo a soma termo a termo para alcançar o termo solicitado. Essas ações, sob a ótica do MCS, evidenciam que estavam dispostos a operar apenas no campo aritmético, não se disponibilizando a produzir significados em outra direção. Na leitura do MCS, tal impermeabilidade acabou por gerar um limite epistemológico, de transpor o MPS aritmético para o MPS algébrico.

Ao iniciarmos o trabalho com os números pentagonais, que passou a constituir-se como o novo²⁹ (foco da atividade ao resolvermos problemas), para esse grupo, a dinâmica de operar

²⁸ O descentramento é o processo pelo qual você tenta mudar de lugar no mundo, mudar de interlocutor; “o que chamamos de descentramento passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo” (OLIVEIRA, 2012, p. 207).

²⁹ “A palavra-chave é ‘falar’ [...] a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o ‘novo’ e a silenciar o ‘dado’. Dessa forma, enquanto resolvemos um problema, ‘falamos’ as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 122, grifos do autor).

com números figurados, segundo nossa proposta, constituiu-se como dado³⁰ (foco na tematização da lógica das operações) e a utilização da recursividade para obtenção do termo geral constituiu-se como legitimidade³¹ (“O que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade” (SILVA, 2003, p. 65)).

Pela experiência acumulada no tratamento dos números figurados anteriores, todos os quatro grupos seguiram formando geometricamente os números pentagonais com as tampinhas, separando cada gnomom por cores diferentes e somando cada um, na busca de uma compreensão aritmética para acharem o termo geral, segundo as orientações que já haviam sido desenvolvidas com os números figurados anteriores. Nesse ponto, todos os grupos mantinham um trânsito mais fluido entre o geométrico e aritmético³², e algumas vezes até mesmo algébrico; o grupo 3, por exemplo, encontra uma relação entre os números quadrados e triangulares na formação dos pentagonais.

Os grupos começaram a manipular os números figurados de maneira mais fluida, na tentativa de produzirem mais significados que lhe fossem úteis ao trabalho com os pentagonais.

O grupo 4, explorando essa manipulação, volta à relação já discutida anteriormente – sobre um número quadrado ser formado por dois triangulares de ordens sucessivas. Paralelamente aos demais acontecimentos, o grupo 1 estabelece uma relação de formação dos números pentagonais, envolvendo os números triangulares e quadrados, sem saber que tal relação possui conexão histórica e fora desenvolvida por Leonard Euler (figura 05).

Assim, foi desta forma que realizaram o trânsito entre os MPS geométrico, aritmético e algébrico, na produção de significados a respeito dos números figurados.

Ao término da oficina, desenvolvemos uma plenária onde debatemos possibilidades de se trabalhar na perspectiva proposta em classes de educação básica, assumindo o viés investigativo e histórico do tema em questão.

³⁰ “ao longo da justificação, a fala vai deixando os traços do que é dado para o sujeito naquele momento. E estes traços são de suma importância para o nosso entendimento da maneira de operar desse sujeito. Porque o dado é o que nos diz onde ele (sujeito) está e a partir de que ‘lugar’ ele está falando. Nesse processo a justificação tem o importante papel de ser o elo de ligação entre o novo e o dado. É a partir dela que ocorre o processo aonde o novo vai se transformando em dado frente a novas situações” (SILVA, 2003, p. 57, grifos do autor).

³¹ “O papel da justificação é produzir legitimidade para minha enunciação” (LINS, 1999, p. 88).

³² Pois, afinal, como posto por Berlinski (2018, p. 88), “Nenhum matemático poderia estudar aritmética se os numerais não tivessem propriedades geométricas estáveis”.

4.3.3.2 VI Escola de Inverno de Educação Matemática (EIEMAT), XIII Encontro gaúcho de Educação Matemática (EGEM) e 4º Encontro Nacional Pibid de Matemática, na UFSM (ago. 2018)

A oficina foi organizada e aplicada pelo grupo Pitágoras no evento supracitado, no período de 01/08/2018 a 03/08/2018. Na ocasião, optamos por organizar os participantes em grupos de quatro pessoas tendo, ao todo, formado quatro grupos. Contamos com mestrandos do Educimat, com mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e Educação Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), com licenciandos de Matemática da UFSM, do Ifes, do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) e também de professores já atuantes das redes públicas de ensino do RS.

Iniciamos a oficina com a apresentação do tema e entrega dos materiais (*kits* com tampinhas e tabelas) a serem usados para execução das tarefas programadas. A decisão que tomamos no planejamento desta oficina foi de trabalharmos inicialmente com os números quadrados, exatamente como na Semat. Iniciamos os trabalhos com a apresentação dos números figurados e sua história e, em seguida, passamos às tarefas que envolviam as sequências de figurados. Definimos os grupos com numeração de 1 a 4 para organizar os relatos.

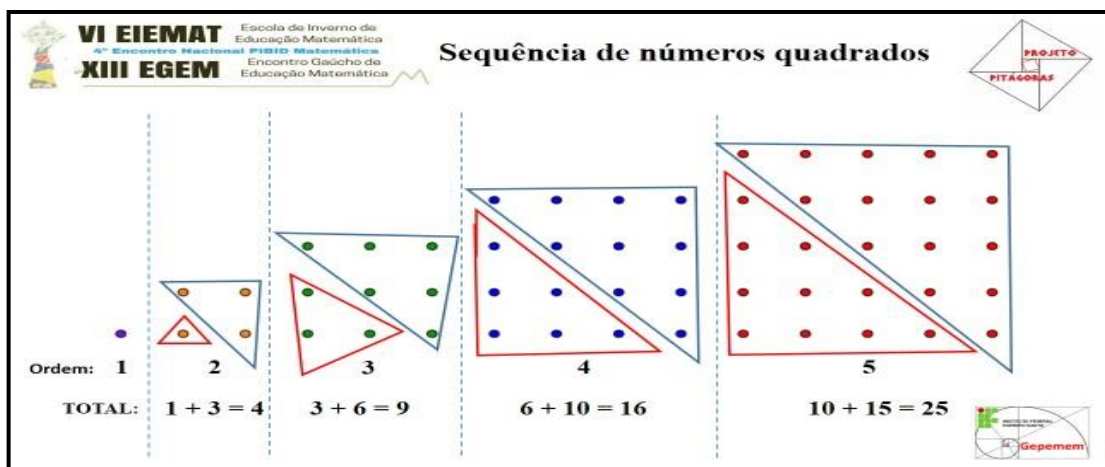
O grupo 1, com a atenção voltada às enunciações do professor, dialoga entre si sobre os passos que seguirão e discutem uma estratégia para formar os polígonos, identificarem os números e preencherem a tabela dada.

O grupo 2 produz o entendimento de que o objetivo da prática é chegar ao termo geral, encontrar a generalização dos números quadrados que estão sendo trabalhados, com isso partem em busca de uma generalização na tabela, ignorando os passos sugeridos para operarem geométrica e aritmeticamente. Tal atitude caracteriza-se como um processo de impermeabilização, ou seja, o grupo, no afã de obter o termo geral, encontra-se impermeável a quaisquer sugestões de operarem que não fosse aquelas que os conduzissem “mais rapidamente” ao resultado almejado. O monitor, diante disso, se esforça em sugerir-lhes o uso das tampinhas na formação geométrica, na tentativa de romper com a impermeabilidade em que se encontravam. O grupo 2, mesmo após a orientação do monitor, continua insistindo em

encontrar a generalização dos números quadrados (produzindo significados algébricos), porém, não conseguem encontrar o termo geral, não recorrem à forma geométrica, mesmo depois das orientações tanto do professor como do monitor. Permanecem impermeáveis nessa fase da prática. O monitor os auxilia na busca do termo geral, dá dicas sobre a sucessão dos termos, a quantidade no termo anterior e no termo seguinte.

Quando iniciamos os trabalhos com os números triangulares, o grupo 2 passou a fazer mais uso dos MDP (tampinhas levando ao preenchimento da tabela para análise), recorrendo à formação geométrica dos números, que possibilitou visualizarem a relação existente entre os triangulares e quadrados. Um dos componentes desse grupo produziu significado à relação geométrica identificada, ou seja, percebia na distribuição das tampinhas que um número quadrado gerava dois triângulos (figura 8), mas encontrava-se impermeável aos resíduos de enunciação do próprio grupo: *Um número quadrado é a soma de um número triangular de mesma ordem, com um número triangular de ordem antecedente.*

Figura 8 – Números quadrados como soma de 2 triangulares consecutivos



Fonte: Chaves et al (2018)

No trânsito das tarefas propostas com números triangulares e números quadrados, entendemos que houve um limite epistemológico, o que caracterizou uma impossibilidade desse ator de produzir significado na direção proposta, ou seja, que um número quadrado pode ser escrito como a soma de dois triangulares (figura 8). Daí o monitor interveio, reorganizando por cores, tal como na figura antecedente, de forma que esse ator pudesse chegar a uma dedução da relação. Somente após a reorganização por cores que o ator conseguiu perceber a existência de dois triangulares consecutivos na formação de um número quadrado.

O grupo 3 inicia o trabalho com os números quadrados e permanece com a atenção focada na busca do termo geral, via direta da forma algébrica, ou seja, não houve nenhum esboço da intenção de se usarem as tampinhas para a formação geométrica. Essa estratégia gerou uma impermeabilização que, ao insistirem em operar dessa maneira, acabou por se transformar em um limite epistemológico.

Com início dos trabalhos com os números pentagonais, o grupo 2 tentou copiar a forma que estava no *slide* de apresentação, construindo a forma com as tampinhas. Interessante é que recorreram ao uso das tampinhas no início da tarefa com os números pentagonais, mas logo depois desfizeram a figura geométrica e continuaram focando em tentativas de generalização para o termo geral da sequência de pentagonais. Recorreram a operações aritméticas, mas não chegaram a uma generalização. Apresentamos a eles os números pentagonais de Eüler. O grupo 2 forma a figura geometricamente, mas pouco a exploram, tentando uma generalização que não encontraram. O monitor novamente “puxa-os” para a observação da forma geométrica, mostra a aritmética da soma envolvendo os números quadrados e triangulares e tenta induzi-los a observar uma relação existente na formação dos pentagonais de Eüler.

Quando começaram o trabalho com os números hexagonais, o grupo 2 tomou uma ação inusitada em relação aos trabalhos com os números figurados anteriores. Optaram por formar o número hexagonal usando apenas uma das cores disponíveis no *kit* que lhes foi entregue. Ação inusitada, pois em nenhum momento, quando trabalharam com os figurados anteriores, tomaram determinada atitude (é possível que tenham se colocado como impermeáveis em relação à necessidade de distribuição das cores). Logo desfizeram a figura, continuando da mesma maneira que estiveram trabalhando. Continuaram tentando generalizar e usaram operações aritméticas, mas, mesmo assim não chegaram ao termo geral.

Não citamos sobre o grupo 3 e o grupo 4 até o momento porque esses dois grupos foram muito peculiares e divergentes um do outro no que consta a produção de significado geométrico, aritmético e algébrico, bem como no trânsito entre essas formas de produzir significados. Optamos em tecer os comentários a respeito desses grupos aqui ao final, para explicar de forma mais geral o que fizeram e como fizeram.

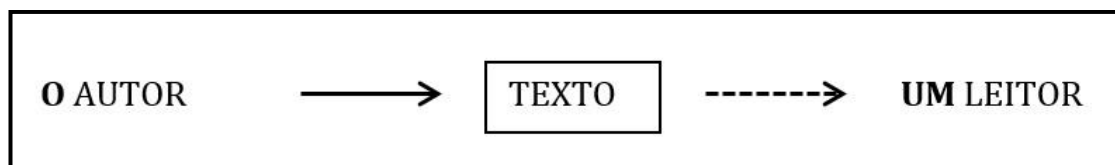
O grupo 3 foi o que apresentou uma impermeabilidade mais visível, pois em nenhum momento acatou as orientações tanto do professor como do monitor que os acompanhava, não recorreu ao uso das tampinhas para a forma geométrica, e, na tabela, mal esboçou a aritmética

dos números figurados; sua intenção era apenas chegar ao termo geral, sem passar pelo geométrico e aritmético. Ao final dos trabalhos com os números figurados triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, não conseguiram chegar ao termo geral de nenhum deles. De todos os grupos formados nas oficinas que ministramos, esse foi o que apresentou maior impermeabilização. Realmente tivemos dificuldade em estabelecer uma interação com seus componentes, principalmente porque entre eles também não havia tal interação. Referimo-nos à interação social, tal como apontada por Vygotsky, ao argumentar que a fundamentação do desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida, onde o desenvolvimento intelectual e linguístico está relacionado à interiorização do diálogo em fala interior e pensamento. O processo comunicativo entre eles foi truncado, pois falavam, mas encontravam-se impermeáveis às falas uns dos outros.

A esse respeito, recorremos a Silva (2003), ao esclarecer que o processo comunicativo, à luz do MCS, baseia-se na tríade autor-texto-leitor. Sendo o autor aquele que fala, emite mensagem, gesticula, sinaliza; texto é a mensagem propriamente dita, por exemplo, uma folha de um livro, uma página de jornal, a aula de um professor, o discurso de um presidente, um gesto como o olhar menos ameno da namorada, um sinal na língua de sinais ou qualquer resíduo que demande significado (LINS, 2001); leitor é aquele que recebe a mensagem.

Quando o autor enuncia algo ele fala em direção a um leitor constituído por ele (OLIVEIRA, 2002), este leitor, que o autor instituiu, não é necessariamente a pessoa que está lendo ou de frente para o autor, este leitor instituído é um ser cognitivo, que se espera que esteja entendendo o que está sendo dito, pois o autor fala para esse leitor (LINS, 1998). Esta interação inicial é ilustrada por LINS (2012, p. 14) da seguinte forma (figura 9):

Figura 9 – Processo comunicativo no MCS – constituição do autor

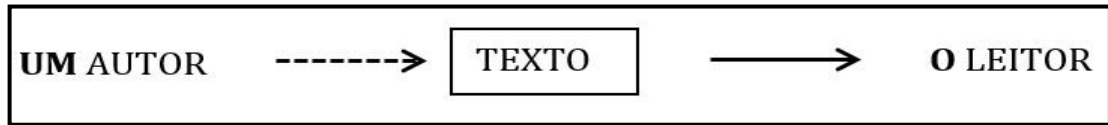


Fonte: Lins (2012, p. 14)

Por outro lado, o sujeito assume o papel de leitor, à medida que se torna também autor, “O autor-leitor fala na direção do um autor que aquele constitui; o um autor é o interlocutor (um ser cognitivo)” (LINS, 2012, p. 15). A partir daquele resíduo de enunciação (texto); esse um autor demanda uma produção de significado, algo que o um autor acredita que foi dito por

alguém, produzindo assim novo resíduo para o leitor. A respeito deste processo, Lins (2012, p. 14) esboça o seguinte esquema (figura 10):

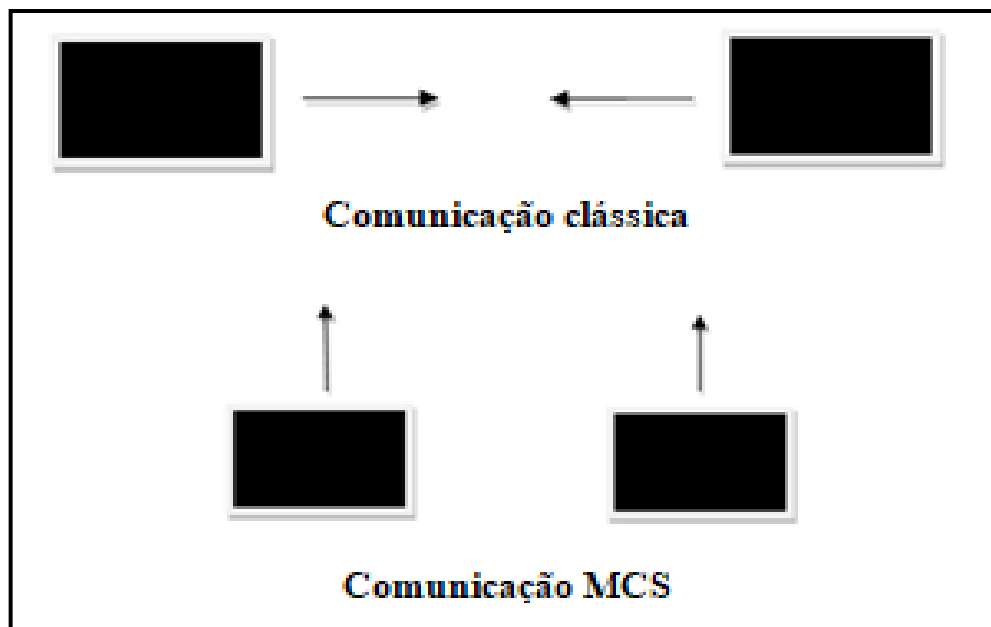
Figura 10 – Processo comunicativo no MCS – constituição do leitor



Fonte: Lins (2012, p. 14)

Silva (2003, p. 51-52) resume tal processo justificando que o autor produz um texto para um interlocutor idealizado; por sua vez o leitor, que se constitui como um autor, projeta um novo interlocutor, que produz um novo resíduo de enunciação numa nova direção, na qual acredita que aquele autor inicial estava dizendo. Quando leitor e autor compartilham interlocutores, “dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita” (LINS, 1999, p. 82), isto é, quando os interlocutores falam em uma mesma direção, é neste momento que a comunicação efetiva ocorre, estabelecendo-se então a noção de espaço comunicativo (LINS, 2012).

Figura 11 – Efetiva comunicação: modelo clássico versus MCS



Fonte: Lins (2012, p. 24)

No que se refere aos acontecimentos apresentados em relação ao grupo 3, verificamos que “A aparência da presença de um espaço comunicativo não é uma garantia: é por isso que é preciso ler o aluno” (LINS 2012, p. 24). No esquema antecedente (figura 11) é possível

entender que, se houvesse comunicação entre os integrantes desse grupo, a mesma seria caracterizada como uma comunicação clássica onde todos falam e ninguém se entende, pois não falavam na mesma direção e não se constituíam nem como leitor, nem como autor, daí a impermeabilização instaurada.

Já o grupo 4 foi o único que manteve um processo comunicativo – nos moldes propostos pelo MCS (figura 11) – com o monitor e entre seus componentes, de forma a desenvolverem as tarefas propostas completando a prática com todos os números figurados e, com isso, obtendo as relações gerais propostas.

4.3.4 Cenário 3 – As reuniões dos subgrupos e as plenárias do Gepemem

No Gepemem, adotamos a dinâmica de realizar reuniões semanais de subgrupos de estudo e reuniões gerais, denominadas de plenárias, onde todos os componentes participam, discutem e onde os subgrupos relatam as ações desenvolvidas ao longo da semana e também tomamos decisões coletivas. Nas plenárias, “componentes menos frequentes” (normalmente constituídos por ex-orientandos, professores da Educação Básica e universitários que já participaram de outros projetos etc.) do Gepemem também podem participar e possuem acento, isto é, podem intervir trazendo suas contribuições, opinando e discutindo os temas abordados; quando estes nos visitam relatamos o que estamos produzindo, da mesma forma que eles relatam o que estão fazendo em suas práticas docentes; com essa dinâmica garantimos a possibilidade de efetuarmos novas práticas de extensão e de nos relacionarmos com quem ajudou a construir a história do grupo.

Nas reuniões dos subgrupos, desenvolvemos estudos relativos ao tema específico, planejamos ações e operações, para aplicarmos em aulas, práticas de extensão e também realizamos pesquisas específicas sobre a dinâmica de cada subgrupo. Nessas reuniões nos fixamos nos repertórios dos atores (integrantes do subgrupo, mas também participantes de nossas oficinas e minicursos) com intuito de analisarmos a produção de significados para os resíduos de enunciação dos mesmos, no que se refere às práticas desenvolvidas. É no subgrupo que planejamos os projetos de extensão, bem como a escolha de textos para estudarmos, mas é na plenária que decidimos as ações a serem desenvolvidas.

Os subgrupos do Gepemem dividem-se em:

(i) do Projeto Pitágoras (que se constituem como cenário de nossa pesquisa) – História da Matemática, Aritmética Pitagórica e Demonstrações históricas do teorema. Em nossa pesquisa, tomamos como cenário e atores o subgrupo de Aritmética Pitagórica, seus integrantes e aqueles que se envolvem nas ações deste subgrupo. Estes subgrupos reúnem-se semanalmente, por pelo menos 2 horas, desde setembro de 2017;

(ii) de estudo do MCS para mestrados – neste subgrupo, formado por orientandos de mestrado dos professores Rodolfo Chaves e Ligia Arantes Sad, dedicamo-nos a estudar o MCS a partir de textos de autoria do Prof. Romulo Campos Lins, bem como de outros autores que abordem o tema. As reuniões são semanais e de fluxo contínuo;

(iii) de orientações – reuniões individuais de orientação de pesquisa envolvendo orientando e orientador, tanto de projetos de iniciação científica, quanto de Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) e também de mestrado. Essas reuniões são semanais e destinam-se a ajustes nos respectivos projetos de pesquisa de cada orientando;

(iv) de estudo do MCS para graduandos – neste subgrupo, reunimo-nos semanalmente para realizarmos estudos e leituras de textos que abordem questões pertinentes ao MCS, onde os participantes são alunos de graduação do Limat que se interessam por estudar o Modelo.

Essa dinâmica de reuniões é inspirada em Chaves (2000), ao observarmos os princípios de funcionamento de grupos de pesquisa-ação em Educação Matemática, sobretudo no que se refere às práticas desenvolvidas pelo GPA (Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro) e pelo GPAEM (Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UFV). Tal proposta, longe de efetivar-se como uma prática cartorial ou burocratizante no cenário acadêmico, configura-se como uma ação política, na concepção mais ampla do termo. O GPA possui um histórico na comunidade de Educação Matemática e, por lá, passaram vários educadores matemáticos que ocupa(ra)m o cenário nacional, como, por exemplo, Romulo Campos Lins, Antonio Carlos Carrera de Souza, Roberto Ribeiro Baldino, Tânia Cristina Baptista Cabral, Ligia Arantes Sad, Geraldo Pérez, dentre outros.

4.3.5 Cenário 4 – Projeto Somar

Somar foi um projeto de extensão desenvolvido junto à EEEFM Almirante Barroso em Vitória – ES (figuras 12, 13 e 14), no período de março a junho de 2018, planejado e executado a partir do Projeto Pitágoras, com propósito de atender alunos e professores do 1º ano do Ensino Médio dessa escola e desenvolver práticas de ensino, nos moldes de PEIs, mas procurando trabalhar a partir da perspectiva de tarefas de Luria (1990) e da Teoria da Atividades de Leontiev. Por esse viés, optamos por trabalhar com MDP, com caráter manipulativo, a partir de tampinhas de garrafas PET, envolvendo sequências de números figurados.

Para a análise dos resíduos de enunciação utilizamos gravações, cadernos de campo com anotações *in loco* durante o desenvolvimento das práticas e das plenárias com monitores (licenciandos do Limat, integrantes do Gepemem) e professores e técnicos da escola, participantes do projeto.

Esses dados permitiram que desenvolvêssemos uma percepção acerca dos significados produzidos por professores, em plena atuação, bem como por seus alunos, estudantes do 1º ano do Ensino Médio, diante das práticas desenvolvidas e dos MDP utilizados na proposta do Projeto Pitágoras. Os planejamentos feitos, bem como as práticas desenvolvidas em conjunto com os professores dessa escola propiciaram aos participantes do Projeto uma vivência em ambientes de ensino de Matemática, diferentes daqueles que usualmente são adotados no Ensino Médio.

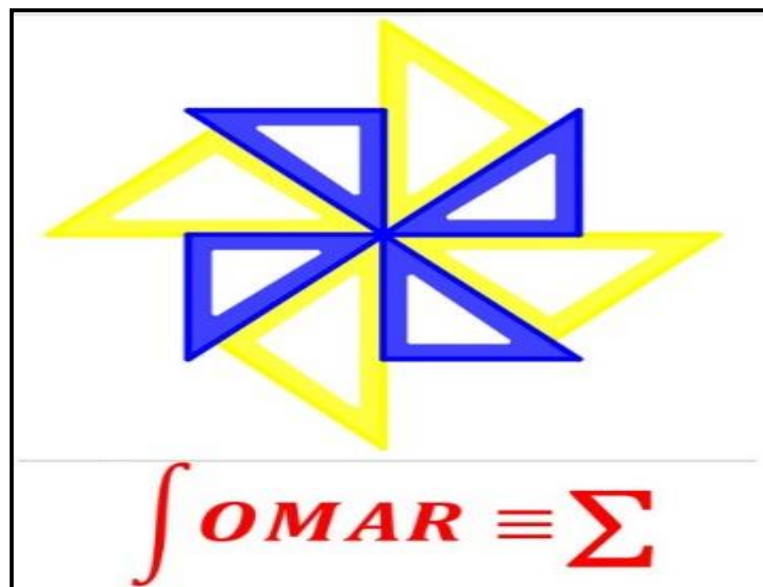
O comportamento dos professores integrantes do Projeto Somar diferenciou-se dos demais professores que participaram das oficinas, que se configuraram também como cenários de nossa pesquisa. Os professores do Somar, em sala de aula, atuaram mais como incentivadores de processos investigativos por parte dos alunos, que operavam com os MDP na proposta do que apresentamos. Já os professores das oficinas nutriam a motivação de resolver, mas não de analisar e discutir possíveis caminhos no viés didático-pedagógico ou metodológico.

As dinâmicas das práticas desenvolvidas mostraram-se bem funcionais, incentivando a participação de alunos, monitores e professores, que passaram a trabalhar num viés investigativo, tomando como base os sete princípios fundantes de PEIs, já mencionados anteriormente: (1) O princípio da liberdade de expressão; (2) O princípio da ordem natural;

(3) O princípio colaborativo; (4) O princípio da integração; (5) O princípio da intervenção; (6) O princípio do dispositivo tático; (7) O princípio da liberdade enquanto fim.

A leitura que realizamos para a diferença de comportamento, principalmente de professores, é que em oficinas e minicursos eles participam e comportam-se como alunos, visto que não lhes foi possibilitado intervir no planejamento; também há o curto intervalo de tempo que normalmente envolvem práticas desenvolvidas nessas modalidades de formação. Por outro lado, no caso do Projeto Somar, os professores participaram de todas as etapas da prática: planejamento; elaboração; adequação após testarmos as ações; execução e avaliação do que fora desenvolvido. O grau de envolvimento passa a ser outro, além do intervalo de tempo ser bem maior.

Figura 12 – Logo do Projeto Somar



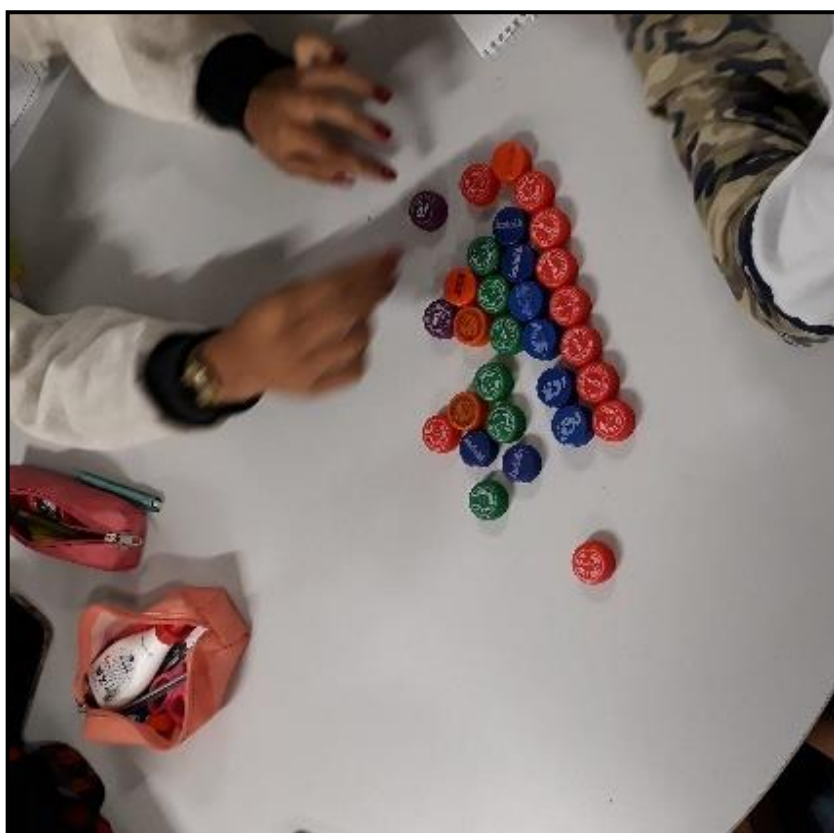
Fonte: Dados do pesquisador

Figura 13 – Prática com alunos da 1ª série



Fonte: Dados do pesquisador

Figura 14 – Formando números figurados



Fonte: Dados do pesquisador

Contando com a mesma estrutura usada em outras oficinas ministradas a partir do projeto Pitágoras, e com os monitores deste projeto, planejávamos as práticas com os professores atuantes da própria escola. O Somar teve duração de 4 meses, com duas reuniões semanais (de duas horas de planejamento com monitores e professores e quatro horas de práticas com os alunos) seguindo o critério adotado pelo Gepemem de planejamento seguido de ação, com discussão em plenária do que fora executado e realizando um novo planejamento para uma nova ação.

As práticas desenvolvidas ocorriam primeiramente no espaço da biblioteca, com grupos de quatro alunos e um monitor por grupo e, ao longo da semana, em sala de aula, o professor sistematizava e dava continuidade à ideia apresentada, trabalhando com recorrência para encontrar o termo geral de cada sequência.

De acordo com os relatos de professores e supervisor envolvidos no processo, houve uma transformação no que se refere ao interesse e, conseqüentemente, à motivação dos estudantes em relação à Matemática, a partir deste trabalho.

4.4 ATORES DA PESQUISA

4.4.1 Participantes

- (i) Alunos do curso de licenciatura em Matemática (Limat) do Ifes, *campus* Vitória;
- (ii) Membros do Gepemem, participantes do Projeto “Pitágoras: em (e além do) Teorema”;
- (iii) Professores das redes públicas participantes das práticas que ministramos a partir do viés de extensão do Projeto “Pitágoras: em (e além do) Teorema” em oficinas e minicursos na modalidade de extensão.
- (iv) Integrantes do Projeto Pitágoras que participaram de nossa pesquisa – os participantes desse projeto em nossa pesquisa foram seis licenciandos em Matemática do Ifes, três

professores da rede pública da Grande Vitória e dois professores do Ifes, que se reuniam semanalmente para discutirmos as ações do subgrupo (Aritmética Pitagórica) na qual nos inserimos. Nossas reuniões semanais, duravam em média duas horas de trabalho, mais uma hora de plenária semanal. Nas reuniões semanais discutíamos e elaborávamos nossas ações e operações enquanto nas plenárias buscávamos analisar os significados produzidos pelos atores, nos respectivos cenários, a partir de nossas anotações de campo e das tarefas apresentadas em forma de textos.

4.5 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

4.5.1 Procedimentos metodológicos das entrevistas

Com o apoio dos membros do Gepemem organizamos e realizamos entrevistas com os atores do processo a respeito das práticas realizadas com números figurados, segundo nosso planejamento. Com a intenção de ampliar o espectro de informações, visando a análise da produção de significados, utilizamos como ferramentas de coleta de dados um diário de campo e instrumentos de gravação de voz.

Para a análise dos resíduos de enunciação transcrevemos as entrevistas gravadas e confrontamos com os significados que produzimos ao anotarmos em nossos (dos pesquisadores e monitores das oficinas) cadernos de campo o que observamos durante as oficinas. Com o propósito de reduzir ruídos entre o que o autor fala e os significados que produzimos, enquanto leitores, ao nos constituirmos *uns* autores, adotaremos o critério de fidedignidade: ouvir a gravação tendo o texto transcrito em mãos, acompanhando e conferindo cada frase, mudanças de entonação, interjeições, interrupções etc., como apresentado em Duarte (2004, p. 213).

Para análise das enunciações, fragmentamos o todo e reorganizamos esses fragmentos em resíduos de enunciação e segmentamos as falas dos entrevistados em unidades de análise, com

o propósito de efetuarmos leituras plausíveis desses resíduos de enunciação, como característica do método de análise de produção de significados.

4.5.2 Método de análise de produção de significados

O método de análise de produção de significados tem por objetivo realizar uma leitura plausível do indivíduo, afastando-se assim da noção de leitura pela falta. A análise é feita com base no processo de comunicação segundo o MCS, onde se tem a tríade: autor-texto-leitor. Dessa forma, o autor produz enunciação, como, por exemplo, um professor ao apresentar uma enunciação (texto); o leitor, neste processo se propõe a produzir significados para os resíduos de enunciação (o texto, o que foi dito, qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza significado) do autor e assim, esse leitor, passa a constituir-se como *um* autor daquele texto para o qual produziu significados.

De acordo com Silva (2003), a partir desse processo comunicativo, a análise ocorre da seguinte forma:

As ações enunciativas dos nossos sujeitos de pesquisa (os autores), chegam até nós (os leitores) como resíduos de enunciações, que se constitui em texto a partir de nossa produção de significados, que novamente resulta em resíduos de enunciação. Assim, nossa análise é o resultado de nossa produção de significados para o qual o leitor da tese produzirá significado (SILVA, 2003, p. 52).

Outra característica do método de análise de produção de significado, como aponta Silva (2003), consiste em tomar o conceito de atividade³³ proposto por Leontiev, como unidade de análise, onde o termo atividade refere-se aos processos psicologicamente determinados por um objeto, ou seja, por aquilo que se pretende no seu conjunto, estando o objeto em concordância com o motivo. Por esse prisma, a atividade humana, para Leontiev, é uma forma complexa de relação homem-mundo, que envolve finalidades conscientes e atuação coletiva e cooperativa.

Atividade humana é tomada como a unidade de análise mais adequada para compreensão de processos psicológicos porque inclui tanto o indivíduo como seu

³³ Segundo Oliveira (1997, p. 96), para Leontiev as atividades humanas são formas de relação do homem com o mundo, pois são construídas historicamente, mediadas por instrumento, dirigidas por motivos, por fins a serem alcançados, visto que, este, é orientado por objetivos, pois age intencionalmente, a partir de ações planejadas.

ambiente, culturalmente definido. A ação individual em si é insuficiente como unidade de análise: sem inclusão num sistema coletivo de atividade a ação individual fica destituída de significado (OLIVEIRA, 1997, p. 98).

A partir dessa posição, explicitamos então que, primeiramente, a análise do processo de produção de significados se dá sempre no interior de uma atividade, de um processo. Em segundo lugar, evidenciamos que, em nossa análise, não é possível “olhar menor” ou por falta pois, como apresentado em Silva (2003, p. 52), no MCS a atividade é considerada um todo mínimo.

Durante um discurso, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para um resíduo de enunciação, na perspectiva do MCS, ocorre o desencadeamento desse processo, que envolve:

- i) a constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;
- ii) a formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e sua lógica;
- iii) a produção de conhecimento;
- iv) os interlocutores;
- v) legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de sua atividade (SILVA, 2003, p. 65).

Essas são as noções categoriais e é o conjunto dessas coisas que consideramos quando nos preparamos para realizar nossa leitura (plausível), com o propósito de investigar a dinâmica dos processos de produção de significados, que Silva (2003) e Henriques e Silva (2019) destacam o quão importante é que estudemos a dinâmica dos núcleos para uma análise de maior amplitude do processo em curso. Por esse prisma, para pormos em curso o método de análise de produção de significados, realizamos dois tipos de leitura tomando como base as noções categorias supracitadas, em direção aos resíduos de enunciação dos atores da pesquisa:

(i) **Leitura local** – aquela que é desenvolvida pelos atores do processo, realizada pelos leitores de um texto (enunciação), efetuada de dentro, por aqueles que desenvolvem uma atividade, que aborda o “nós sobre nós”, na perspectiva dos indivíduos (internos), com visão local, portanto apresentando aquilo que eles falam (eles sobre eles, visão cultural, interna na perspectiva dos atores) a respeito das práticas apresentadas. Essa leitura se refere àqueles que

protagonizam o processo, participam da atividade, que, segundo Rosa e Orey (2012), são denominados *insiders*.

(ii) **Leitura global** – aquela que é desenvolvida por nós, pesquisadores, que depositamos a partir da identificação dos núcleos, uma visão analítica do “nós sobre eles”, ou seja, uma visão externa, na perspectiva dos observadores que o texto de Rosa e Orey (2012) caracteriza como *outsiders*, ou observadores de fora.

As ideias relativas à local e global, como adotamos, possuem bases antropológicas e essa base buscamos em Rosa e Orey (2012), ao demarcar três tipos de abordagens (êmica, ética e dialética) no campo de pesquisa em Etnomodelagem. Esse texto destaca que, nos processos investigativos que analisam a produção de conhecimento de atores pertencentes a diferentes grupos culturais, como é o caso dos participantes das oficinas que constituíram nosso cenário de pesquisa, é possível encontrarmos práticas matemáticas originais, pertinentes a esses grupos, que podem ser consideradas como Etnomatemáticas; entretanto, a análise da produção desses conhecimentos

exige um esforço incessante para a compreensão dos fenômenos científicos, a partir dos referenciais e das categorias nativas, para que uma prática matemática também possa ser expressa no sistema acadêmico. Assim, devemos ser cautelosos para que não corremos o risco de transmiti-las com base em fatos e fenômenos julgados a partir de nossa própria visão e de nosso perfil cultural [...] Um desafio que se coloca a partir dessa abordagem é a maneira como as práticas matemáticas, culturalmente enraizadas, podem ser extraídas ou compreendidas sem permitir que a cultura dos pesquisadores e investigadores interfira na cultura dos membros do grupo cultural sob estudo. No entanto, isso pode ocorrer, pois os membros dos grupos culturais têm a própria interpretação de sua cultura, denominada abordagem *êmica*, em oposição à interpretação dos pesquisadores e investigadores, denominada abordagem *ética* (ROSA; OREY, 2012, p. 867, grifos do autor).

5 ANÁLISES A PARTIR DAS LEITURAS LOCAL E GLOBAL

No que se refere à análise de produção de significados Chaves, Cezar e Teixeira (2019), Henriques e Silva (2019) e Silva (2003), adotam o método de leitura plausível para o desencadeamento de um processo, à luz do MCS, denominado método de produção de significados que envolve as noções categorias apresentadas a seguir (quadro 2):

Quadro 2 – Noções categorias no processo de produção de significados

	<p>“O núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais” (LINS, 2012, p. 26).</p>
(I) Núcleo formado	<p>Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação “realista” ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 144, grifos do autor).</p>
(II) Estipulações locais	<p>“são localmente, verdades absolutas, que não requerem localmente justificação” (LINS, 2012, p. 26).</p>
(III) Objetos constituídos	<p>Objetos são “coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos” (SILVA, 2012, p. 81).</p>
(IV) Conhecimentos produzidos	<p>“Conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação: conhecimento é algo do domínio da enunciação; sempre há um sujeito do conhecimento (e não do conhecer)” (LINS, 1999, p. 88).</p>
(V) Interlocutores/Legitimidades	<p>“Como consequência de ser enunciado na direção de um interlocutor, e de ter mesmo sido produzido, todo conhecimento é verdadeiro. Isto não quer dizer que aquilo que é afirmado seja ‘verdade’” (LINS, 2012, p. 21).</p> <p>O “interlocutor é <i>direção</i> na qual se fala [...] é um ser cognitivo, não um ser biológico” (LINS, 2012, p. 19, grifos do autor). “Interlocutores são legitimidades. O que internalizamos, nos processos de humanização e do que se costuma chamar de desenvolvimento intelectual, são interlocutores, são legitimidades” (LINS, 2012, p. 20).</p>

Fonte: Chaves, Cezar e Teixeira (2019)

A essas noções, Silva (2003) destaca outras três grandes categorias: o dado, a justificação e o novo. De forma que, “ao longo da justificação, a fala vai deixando os traços do que é dado para o sujeito [...] estes traços são de suma importância para o nosso entendimento da maneira de operar desse sujeito. Porque o dado é o que nos diz onde ele (sujeito) está e a partir de que ‘lugar’ ele está falando” (SILVA, 2003, p. 57, grifos do autor).

Já a justificação “é o que garante – para o sujeito do conhecimento – que ele pode enunciar aquela crença-afirmação” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 142, grifos do autor), pois as “Justificações estabelecem um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos” (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 144, grifos do autor) e seu papel é produzir legitimidade às enunciações

(LINS, 1999), visto que “a justificação tem o importante papel de ser o elo de ligação entre o novo e o dado. É a partir dela que ocorre o processo aonde o novo vai se transformando em dado frente a novas situações” (SILVA, 2003, p. 57, *ipsis litteris*).

No que se refere ao novo, chamamos atenção para o fato de que

A palavra-chave é ‘falar’[...] a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o “novo” e a silenciar o “dado”. Dessa forma, enquanto resolvemos um problema, “falamos” as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas (LINS; GIMÉNEZ, 1997, p. 122, grifos do autor).

Dessa forma, destacamos que o foco da atividade de resolver problemas é o novo, contudo, na tematização da lógica das operações o foco é dirigido ao dado.

Vale ressaltar que, quando apresentamos essa lista de elementos – que usualmente chamamos de noções-categorias – em uma determinada ordem, não estamos querendo dizer que há uma sequência de procedimentos, uma ordem de leitura, mas queremos dizer que é para o conjunto dessas coisas que estaremos considerando quando estivermos fazendo nossa leitura. Isso se constitui no que é dado para nossa investigação, sendo o nosso ponto de partida. O novo que queremos entender, o movimento na produção de significados é o que chamamos a dinâmica do processo (SILVA, 2003, p. 65-66).

O método que adota esses elementos no MCS denomina-se método de leitura plausível, cujo objetivo é possibilitar que ocorra um entendimento da produção de significados dos atores envolvidos em um processo comunicativo (autor-texto-leitor), a partir da análise dos resíduos de enunciação das narrativas apresentadas.

5.1 O CONJUNTO DE AÇÕES E OPERAÇÕES DESENVOLVIDO NAS OFICINAS

Em nossas oficinas, adotamos o uso de materiais recicláveis e reaproveitáveis (lonas de *banners* e tampinhas de garrafas PET) para trabalharmos com sequências de números figurados planos (triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais). Como dito anteriormente, cada grupo recebeu um *kit* contendo tampinhas (figura 6) e tabelas (figura 18), separadas para cada uma das seguintes ações:

(A₁) construção da sequência de números triangulares;

(A₂) construção da sequência de números quadrados;

(A₃) construção da sequência de números pentagonais;

(A₄) construção da sequência de números hexagonais.

Para cada uma dessas ações, propusemos as seguintes operações:

(O₁) formar os polígonos, relativos às formas (triangulares, quadradas, pentagonais e hexagonais) (figura 15), relacionando o número de tampinhas com a ordem e o termo relativo à ordem, da primeira à quinta ordem (figura 17).

Figura 15 – Construção geométrica de números pentagonais com tampinhas



Fonte: Acervo do autor

(O₂) preencher as respectivas tabelas (até a quinta ordem), considerando a ordem, a distribuição gnomônica (figura 6) por cada nova linha de tampinhas acrescentadas e a soma das tampinhas por linhas;

Vale ressaltar que a quantidade de tampinhas distribuídas era suficiente somente para construção dos termos de primeira à quinta ordem.

(O₃) preencher a tabela (figura 18) para um termo de décima ordem e depois repetir o processo para um termo de trigésima sétima ordem.

O propósito da operação O₃ foi que, a partir da comparação, discriminação e agrupamento de objetos (tarefa de abstração e generalização, segundo Luria (1990)) estabelecessem

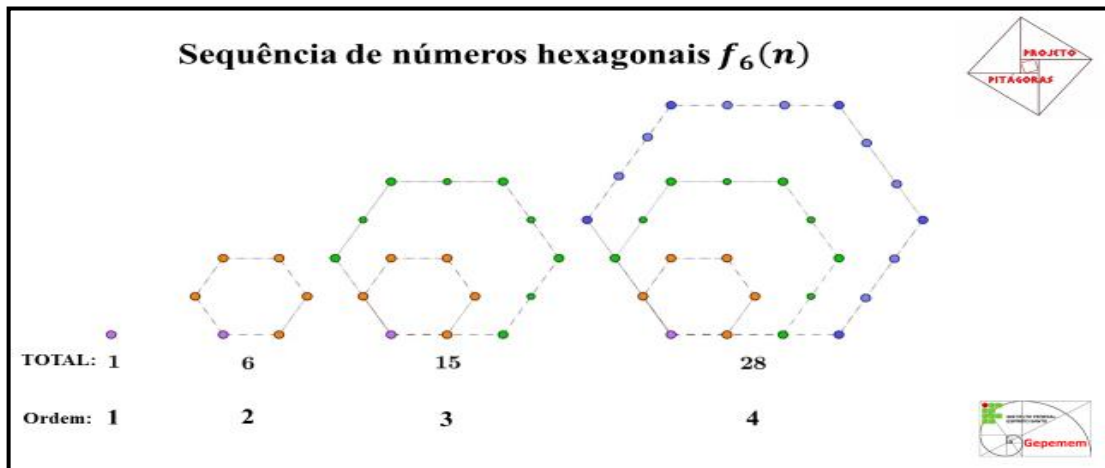
conclusões lógicas advindas das informações dadas (tarefa de dedução e inferência, segundo Luria (1990)) para solucionarem o problema proposto (quantidade de tampinhas necessárias ao décimo e ao trigésimo sétimo termo).

(O₄) pelo princípio da recursividade, determinar o termo geral de cada uma das sequências.

Ressaltamos que antes de sugerirmos as ações e operações supracitadas, inicialmente, explanamos: (i) a respeito da história dos números figurados e a escola pitagórica; (ii) estabelecemos alguns lastros teóricos, principalmente, advindos dos PCNs e de Lins e Giménez (1997) que sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorra em todos os anos da Educação Básica, sendo recomendável, desde os primeiros anos de escolarização, a observância e a investigação de padrões aritmético-geométricos; (iii) apresentamos como proposta da oficina a apresentação, discussão de sequências de figurados para a determinação dos respectivos termos gerais de sequências de números figurados **sem a utilização de fórmulas prontas**, mas analisando padrões aritmético-geométricos por técnicas de recorrência, comparando **modos de produção de significados** (aritmético-geométricos e algébricos), bem como o trânsito entre eles, para a produção de conhecimento algébrico.

Para cada sequência de figurado adotamos um conjunto de ações e operações com o propósito de estimularmos o trânsito entre os MPS geométrico (construção geométrica – figura 16 – de termos consecutivos de números figurados) para o aritmético (obtenção, pelo processo de contagem, dos cinco primeiros termos de cada sequência) e do aritmético para o algébrico (utilização da técnica de recursividade para formação do termo geral de cada sequência).

Figura 16 – Construção geométrica de números hexagonais

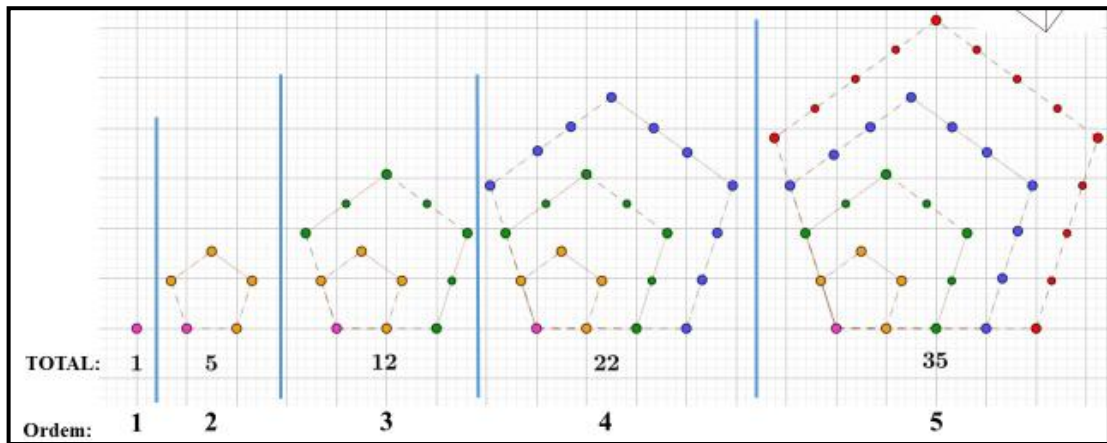


Fonte: Acervo do autor

Para formação dos polígonos, distribuímos tampinhas com cores previamente selecionadas e, a partir de uma orientação inicial – de como se formava cada polígono –, sugerimos que realizassem as seguintes operações:

- (i) forme um número figurado de ordem 2, anote na tabela a quantidade de tampinhas que foram necessárias para formar esse número. Tal processo se repetiu para as ordens 3, 4 e 5.

Figura 17 – Construção geométrica de números pentagonais



Fonte: Acervo do próprio autor

Figura 18 – Tabela de números figurados pentagonais



NÚMEROS FIGURADOS – PENTAGONAIS



Ordem	Soma de tampinhas por Parcela para o n° formado	TOTAL	Expressão numérica da soma
1	1	1	1 = 1
2	1, 4	5	1 + 4 = 5
3	1, 4, 7	12	1 + 4 + 7 = 12
4	1, 4, 7, 10	22	1 + 4 + 7 + 10 = 22
5	1, 4, 7, 10, 13	35	1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35
...
10	1, 4, 7, 10, 13, ..., 28	145	1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + 28 = 145
...
37	1, 4, 7, 10, 13, ..., 28, ..., 109	2035	1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + 109 = 2035
...
n	1, 4, 7, 10, 13, ..., $(3n - 2)$		$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n - 2) = \frac{(3n-1) n}{2} = P_n$

Fonte: Acervo do próprio autor

5.2 LEITURA LOCAL REFERENTE À 7ª SEMANA DA MATEMÁTICA (SEMAT) DO IFES CAMPUS VITÓRIA (mai. 2018)

Por uma questão de delimitação de espaço e pelo volume de dados, para nossa dissertação optamos por analisar alguns resíduos de enunciação e, como o dispositivo utilizado para coleta desses dados foi o de gravação de áudio, selecionamos aqueles que apresentaram melhor qualidade sonora para transcrição e que, com os monitores do Projeto Pitágoras discutimos e analisamos.

5.2.1 Tarefas com números quadrados

5.2.1.1 Grupo 1

Ao receberem o material, bem como as orientações relativas às ações e operações das tarefas, do que fazer, o grupo 1 logo se dispôs a separar as tampinhas por cores, antes mesmo de terem qualquer orientação a respeito. Um dos membros do grupo (que designaremos pelo codinome de Ruiva), deduziu que o número quadrado ao ser generalizado é da forma

$$f_4(n) = n^2$$

Quadro 3 – Caixa de diálogo participante Ruiva, do grupo 1

Ruiva – Olha aqui! Repara só isso, cada termo é um número elevado ao quadrado, então para saber qual é o próximo é só pegar e elevar ao quadrado. O enésimo termo será n ao quadrado, é isso!

Fonte: Autor da pesquisa

A partir daí seu grupo deduziu o uso da soma dos termos de uma Progressão Aritmética – P.A., antes mesmo de apresentarmos qualquer proposta.

Quadro 4 – Caixa de diálogo de participantes do grupo 1

Nerd – *Eu percebi uma coisa, prestem atenção nisso aqui: na última fileira de tampinhas de cada um desses números quadrados, a quantidade de tampinhas é ímpar... três, cinco, sete..., acho que isso tem a ver alguma coisa. Dá para encontrar o termo seguinte assim (apontando cada fileira, como se estivesse riscando com o indicador), colocando um número ímpar de tampinha na última fileira, não é isso?*

Cabeça – *É verdade. Mas tem alguma coisa que isso está me lembrando. Vejam só isso: o número quadrado da primeira ordem é o um, o de segunda ordem é o quatro, o de terceira ordem é o nove, por exemplo. Então, é o que você acabou de dizer; o quadrado da primeira ordem é o 1, o de segunda ordem é o $1+3$, que vai ser igual a 4, o quadrado de terceira ordem será o $1+3+5$, que vai dar 9, vai sempre somando números ímpares como você viu aí. Se a gente sair somando os números ímpares, vamos achar os números quadrados. Isso está parecendo alguma coisa, só que está fugindo.*

Nerd – *Ah sim! Entendi o que você está querendo dizer, é a soma de P.A. não é?*

Cabeça – *É isso mesmo! A quantidade de tampinha que esse número quadrado tem é soma de uma P.A, pode por aí para você ver.*

Fonte: Autor da pesquisa

5.2.1.2 Grupo 3

O grupo 3 antecipou-se e partiu direto para o preenchimento das tabelas após as instruções iniciais, isto é, ficaram impermeáveis à sugestão de formarem quadrados com as tampinhas. Os componentes optaram por somar todos os números ímpares até a 37ª ordem.

Quadro 5 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 3

Atuante – *O que vamos fazer para encontrar o termo geral? Vamos seguir pela tabela, olha aqui (apontando para coluna da ordem e comparando com a 3ª coluna já preenchida), está vendo? É só seguir como está na tabela (figura 15).*

Rabo de cavalo – *É verdade; tem os números quadrados aqui e na mesma linha também os números que vão juntando, somando cada um.*

Horácio – *Sim! Em cada linha tem os números que vão sendo somados até formar no final o número quadrado.*

Atuante – *Mas então é seguir essa lógica, porque esses números iniciais que deram na tabela, é só para a gente entender o raciocínio. Vamos seguir o jeito que está aqui.*

Experiente – *O professor falou de ter que generalizar para ver o termo geral. Viram como ele explicou? Tem que formar um quadrado com as tampinhas primeiro.*

Horácio – *É só somar os números do mesmo jeito da tabela, a gente vai achando os outros números.*

Rabo de cavalo – *Vamos pôr no papel aqui então, mas vai ficar muita coisa para somar, tem que fazer até o trigésimo sétimo.*

Atuante – *Mas tem uma sequência, observa só, a gente tem que somar os números seguindo essa sequência.*

Experiente – *Tem que tomar cuidado para não confundir a sequência enquanto soma, confundir o termo que queremos encontrar com o número ímpar que estamos somando.*

Fonte: Autor da pesquisa

5.2.1.3 Grupo 4

O grupo em questão era constituído de licenciandos, portanto, todos ainda em processo de formação e como característica básica foi identificado que eram iniciantes, alunos de 1º período do curso. Vejamos alguns resíduos de enunciação.

Quadro 6 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 4

Bonezinho –... fazer a trigésima sétima ordem? Não entendi muito bem [...] até agora fizemos com essas tampinhas o primeiro, o segundo, o terceiro, o quarto e o quinto; mas para ir até o trigésimo sétimo... não sei...

Caracol – Tem que pedir mais tampinha né? Para continuar fazendo, para fazer esse quadrado. Mas acho que esse quadrado da trigésima sétima ordem deve ficar muito grande, não é?

Surfista –Gente... vamos colocar aqui na folha como se fossem as tampinhas para a gente fazer os quadrados.

Morena –Gente, espera aí. Não seria o 37^2 ? Olha lá no slide do professor (observando a projeção da tabela, na figura 15 projetada).

Fonte: Autor da pesquisa

Foi questionado aos grupos, depois da exposição e explicações iniciais, assim como a construção pela ordem dos cinco primeiros termos iniciais, qual seria o termo da 37^a ordem dos números quadrados. Percebemos então, naquele momento da prática, a partir da leitura local do grupo 4, que seus componentes estavam diante de um limite epistemológico, pois, a forma com que operavam restringia-se ao modo de produção de significado geométrico, ou seja, dependiam do número de tampinhas da garrafa PET para formar o número figurado em questão. Eles não conseguiam efetuar o trânsito do modo de produção de significado geométrico para o aritmético sem o uso do MDP. Mesmo com as tentativas do monitor de oferecer-lhes novas propostas, eles encontravam-se impermeáveis, pois estipularam como núcleo a representação geométrica e não a possibilidade da formação de uma sequência numérica, portanto, contendo uma padronização a ser observada.

5.2.2 Tarefas com números triangulares

5.2.2.1 Grupo 1

Quadro 7 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 1

-
- Nerd** – Acho que a gente tem que pensar igual do jeito que fizemos da outra vez, do mesmo jeito que a gente fez com os quadrados. Junta aqui as tampinhas.
- Ruiva** – Triângulo vai ser mais fácil! O quadrado era o número elevado ao quadrado, o triângulo deve ser alguma coisa assim, deve ter uma ligação.
- Cabeça** – Olha a quantidade de tampinha que a gente usa nos triângulos: o primeiro é 1, como no quadrado, o segundo é 3, o terceiro é 6 e o quarto é 10... A sequência é diferente da dos quadrados. Primeiro aumenta 2, depois aumenta 3, depois 4... no quadrado a gente só somava os números ímpares, mas agora não é assim, tem pares e ímpares.
- Ruiva** – Eu estou pensando numa coisa aqui; quando a gente encontrou o termo geral do número quadrado, vimos que era o número elevado ao quadrado. Olha a ideia de que eu tive a partir daí: a área do quadrado é o lado elevado ao quadrado também, é a mesma coisa do termo geral do número quadrado. O termo geral do triângulo pode ser a área do triângulo também ué! Calcula base vezes altura dividido por 2.
- Ruiva** – Tive uma ideia! Vamos colocar mais tampinhas nesse triângulo e formar um quadrado para gente ver. Deve ter alguma ligação entre os dois, talvez dá para a gente ver alguma coisa relacionada.
- Nerd** – Vamos pedir mais tampinhas para fazer isso, entendi sua ideia, vamos tentar pensar a partir dos quadrados que a gente já resolveu, espera aí.
- Cabeça** – É... tem uma lógica, a gente descobriu que o termo geral do número quadrado é o número elevado ao quadrado, mas a gente já viu que com o triângulo é diferente, a sequência de números é diferente e a quantidade no final é diferente também. Se a gente colocar mais tampinhas no triângulo para formar um quadrado dá para gente ter alguma ideia.
- Ruiva** – Olha só (já com um retângulo formado a partir de um triângulo adicionado de mais tampinhas, tal como o esboço da figura 7); ficou tipo um retângulo. Colocando mais tampinha nele (apontando para o número retangular feito a partir do triangular), fica assim...
- Nerd** – Pior que isso aí não está dizendo nada para gente, não dá para encontrar a generalização por aí... poxa, esse está complicado de resolver, ...
-

Fonte: Autor da pesquisa

5.2.3 Tarefas com números pentagonais

5.2.3.1 Grupo 1

Quadro 8 – Caixa de diálogos de participantes do grupo 1 em relação aos pentagonais

-
- Nerd** – Vamos ver o que a gente faz para generalizar agora com os pentagonais (construindo os números pentagonais separando por cores as tampinhas – figura 15). A gente já sabe como foi com o quadrado (figura 20) e com o triângulo (figura 22). A gente tem que reparar de quantas em quantas tampinhas vão aumentando em cada número pentagonal para entender essa sequência que é diferente das outras.
- Ruiva** – Essa sequência com o pentagonal é muito estranha; olha só como eles vão aumentando (separando os gnomons de tampinhas), primeiro coloca mais quatro tampinhas, depois mais sete, depois mais dez... a gente vai somando as fileiras do mesmo jeito que antes (se referindo aos números triangulares e quadrados) na tabela.
- Cabeça** – Esse pentagonal (mexendo nas tampinhas), se você juntar as tampinhas e deixar mais reto fica como um quadrado e a parte de cima um triângulo, olha só (apontando para o pentagonal formado a partir de um quadrado e um triângulo) é um pentagonal também. O que vocês acham disso, será que a
-

generalização tem a ver com os quadrados e os triângulos juntos?

Ruiva – *Vamos tentar assim para ver (anotando na folha)... você colocou um quadrado de quantas tampinhas embaixo e quantas tampinhas no triângulo em cima? (anotando na folha).*

Nerd – *Dá a mesma quantidade de tampinha! Cara! Isso tem a ver sim, mas não estou conseguindo pensar em nada mesmo assim.*

Ruiva – *É... já tentamos com as fórmulas do quadrado e do triângulo para tentar ter alguma ideia de generalizar com esse pentagonal... mas não está dando em nada...*

Fonte: Autor da pesquisa

5.3 LEITURA GLOBAL

5.3.1 Tarefas com números quadrados


5.3.1.1 Relativa às caixas de diálogos de participantes do grupo 1 (Quadros 3 e 4)

A sequência numérica (figura 19, terceira coluna)


$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, 100, \dots, 1369, \dots, n^2$$

formada a partir das tampinhas de garrafa PET (figura 20 e terceira coluna da figura 19) constituiu-se como um objeto para o ator de codinome Ruiva.

Figura 19 – Tabela da sequência de números quadrados $f_4(n)$



Gepemem



**PROJETO
PITÁGORAS**

Progressão aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_1 = 1$$

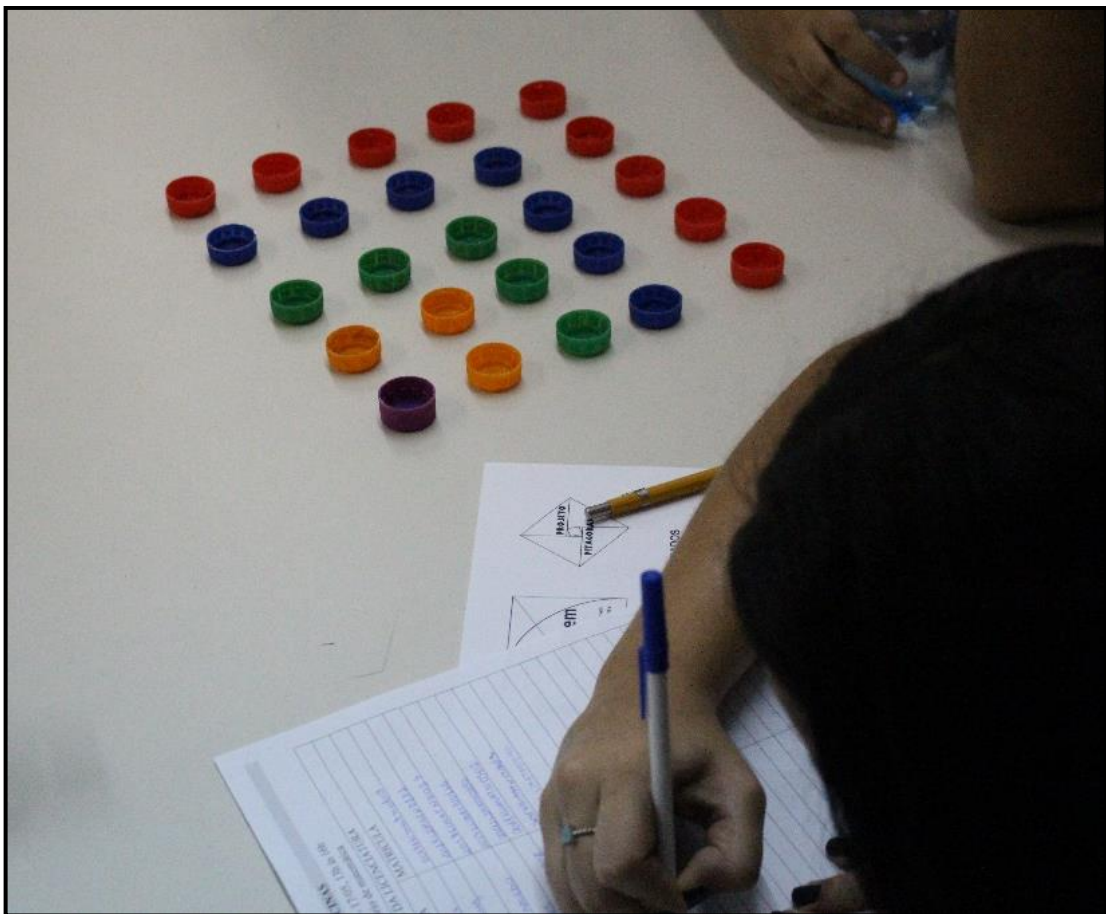
$$r = 2$$

$$a_n = 2n - 1 = g_4(n)$$

Ordem	Quantidade de tampinhas por <i>camada</i>	TOTAL $f_4(n)$	Expressão numérica
1	1	1	$1 = 1$
2	1, 3	4	$1 + 3 = 4$
3	1, 3, 5	9	$1 + 3 + 5 = 9$
4	1, 3, 5, 7	16	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
5	1, 3, 5, 7, 9	25	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
...
10	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19	100	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19 = 100$
...
37	1, 3, 5, 7, 9, ..., 73	1369	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 73 = 1369$
...
∞	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., $2n - 1$	n^2	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n - 1 = n^2 = f_4(n)$

Fonte: Bonatto, Dutra e Chaves (2018, p. 204)

Figura 20 – Número quadrado de 5ª ordem



Fonte: Acervo do próprio autor

Ao enunciar que “cada termo é um número elevado ao quadrado, então para saber qual é o próximo é só pegar e elevar ao quadrado” (Quadro 3 – *ipsis verbis*), entendemos que “elevar ao quadrado” (Quadro 3 – *ipsis verbis*) constitui-se como uma estipulação local e, portanto, forma um núcleo que designamos por núcleo do elevar cada termo ao quadrado. A lógica contida na operação realizada por Ruiva, desencadeada pelas tarefas de abstração e generalização – que envolve as operações de comparação, discriminação e agrupamento de objetos – e de dedução e inferência – a partir do estabelecimento de conclusões lógicas – tal como proposto em Luria (1990), facultou que a mesma produzisse conhecimento para o fato de que “O n ésimo termo será n ao quadrado, é isso!” (Quadro 3 – *ipsis verbis*).

Os objetos tabela, sequência numérica, organização geométrica e por cores com as tampinhas (figuras 19 e 20) constituíram-se como texto e as tarefas de percepção – a partir da nomeação e agrupamento de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas com respostas a ilusões visuais – no espectro apresentado por Luria (1990), possivelmente auxiliaram na produção de conhecimento, visto que, mesmo antes de iniciarmos a atividade, os componentes desse grupo separaram as tampinhas por cores.

Assim, a partir do processo de recursividade, identificado no resíduo de enunciação “cada termo é um número elevado ao quadrado” (Quadro 3 – *ipsis verbis*), constitui-se como o novo, no qual o dado foi a formação de uma sequência numérica de quadrados perfeitos

1, 4, 9, 16, 25, ..., 100, ..., 1369, ...

e a justificação – “então para saber qual é o próximo é só pegar e elevar ao quadrado” (Quadro 3 – *ipsis verbis*), é advinda das estipulações locais por ela apresentadas.

A partir da observação dos números em destaque (figura 19), o grupo 1 deduziu que a distribuição gnomônica (organização por cores na figura 20) constituía os termos de uma P.A. e, nesse sentido, estavam diante da soma desses termos, o que pode ser observado nos seguintes resíduos de enunciação: “Entendi o que você está querendo dizer, é a soma de P.A. não é?” (Quadro 4 – *ipsis verbis*) e “É isso mesmo! A quantidade de tampinha que esse número quadrado tem é soma de uma P.A, pode por aí para você ver” (Quadro 4 – *ipsis verbis*).

No diálogo estabelecido entre os atores Nerd e Cabeça (Quadro 4) identificamos que a sequência de números ímpares formada a partir de constituição de cada novo gnomon,

caracterizou-se como objeto e então entendemos que pudemos formar um núcleo de gnomons. Apesar desses atores produzirem conhecimento para a formação da sequência dos números quadrados, advinda da correspondência de que cada termo equivale ao quadrado da respectiva ordem

$$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 25 = 5^2, \dots, 100 = 10^2, \dots, 1369 = 37^2, \dots$$

– “o número quadrado da primeira ordem é o um, o de segunda ordem é o quatro, o de terceira ordem é o nove” (Quadro 4 – *ipsis verbis*) – e que cada termo pode ser obtido como a soma dos gnomons formados e que esses possuem uma quantidade ímpar de termos

$$1 = 1^2$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$\vdots$$

$$100 = 10^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$\vdots$$

– “o quadrado da primeira ordem é o um, o de segunda ordem é o um mais três, que vai ser igual a quatro, o quadrado de terceira ordem será o um mais três mais cinco, que vai dar nove, vai sempre somando números ímpares como você viu aí” (Quadro 4 – *ipsis verbis*). À luz do MCS, veremos que esses atores, alunos de um curso de licenciatura em Matemática e professores de Matemática com regência de classes, produziram significados para a soma sucessiva dos n primeiros números ímpares inteiros positivos

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

apesar de não terem verbalizado dessa forma. Dizer que não produziram conhecimento à enunciação a soma sucessiva dos n primeiros números ímpares inteiros positivos é o quadrado de n , ou ainda, que

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

é realizar uma leitura pela falta e isso não nos interessa. Observemos que esses atores falam na direção de soma de números ímpares (“Se a gente sair somando os números ímpares, vamos achar os números quadrados. Isso está parecendo alguma coisa, só que está fugindo” (Quadro 4 – *ipsis verbis*)) e assim, esta soma pode ser entendida como um texto, mas também entendemos que a leitura desse texto permitiu que o constituíssem como um interlocutor, pois falavam nessa direção, e o resíduo de enunciação antecedente como uma legitimidade. A conclusão a que chegaram constitui-se como o novo e a soma de P.A (enunciação do ator Nerd) como dado, cuja justificação é

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 2n - 1$$

A tarefa de percepção a partir da nomeação e agrupamento das tampinhas e das figuras geométricas formadas e, conseqüentemente, o preenchimento da tabela (figura 19) caracterizam o que denominamos de trânsito entre os MPS geométrico e aritmético. Ao usarem a técnica de recursividade (como respostas a ilusões visuais, comparação, discriminação e agrupamento de objetos – termos da sequência), a partir dos valores obtidos na tabela para chegarem ao termo geral de um número figurado quadrado

$$f_4(n) = n^2$$

Deparamo-nos com um processo que denominamos de trânsito entre os MPS aritmético e algébrico. Com esses respectivos trânsitos, identificamos que houve uma migração em relação aos núcleos, mas não significa um abandono, como apontado em Silva (2003). Com essa dinâmica, a formação do objeto geométrico deixou de ser novo e passou a ser dado, cuja justificação reside na visualização das figuras (textos imagéticos) como consequência dos estímulos visuais na operação de percepção e agrupamento das tampinhas, conforme exposto nos diálogos travados (Quadro 4).

5.3.1.2 Relativa à caixa de diálogo de participantes do grupo 4 (Quadro 5)

Pelos resíduos de enunciação dos atores Bonezinho, Caracol e Surfista (Quadro 5) entendemos que estes fixaram-se no MPS geométrico (figura 21) e, possivelmente, um limite epistemológico inviabilizou o trânsito ao MPS aritmético, por exemplo. Isso não quer dizer que não produziram significado, tanto que realizaram a distribuição gnomônica (figura 6) considerando o princípio de organização de cores (figura 21); porém, não identificamos no diálogo em análise que produziram significado em outra direção. Encerrar a análise neste ponto constitui-se como uma leitura pela falta, então vamos adiante!

Figura 21 – Operações envolvendo número quadrado com o grupo 4



Fonte: Acervo do próprio autor

O resíduo de enunciação “Tem que pedir mais tampinha né? Para continuar fazendo, para fazer esse quadrado. Mas acho que esse quadrado da trigésima sétima ordem deve ficar muito grande não é?” (Quadro 5 – *ipsis verbis*) nos leva ao entendimento de que esse ator, Caracol, fixou-se na relação quantidade, ordem e forma, mas não na generalização e no processo de recursividade, ou seja, esse ator produziu significado para a relação entre as quantidades, a ordem ocupada e as respectivas formas geométricas. Já em relação (objetos constituídos por ele nesse processo) à generalização e ao processo de recursividade não podemos dizer que produziram significado ou não. Toda produção de conhecimento é da ordem da enunciação e, como nos preocupamos em interferir minimamente no processo, destacamos a intervenção do

ator Morena – “Gente, espera aí. Não seria o trinta e sete elevado ao quadrado?” (Quadro 5 – *ipsis verbis*).

O ator Surfista, produz significado na mesma direção que Caracol, mas propõe uma dinâmica para resolver o impasse – desenhar no papel os pontos como se fossem tampinhas – e isso nos leva ao entendimento de que a representação de um modelo geométrico (desenhado) é um novo objeto e repetir o processo trinta e sete vezes é legítimo, pois, a relação quantidade, ordem e forma é o dado e o novo passa a ser o modelo geométrico desenhado no papel, realizando distribuição gnomônica.

A intervenção do ator Morena foi a deixa que o monitor queria para sugerir outros modos de produção de significado solicitando que analisassem as colunas da tabela (figura 19) para tentarem identificar o que Morena disse.

Assim, pelo menos em relação aos diálogos do quadro 5, podemos dizer que Bonezinho, Caracol e Surfista se fixaram em um núcleo que denominamos de núcleo da distribuição gnomônica.

5.3.1.3 Relativa à caixa de diálogo de participantes do grupo 3 (Quadro 6)

Analisando os resíduos de enunciação da caixa de diálogos do grupo 3, entendemos que os atores desse grupo constituíram como objetos:

(i) a ordenação dos termos (1ª ordem, 2ª ordem, 3ª ordem...) – como, por exemplo, o resíduo de enunciação do ator Atuante [Vamos seguir pela tabela, olha aqui (apontando para coluna da ordem e comparando com a 3ª coluna já preenchida – figuras 19 e 21), está vendo? É só seguir como está na tabela];

(ii) a distribuição gnomônica como parcelas – como, por exemplo, o resíduo de enunciação do ator Horácio [É verdade; tem os números quadrados aqui e na mesma linha também os números que vão juntando, somando cada um].

(iii) os termos da sequência de números quadrados – como, por exemplo, o resíduo de enunciação do ator Experiente [Tem que tomar cuidado para não confundir a sequência enquanto soma, confundir o termo que queremos encontrar com o número ímpar que estamos somando].

Ao constituírem tais objetos, trouxeram-nos como estipulações locais a soma das tampinhas em distribuições gnomônicas que constitui o núcleo que designamos por núcleo da soma. Todavia, a soma, inicialmente era um algo novo, que no processo passou a ser dado, ao se fixarem em tal estipulação. Diríamos que a intervenção do ator Experiente [O professor falou de ter que generalizar para ver o termo geral. Viram como ele explicou? Tem que formar um quadrado com as tampinhas primeiro] foi uma possível tentativa de migração de núcleo; entretanto, por estarem impermeáveis ao MPS geométrico (não construíram os quadrados com as tampinhas, fixaram-se em um único quadrado de ordem 5 apresentado em *slide* pelo professor) não produziram significados para o processo de generalização, como proposto pelo ator Experiente, insistindo em somar, tal como podemos observar nos resíduos de enunciação dos atores Horário [É só somar os números do mesmo jeito da tabela, a gente vai achando os outros números], Rabo de Cavalo [Vamos pôr no papel aqui então, mas vai ficar muita coisa para somar, tem que fazer até o trigésimo sétimo] e Atuante [Mas tem uma sequência, observa só, a gente tem que somar os números seguindo essa sequência].

5.3.2 Tarefas com números triangulares

Os grupos 1 e 3, de imediato, formaram seus triângulos com as tampinhas, separando por cores diferentes os gnomons (figura 22).

Figura 22 – Formação de números triangulares do grupo 1



Fonte: Acervo do próprio autor

5.3.2.1 Grupo 1

Esse grupo recorreu ao uso das tampinhas coloridas (figura 22) na tentativa de desenvolverem um raciocínio para estabelecer uma relação que pudesse levar à generalização do n -ésimo termo, o que se configurou como um limite epistemológico, pois, tentaram operar de forma que passassem do MPS geométrico diretamente ao algébrico, sem analisarem aritmeticamente. Tal tentativa, os tornou impermeáveis aos trânsitos do geométrico para o aritmético e conseqüentemente do aritmético para o algébrico. Concomitantemente, esse grupo tentou estabelecer uma relação com o termo geral dos números quadrados (tal como podemos observar no quadro 7), trabalhados anteriormente. Sendo que à lógica das operações, comum aos quadrados, era o da recursividade, mas a lógica que utilizaram foi a de que: *Se a área de um triângulo, de mesma base e altura de um retângulo, é a metade da área do retângulo, então o número correspondente a um termo triangular deve ser a metade do correspondente quadrado, visto que*

$$S_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{S_{\text{quadrado}}}{2}$$

Os membros do grupo 1 produziram significado algébrico, na tentativa de relacionar a formação de um número triangular com o modo de calcular a área do triângulo numa possibilidade de vislumbrar algum caminho à generalização dos números figurados triangulares. Eles recorreram ao uso de uma quantidade maior de tampinhas (figura 7) para formar um quadrado na tentativa de se encontrar um padrão para assim generalizar e se estabelecer uma relação para o termo geral dos triangulares.

Analisando o resíduo de enunciação do ator Cabeça [Olha a quantidade de tampinha que a gente usa nos triângulos: o primeiro é 1, como no quadrado, o segundo é 3, o terceiro é 6 e o quarto é 10... A sequência é diferente da dos quadrados. Primeiro aumenta 2, depois aumenta 3, depois 4... no quadrado a gente só somava os números ímpares, mas agora não é assim, tem pares e ímpares] identificamos que esse ator produziu significado para a distribuição numérica, considerando ordem e termo da sequência de triangulares, como consequência de uma soma.

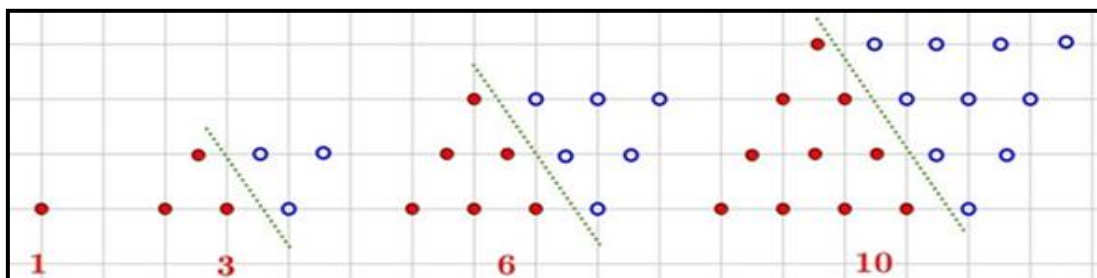
Tabela 1 – Distribuição de números triangulares $f_3(n)$ até a 5ª ordem

Ordem	1	2	3	4	5
$f_3(n)$	1	3	6	10	15
Soma	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	1 + 2 + 3 + 4 + 5

Fonte: Acervo do próprio autor

Também identificamos que, geometricamente, os atores desse grupo produziram significado para distribuição espacial, tal como apresentamos a seguir³⁴ (figura 7), ou seja, eles dobraram o número de tampinhas para construir uma sequência de números retangulares ou oblongos ainda baseados na ideia de área de um triângulo.

Figura 7: Sequências de números triangulares a partir de um número retangular



Fonte: Chaves et al. (2018)

³⁴ Optamos por apresentar a figura 7 novamente, com o propósito de facilitar ao leitor a visualização da mesma.

Em um primeiro momento não interferimos, mas pedimos que não descartassem a figura dos números retangulares (figura 7).


Na plenária, o professor regente sugeriu a seguinte organização a partir da tabela a seguir (figura 23) para usarmos a técnica de recorrência ou recursividade. Ao expor em *slide* a tabela, tal como grafada (figura 23), os atores de outros grupos, de um modo geral, identificaram que se tratava da soma dos termos de uma P.A, onde

$$a_1 = 1, r = 1 \text{ e } a_n = n$$

Portanto, a partir da fórmula da soma dos termos, chegamos que


$$f_3(n) = S_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

Figura 23 – Slide da tabela de números triangulares



NÚMEROS FIGURADOS – TRIANGULARES

Ordem	Quantidade de tampinhas por linha	TOTAL $f_3(n)$	Expressão numérica
1	1	1	1 = 1
2	1, 2	3	1 + 2 = 3
3	1, 2, 3	6	1 + 2 + 3 = 6
4	1, 2, 3, 4	10	1 + 2 + 3 + 4 = 10
5	1, 2, 3, 4, 5	15	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
...
10	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10	?	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 10 = ?
...
37	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37	?	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 37 = ?
...
n	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, ..., 37, ..., n	?	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n = ?



Fonte: Chaves et al. (2018)

Porém, como os componentes do grupo 1 estavam impermeáveis a produzirem outros significados que não fossem o de

$$\frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}$$

ou seja, não operavam em outro campo semântico, os mesmos não produziram significado para a enunciação do ator Cabeça [... o primeiro é 1, como no quadrado, o segundo é 3, o terceiro é 6 e o quarto é 10... Primeiro aumenta 2, depois aumenta 3, depois 4...].

Não satisfeitos, os componentes do grupo indagaram ao professor regente se havia outra maneira de fazer. Os mesmos apresentaram o esboço dos retangulares (figura 7) e insistiram na ideia de

$$\frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}$$

O professor, então, sugeriu que trocassem a ideia de base e altura por número de tampinhas distribuídos por linhas e colunas, como numa distribuição matricial, mas mantendo sempre como referência a ordem. Assim, na segunda ordem temos duas linhas e três colunas, na terceira ordem temos três linhas e quatro colunas, na quarta ordem temos quatro linhas e cinco colunas. Assim realizou a seguinte pergunta: Na n-ésima ordem, quantas linhas e colunas teremos?

O ator Cabeça prontamente responde que teríamos n linhas e n + 1 colunas e que deveria dividir por dois, pois na formação do retângulo havia o dobro da quantidade de tampinhas.

Daí, no grupo 1, pelo menos o ator Cabeça, passou a produzir o seguinte conhecimento: o termo geral não pode ser

$$f_3(n) = \frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}$$

mas sim


$$f_3(n) = \frac{\textit{quantidade de tampinhas de uma linha} (n+1) \times \textit{quantidade de tampinhas de uma coluna} (n)}{2}$$

Nessa prática, com o propósito de um resgate histórico previamente planejado, o professor regente perguntou se era possível chegarmos ao termo geral, além das maneiras supracitadas. Os licenciandos e professores permaneceram calados, mas um aluno de Ensino Médio do Ifes, que não identificamos o grupo no qual estava inserido, participante dessa prática, sugeriu que somássemos o primeiro com o último, o segundo com o penúltimo, o terceiro com

antepenúltimo etc. (figura 24). Ou seja, ele estava sugerindo um princípio que designamos por soma gaussiana.

Figura 24 – Soma gaussiana

Soma *gaussiana*



$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & 96 & + & \dots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 101 & & 101 & & 101 & & 101 & & 101 & & \dots & & 101 & & 101 & & 101 & & 101
 \end{array}$$

$$S_{100} = \frac{(100 + 1) \cdot 100}{2} = 5050$$

Fonte: Chaves et al. (2018)

No caso dos números triangulares, sugerimos a seguinte lógica das operações (figuras 25 e 26).

Figura 25 – Soma gaussiana de triangulares

Ordem

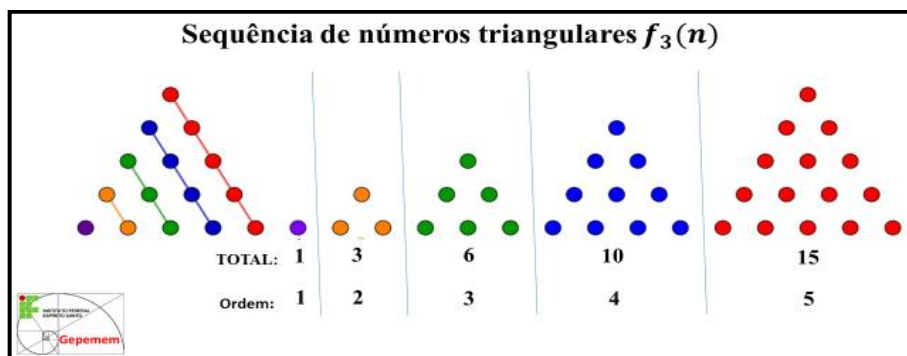
1	1	TOTAL	
2	1, 2 →	$1 + 2 = 3$	
		$2 + 1 = 3$	
		$3 + 3 = 6$ →	$\frac{2 \times 3}{2} = 3$ TOTAL
3	1, 2, 3 →	$1 + 2 + 3 = 6$	
		$3 + 2 + 1 = 6$	
		$4 + 4 + 4 = 12$ →	$\frac{3 \times 4}{2} = 6$ TOTAL
4	1, 2, 3, 4 →	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	
		$4 + 3 + 2 + 1 = 10$	
		$5 + 5 + 5 + 5 = 20$ →	$\frac{4 \times 5}{2} = 10$ TOTAL
n	1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n →	$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = ?$	
		$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = ?$	
		$(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$	$f_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Fonte: Chaves et al. (2018)

Intencionalmente, a organização e distribuição de cores foi pautada no princípio de tarefa de percepção proposta em Luria (1990), quando levamos em conta a nomeação e agrupamento

de cores, nomeação e agrupamento de figuras geométricas e respostas a ilusões visuais com o propósito de estabelecermos conclusões lógicas a partir de informações dadas, por recursividade (tarefa de dedução e inferência).

Figura 26 – Slide da sequência de números triangulares

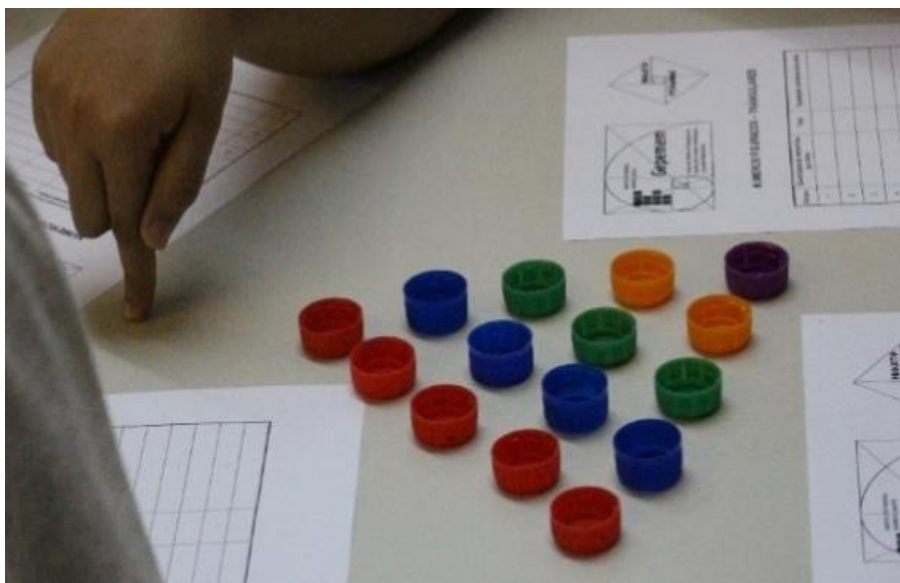


Fonte: Chaves et al. (2018)

5.3.2.2 Grupo 2

O grupo 2 também trabalhou construindo os números triangulares separando as fileiras por cores das tampinhas (figura 27).

Figura 27 – Formação de números triangulares do grupo 2



Fonte: Acervo do próprio autor

5.3.2.3 Grupo 3

A partir dos triângulos formados (figura 23), o grupo 3 seguiu somando as novas distribuições gnomônicas (tabela 2).

Tabela 2 – Distribuição gnomônicas de números triangulares $f_3(n)$ até a 5ª ordem

Ordem	1	2	3	4	5
Soma	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	1 + 2 + 3 + 4 + 5

Fonte: Acervo do próprio autor

Em todas as tentativas de se chegar ao n -ésimo termo, na ação com os números triangulares; ou seja, após efetuarem o trânsito entre os MPS geométrico para o aritmético, eles deixaram de operar geometricamente e se fixaram em obter somas, na tentativa de, a partir dos resultados numéricos, obterem o termo geral, expresso algebricamente. Esse grupo, desde o início, quando apresentamos os números quadrados, apontou para uma maior impermeabilidade, quando comparado com os demais grupos. Seguiu fazendo a soma termo a termo para alcançar o termo solicitado. Essas ações, sob a ótica do MCS, evidenciam que estavam dispostos a operar apenas no campo aritmético, não se disponibilizando a produzir significados em outra direção. Na leitura do MCS, tal impermeabilidade acabou por gerar um limite epistemológico, de transpor o MPS aritmético para o MPS algébrico.

5.3.2.4 Grupo 4

O grupo 4 optou por somar as fileiras, ou seja, pela distribuição gnomônica (figuras 6 e 23) e conseguiu estabelecer uma relação para o próximo número triangular, outro ator desse mesmo grupo tentou encontrar uma relação usando uma soma para estabelecer o termo geral, no entanto, por estarem impermeáveis ao trânsito entre os MPS aritmético e algébrico, enfrentaram dificuldades para encontrar, por recorrência, o termo geral dos números triangulares.

5.3.3 Tarefas com números pentagonais

5.3.3.1 Grupo 1

Ao iniciarmos o trabalho com os números pentagonais, que passou a constituir-se como o novo (que é o foco da atividade ao resolvermos problemas), para esse grupo, a dinâmica de operar com números figurados, segundo nossa proposta, constituiu-se como dado (cujo foco encontra-se na tematização da lógica das operações) e a utilização da recursividade para obtenção do termo geral não se constituiu como legitimidade (“O que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade” (SILVA, 2003, p. 65)), pois procuraram efetuar um salto indo do MPS geométrico para o MPS algébrico, sem transitar pelo MPS aritmético, fato que transformou-se em um limite epistemológico.

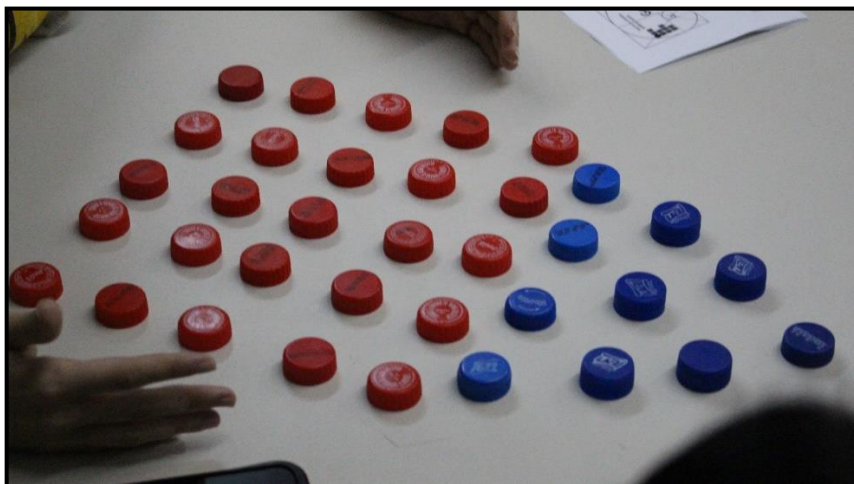
Inicialmente, o objeto constituído pelo grupo foi: formas pentagonais. Desse objeto os componentes migraram para formas pentagonais como junção de quadrados e triângulos (figura 28), porém, mesmo migrando de objetos, não migraram de núcleo, mantendo-se em MPS geométricos.

O grupo seguiu formando geometricamente os números pentagonais com as tampinhas, separando cada gnomom por cores diferentes (figura 15) e somando cada um, na busca de uma compreensão aritmética para acharem o termo geral (figura 18), segundo as orientações que já haviam sido desenvolvidas com os números figurados anteriores. Nesse ponto, o grupo manteve um trânsito mais fluido entre o MPS geométrico e o MPS aritmético, visto que traziam como dado as ações desenvolvidas com números quadrados e triangulares, como pudemos observar no resíduo de enunciação do ator Nerd [Vamos ver o que a gente faz para generalizar agora com os pentagonais. A gente já sabe como foi com o quadrado e com o triângulo. A gente tem que reparar de quantas em quantas tampinhas vão aumentando em cada número pentagonal para entender essa sequência que é diferente das outras].

Paralelamente, o grupo 1 estabeleceu uma relação de formação dos números pentagonais, envolvendo os números triangulares e quadrados, como pudemos observar no resíduo de enunciação do ator Cabeça [Esse pentagonal, se você juntar as tampinhas e deixar mais reto fica como um quadrado e a parte de cima um triângulo, olha só, é um pentagonal também. O que vocês acham disso, será que a generalização tem a ver com os quadrados e os triângulos

juntos?]. O interessante foi que esse ator chegou a um resultado histórico que foi desenvolvido por Leonard Eüler (figura 28).

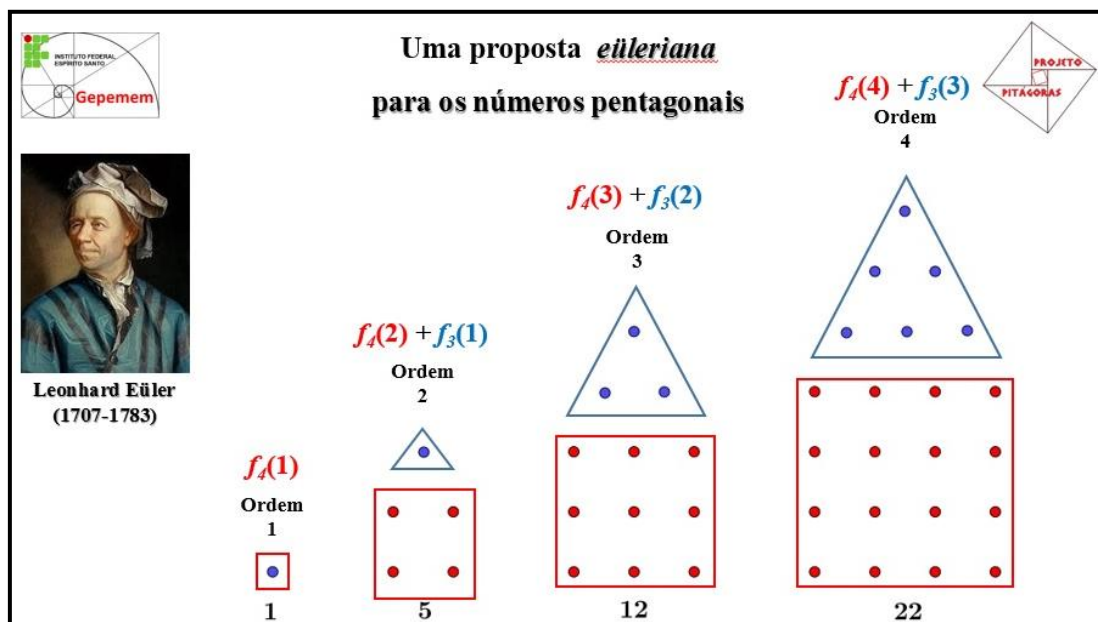
Figura 28 – Formação de números pentagonais na dinâmica eüleriana



Fonte: Acervo do próprio autor

O *slide* relativo à proposta eüleriana (figura 5 que reproduzimos a seguir) só foi apresentado na plenária, após as devolutivas apresentadas pelos grupos.

Figura 5: Fórmula de Eüler para números pentagonais



Fonte: Chaves et al. (2018)

Identificamos que o grupo se manteve impermeável às enunciações do ator Ruiva [Essa sequência com o pentagonal é muito estranha; olha só como eles vão aumentando, primeiro coloca mais quatro tampinhas, depois mais sete, depois mais dez... a gente vai somando as

fileiras do mesmo jeito que antes], não conseguindo assim produzir significado algébrico para a sequência sugerida pelo mesmo (tabela 3), isso porque fixaram-se no MPS geométrico, tentando generalizar sem recorrer ao preenchimento da tabela (figura 18); isto é, tentaram realizar um trânsito direto entre o MPS geométrico e o MPS algébrico, o que se constituiu como um limite epistemológico.

Tabela 3 – Distribuição de números pentagonais $f_5(n)$ até a 5ª ordem

Ordem	1	2	3	4	5
$f_5(n)$	1	5	12	22	35
Soma	1	1 + 4	1 + 4 + 7	1 + 4 + 7 + 10	1 + 4 + 7 + 10 + 13

Fonte: Acervo do próprio autor

Isso pudemos identificar nas enunciações dos atores Ruiva e Nerd (quadro 9), pois traziam como dado as ações desenvolvidas com números quadrados e triangulares.

Quadro 9 – Fragmentos do quadro 8

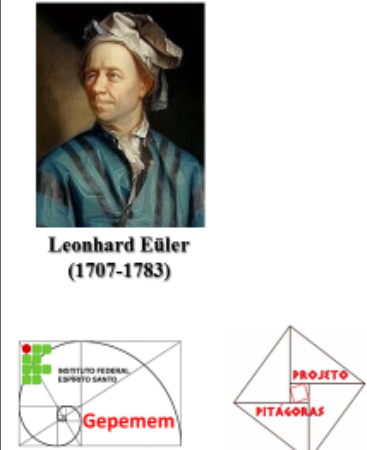
[...]
Ruiva – <i>Vamos tentar assim para ver (anotando na folha)... você colocou um quadrado de quantas tampinhas embaixo e quantas tampinhas no triângulo em cima? (anotando na folha).</i>
Nerd – <i>Dá a mesma quantidade de tampinha! Cara! Isso tem a ver sim, mas não estou conseguindo pensar em nada mesmo assim.</i>
Ruiva – <i>É... já tentamos com as fórmulas do quadrado e do triângulo para tentar ter alguma ideia de generalizar com esse pentagonal... mas não está dando em nada...</i>

Fonte: Autor da pesquisa

Por estarem impermeáveis ao uso da tabela (tabela 18), mesmo identificando que cada pentagonal é formado por um número quadrado e um número triangular, não estabeleceram uma generalização para o termo geral dos pentagonais, possivelmente por tentarem o que, usualmente nos meios acadêmicos, denomina-se de “pulo do gato”, ou seja, queimar etapas na lógica das operações.

Tomando a ideia desses atores – do ator Cabeça [Esse pentagonal, se você juntar as tampinhas e deixar mais reto fica como um quadrado e a parte de cima um triângulo, olha só é um pentagonal também. O que vocês acham disso, será que a generalização tem a ver com os quadrados e os triângulos juntos?] – desenvolvemos a seguinte tabela (Figura 29).

Figura 29 – pentagonais como soma de quadrados e triangulares



Ordem	TOTAL	Soma de Quadrado com Triangular	
		Quadrado	Triangular
1	1	1	0
2	5	4	1
3	12	9	3
4	22	16	6
5	35	25	10
...
10	145	$f_4(10)$	$f_3(9)$
...
37	2035	$f_4(37)$	$f_3(36)$
...
n			$f_5(n) = f_4(n) + f_3(n-1)$

Fonte: Chaves et al. (2018)

E, a partir do preenchimento dessa tabela, como já havíamos determinado os respectivos termos gerais de números triangulares e quadrados, algebricamente efetuamos o seguinte desenvolvimento:

Se $f_4(n) = n^2$

e $f_3(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

então, $f_3(n-1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$

Assim, $f_5(n) = f_4(n) + f_3(n-1)$

isto é, $f_5(n) = n^2 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{(3n-1) \cdot n}{2}$

No entanto, da tabela 3, verificamos que a distribuição gnomônica das tampinhas era dada pela série

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots$$

que representa a soma dos termos de uma P.A onde

$$a_1 = 1 \text{ e } r = 3$$

Logo, o número de termos de cada gnomon pode ser dado como o termo geral dessa P.A, ou seja,

$$g_5(n) = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$$

Daí,

$$f_5(n) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 3n - 2$$

que implica na soma dos termos de uma P.A onde o n -ésimo termo é $3n - 2$.

É provável que, a escassez de tempo tenha proporcionado a instauração de limites epistemológicos, não permitindo que os integrantes desse grupo desenvolvessem algebricamente o que já haviam constatado: que cada pentagonal é a soma de um quadrado com um triangular.

Para evitarmos processos de impermeabilização e limites epistemológicos como os apresentados, sugerimos em nossos planejamentos que, ao invés de propormos uma oficina ou um minicurso de quatro horas, que o façamos em atividades de formação em cursos de, pelo menos, vinte horas, ampliando a discussão do uso da técnica da recursividade, das abordagens históricas e de possibilidades didático-pedagógicas à utilização do estudo de padrões numéricos no ensino básico.

6 PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional que desenvolvemos possui o título Números figurados planos em formação de professores e o confeccionamos nos moldes de um guia didático, destinado a professores (em exercício ou em formação) da Educação Básica.

Nesse compêndio, narramos algumas práticas que desenvolvemos em minicursos e oficinas que planejamos e ministramos, constituintes dos nossos cenários de pesquisa e, assim o fizemos, ao longo do Projeto “Pitágoras: em (e além do) teorema”. Nessas oficinas e minicursos, apresentamos práticas envolvendo ações e operações desenvolvidas e aqui apresentamos na forma de atividades envolvendo números figurados planos: quadrados, triangulares, pentagonais e hexagonais.

No guia em questão, além das atividades, apresentamos nosso aporte teórico e as bases históricas a respeito dessa temática associada à Aritmética Pitagórica.

Objetivamos com esse guia oferecer aos leitores uma possibilidade de se trabalhar no viés da Teoria da Atividade e do MCS, com vistas à possibilidade de ir além da relação dicotômica de erro ou acerto.

Todas as práticas apresentadas foram planejadas considerando ações e operações que permitissem transitar pelos MPS geométrico (analisando as formas), aritmético (realizando contagem, preenchendo tabelas e formando sequências numéricas) e algébrico (consultando as tabelas preenchidas e utilizando técnicas de recursividade para obtenção do termo geral).

Não intencionamos, com a narrativa apresentada, trazer ao leitor um caráter prescritivo, mas tão somente expor os caminhos percorridos apontando possibilidades de se trabalhar no viés investigativo, trabalhando concomitantemente com Geometria, Aritmética e Álgebra.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho proporcionou um aprendizado abrangente a respeito da produção de conhecimento matemático, apontando-o como produção de significado dado pelo nosso discurso. O percurso histórico foi fundamental ao entendimento a respeito de como alguns pensamentos matemáticos se edificaram.

A possibilidade de entender como a Geometria e a Aritmética se inter-relacionam foi possível ao nos debruçarmos no estudo da Matemática grega, em que um de seus maiores expoentes está em Os Elementos, bem como em nosso próprio objeto de pesquisa, os números figurados. O que nos levou à conclusão sobre como a Matemática grega era algo essencialmente geométrica em sua base. A pesquisa em questão nos apontou como essa inter-relação se processa e como pode ser uma noção chave e fundamental para o ensino e aprendizagem da Geometria, Aritmética e Álgebra.

Tal entendimento elucidou caminhos à proposta adotada em processo de formação de professores. Ao adotar o MCS como principal referencial metodológico-epistemológico, nos ampliou uma visão para uma produção mais abrangente do conhecimento matemático e também integradora ao nos dizer que a produção de significado é o aspecto central de toda cognição humana. De tal forma, entendemos que se deve proporcionar práticas que possibilitem aos educandos um espaço para que eles produzam significados matemáticos na educação básica escolar, sem delimitação por “áreas”, ou melhor dizendo, a Matemática não se dá em segmentos separados mas sim em sua totalidade.

O MCS, no presente trabalho, nos proporcionou um entendimento de que a Matemática se dá na ordem do discurso, e o que temos dela são os significados que produzimos em nossa vivência.

Com nossa proposta em formação de professores, foi possível vivenciarmos e analisarmos alguns significados produzidos e o trânsito entre os MPS geométrico, aritmético e algébrico que os atores em questão construíram no processo. Com o MCS nos propusemos analisar significados produzidos e não fazer juízo de valor a respeito do que fora feito durante a dinâmica proposta. Pudemos observar como os grupos trabalhavam e interagem, e assim percebemos possíveis causas de limites epistemológicos ocorridos durante a dinâmica. E, com

isso, pudemos observar momentos de impermeabilidade de alguns membros, que os levavam a atingir limites epistemológicos, por não produzirem significados às orientações dos monitores e de não ouvirem, com reflexão, uns aos outros. Ficou perceptível para nós a questão de que, ao não seguirem a proposta pré-estabelecida na dinâmica por nós planejada (forma geométrica com as tampinhas, percepção dos gnomose das sequências numéricas colocadas, formação do termo geral como forma algébrica) os atores estavam mais suscetíveis a se depararem com limites epistemológicos. O que pontuamos aqui são possíveis causas que levaram os atores no processo a não conseguirem produzir significados em uma direção diferente da qual estavam operando, bem como a não produção de significado algum em determinado momento. Portanto, não se trata de uma leitura pela falta. Os resultados da presente pesquisa nos apontaram que as etapas (trabalhar com a forma geométrica usando tampinhas, trabalhar com a tabela anotando as sequências percebidas na formação de cada termo e chegar à generalização ao encontrar o termo geral), ao serem seguidas tal como propostas na dinâmica planejada, tendem a minimizar possíveis limites epistemológicos.

Nosso entendimento é de que, um MDP não pode e ser encarado como um fim, pois, à luz da Teoria Sócio Histórica de Lev Semyonovich Vygotsky, o objeto é secundário em relação ao sujeito. Todavia, a utilização de material concreto seguindo os princípios de tarefas propostos em Luria (1990), facilitaram o trânsito entre os MPS supracitados. Por outro lado, mais do que o uso do MDP – que poderia ser feito com pedras, conchas, pedaços de madeira etc. – a relevância está na atividade (nos moldes leontievianos) que envolveu as ações de coletar, reciclar, separar e discutir no espaço escolar o destino dado ao lixo, no caso tampinhas de garrafas PET. Tais ações possibilitaram que puséssemos em curso a ideia de Patrick Geddes de que um aluno em contato com a realidade do seu ambiente desenvolve atitudes criativas em relação ao mesmo. Dessa forma, oportunizamos que a comunidade escolar envolvida incorporasse uma análise da realidade socioambiental, deixando assim de ignorar as consequências dos seus atos.

Por fim, pelo caminho percorrido, entendemos o conhecimento matemático como uma via pela produção de significados, dado pelo discurso. Portanto, nossos resultados apontam uma Matemática escolar que, ao ser ensinada sem a segmentação (por áreas) imposta por modelos tradicionais de processos de ensino e de aprendizagem, em um ambiente de investigação que considere válidos todos os significados produzidos como legítimo, considerando a bagagem que cada um traz consigo, pode resultar em compreensão de um pensar matemático fértil.

Esse entendimento nos aponta que tal prática é um caminho a considerar no enfrentamento do ETM, bem como dos fracassos apontados na problematização desse trabalho.

Esta pesquisa de mestrado abre portas a possíveis aprofundamentos do tema, em se tratando da investigação dos MPS matemáticos acerca dos números figurados e em como abranger práticas em processos de ensino e de aprendizagem que possam proporcionar uma visão holística na prática da Educação Matemática, entendendo como legítimos todos os MPS e os trânsitos que os percorrem dada a atividade em ação. Por falta de tempo e espaço que não se tem numa dissertação de mestrado, não foi possível investigar o que denominaríamos de raízes dos MPS matemáticos; isto é, procurar responder o que torna possível a nós discursos que possibilitem a produção de significados matemáticos. Tal pesquisa poderia apontar novas perspectivas no entendimento da nossa relação constante com números e formas. É o que deixaremos para um futuro próximo em um trabalho de pesquisa acadêmica.

Ao desenvolvermos esta pesquisa, o aprendizado do MCS nos possibilitou repensarmos nossas práticas docentes. Passamos a ver e, sobretudo, ouvir o aluno de outra maneira. Saber de onde ele fala e porque fala passou a ser, para nós, essencial no processo de ensino. O entendimento de algumas ideias centrais do MCS, tal como processos de impermeabilização e descentramento e limites epistemológicos, foram fundamentais para procurarmos estabelecer um espaço comunicativo, não só com os atores da pesquisa, mas principalmente com nossos alunos, nas nossas aulas.

Em momento algum entendemos que percorremos o vasto campo dos números figurados. Há muito a se pesquisar, principalmente quando pensamos nos processos de ensino e de aprendizagem. Uma ideia futura, por exemplo, é nos dedicarmos aos números figurados espaciais (tetraédricos, icosaédricos, octaédricos etc.). Outra possibilidade, àqueles que tiverem interesse, é percorrer os princípios da Teoria dos Números para se trabalhar, por exemplo, em um processo de formação de professores, em uma perspectiva interdisciplinar, com Tecnologias da Informação ou História da Matemática.

O caminho é longo, mas ao mesmo tempo instigante e, talvez por isso, tenha suscitado tanto interesse de vários matemáticos ao longo da História.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Manoel de Campos. **A matemática na idade da pedra**: filosofia, epistemologia, neurofisiologia e pré-história da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- ARTIGUE, Michèle. Ingénierie Didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? **Les Dossiers des Sciences de L'Éducation**. n. 8, p. 59-72, 2002.
- BALDINO, Roberto Ribeiro. Assimilação solidária: escola, mais valia e consciência cínica, **Revista Educação em Foco**, Juiz de Fora, n. 1, v. 3, mar./ago., p. 39-65, 1998.
- BALDINO, Roberto Ribeiro; CARRERA de SOUZA, Antonio Carlos. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. In: **Resumo técnico**: relatório do sistema diretório dos grupos de pesquisa no Brasil, UNESP, IGCE, Rio Claro: CNPq, 1997.
- BERLINSKI, David. **Os Elementos de Euclides**: uma história da Geometria e do poder das ideias. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2018.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **O professor de Matemática nas escolas de 1º e 2º graus**. São Paulo: Moraes, 2005 [1987], p.13-29.
- BONATTO, Lucca Jeveaux Oliveira; CHAVES, Rodolfo; ZOCOLOTTI, Alexandre Krüger; DUTRA, Tiago Magno de Souza. Padrões numéricos pitagóricos: significados produzidos por professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2019, Cuiabá. **Anais...** Cuiabá: SBEM-MT, 2019.
- BONATTO, Lucca Jeveaux Oliveira; DUTRA, Tiago Magno de Souza; CHAVES, Rodolfo. Números figurados na observância e investigação de padrões aritméticos-geométricos. In: ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6; ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, 4; ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2018, Santa Maria. **Anais...**, Santa Maria: CCNE-UFSM, 2018. p. 194-208. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/edicao_6. Acesso em: 03 jul. 19.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. Reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1978 [1974].
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: quantificação, registros e agrupamentos**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC/SEB, 2014.
- BROLEZZI, Antonio Carlos. **A arte de contar**: história da Matemática e Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Coleção História da Matemática para professores).

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984 [1948].

CATTANEI, Elisabetta. **Entes matemáticos e metafísica: Platão, a Academia e Aristóteles em confronto**. São Paulo: Loyola, 2005.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produções de significados matemáticos na construção dos números reais**. 2014. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

CHAVES, Rodolfo; CEZAR, Mariana dos Santos; TEIXEIRA, Bea Karla Flores Machado. Regimes de verdade e discursos na manutenção de uma Matemática como instrumento de exclusão. **Revista Abakós**. v. 8. No prelo.

CHAVES, Rodolfo *et al.* Interface entre os modos de produção de significado em sequências de números figurados com uso de materiais didático-pedagógicos manipulativos reaproveitáveis. ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6; ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, 4; ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2018, Santa Maria. **Anais...**, Santa Maria: CCNE-UFSM, 2018. p. 57-68. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/educacao_6. Acesso em: 03 jul. 19.

CHAVES, Rodolfo; FERRARI, Vera Lucia Aniola; RODRIGUES, Patrícia Silva; IORA, MAÍSA. Teoria da atividade, produção de significado e interdisciplinaridade como sustentáculo a uma possível ideia de Educação etnomatemática. **Revista Eletrônica Debates de Educação Científica e Tecnológica**. Vitória, n. 2, v. 7, ago., p. 161-206, 2017.

CHAVES, Rodolfo; ZOCOLOTTI, Alexandre Krüger. **Projeto de Pesquisa Pitágoras: em (e além do) teorema**. Vitória: Ifes, 2017.

CHAVES, Rodolfo; VITÓRIA, Weverton Augusto da; NOVAIS, Ivonilton Pereira de. Possíveis diálogos entre Etnomatemática e Modelo dos Campos Semânticos (MCS). **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**. Vitória, n. 02, v. 05, out., p. 242-274, 2015.

CHAVES, Rodolfo; RODRIGUES, Caio Lopes. A questão da incomensurabilidade: do embaraço pitagórico às obras de Leonardo da Vinci – uma proposta de Educação Matemática pela História e pela Arte. ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4; ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, 2. **Anais...** Santa Maria: CCNE-UFSM, 2014a. p. 1-68. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Chaves_Rodolfo.pdf. Acesso em: 03 jul. 17.

CHAVES, Rodolfo; RODRIGUES, Caio Lopes. Técnicas de dissecação na demonstração do Teorema de Pitágoras: Euclides e Leonardo da Vinci. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, n. 01, v. 03, p. 60–71, 2014b.

CHAVES, Rodolfo. **(des)contínuos entre Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e Etnomatemática**. Plano de trabalho (Pós-doutorado) – PPG Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física. Área de Concentração Educação Matemática, linha de

pesquisa de Ensino e aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosóficos, históricos e epistemológicos. Santa Maria: CCNE – UFSM, 2015.

CHAVES, Rodolfo. **Material pedagógico na base nacional comum na linha da pedagogia da alternância: ensino de Matemática nas Escolas Família-Agrícolas**. Viçosa, MG: Departamento de Educação da UFV; Associação das Escolas Família-Agrícolas de MG, 2005.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?** 2004. 223 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

CHAVES, Rodolfo. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa**. 2000. 285 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

CHICONELLO, Luis Alexandre. **Números figurados e as sequências recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados**. 2013. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

COTA, Andreia Caroline da Silva. **Eüler e os números pentagonais**. 2011. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

CYRINO, Hélio. **Matemática & gregos**. Campinas: Ypsilon, 1986.

DEMO, Pedro. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

DEMO, Pedro. **Pesquisa e construção do conhecimento: metodologia científica no caminho de Habermas**. Rio de Janeiro: Tempo brasileiro, 1994.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Fundamentos de Aritmética**. 2.ed. rev. Florianópolis: Editora da UFSC, 2017 [1991].

DUARTE, Rosália. Entrevistas em pesquisas qualitativas. **Educar**. Curitiba, n. 24, p. 213-225, 2004.

EUCLIDES, **Os Elementos**. Trad. e Introd. BICUDO, Irineu. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2. Reimp. Campinas (SP): Ed. Unicamp, 2008 [2004].

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. v. 1. Trad. DOMINGUES, Hygino H. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. **Actividad, conciencia y personalidad**. México: Cartago, 1984.

LEONTIEV, Alexis Nikolaevich. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Moraes, 1978.

LINS, Romulo Campos; GIMÉNEZ, Joaquin. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia. Laus et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

LINS, Romulo Campos. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida. Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p.92-120.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários DEBATES Unesp).

LINS, Romulo Campos. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM São Paulo**, São Paulo, n. 1, set., p.75-91, 1993.

LURIA, Alexander Romanovich. **Desenvolvimento cognitivo: seus fundamentos culturais e sociais**. São Paulo: Ícone, 2005 [1990].

MARQUES, Sofia Cardoso. **A descoberta do teorema de Pitágoras**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. (Coleção História da Matemática para professores).

NOVAIS, Ivonilton Pereira de. **Dinâmica da produção de significado de construções pataxó por alunos de ensino médio em aula de campo**. 2017.169 f. Dissertação (Mestrado em Educação de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Ifes, Vitória, 2017.

OLIVEIRA, Marta. Kohl de. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 1997. (Pensamento e ação no magistério).

OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de. Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na formação de professores e Matemática. In: ANGELO, C. L. *et al* (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p.199-216.

OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de. **Sobre a produção de significados para noção de transformação linear**. 2002. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

POPPER, Karl Raimund. **Conjecturas e Refutações**: o progresso do conhecimento científico. Brasília: Editora da UNB, 1972.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2. Reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2014 [2012].

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, n. 04, v. 38, out./dez., p. 865-879, 2012.

SAD, Ligia Arantes. **Cálculo Diferencial e Integral**: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1999. 371 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

SANTOS, João Ricardo Viola dos; LINS, Romulo Campos. Movimentos de Teorizações em Educação Matemática. **BOLEMA**, São Paulo, n. 55, v. 30, ago., p. 325 - 367, 2016.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **BOLEMA**, São Paulo, n. 14, p. 66-91, 2000.

SILVA, Amarildo Melchhiades. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SOUZA, Maria Helena. **21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo**. São Paulo: Planeta Brasil, 2018. (Coleção 21).

TAHAN, Malba. **Os números governam o mundo**: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1972 [1965].

TAHAN, Malba. **Antologia da Matemática**. v. 1, 3. ed. São Paulo: Saraiva, 1967a [1959].

TAHAN, Malba. **Antologia da Matemática**. v. 2, 3. ed. São Paulo: Saraiva, 1967b [1959].

TEIXEIRA, Bea Karla Flores Machado. **Teoria dos grafos a partir do ensino médio**: uma abordagem no espectro do modelo dos campos semânticos. 2015. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2015.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011 [1988].

VYGOTSKY, LEV SEMYONOVICH. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.