INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DANIELLY FRAGA SANTANA

FORMAÇÃO INICIAL DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE DIVISÃO

Vitória
2018

DANIELLY FRAGA SANTANA

FORMAÇÃO INICIAL DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do campus Vitória do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Vitória

2018

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

S232f Santana, Danielly Fraga.
Formação inicial de licenciandos em matemática : um estudo sobre o conceito de divisão / Danielly Fraga Santana. – 2018.
170 f. : il. ; 30 cm

Orientadora: Maria Auxiliadora Vilela Paiva.

Dissertação (mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vitória, 2018.

1. Professores – Formação. 2.Professores de matemática – Formação. 3. Aritmética – Divisão. I. Paiva, Maria Auxiliadora Vilela. II.Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 370.71

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - CEFOR
Rua Barão de Mauá, 30 – Jucutuquara – 29040-860 – Vitória – ES

DANIELLY FRAGA SANTANA

FORMAÇÃO INICIAL DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE O CONCEITO DE DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 19 de Fevereiro de 2018

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Instituto Federal do Espírito Santo
Orientadora

Profa. Dra. Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo

Profa. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti
Instituto Federal do Espírito Santo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DANIELLY FRAGA SANTANA

SANTANA, Danielly Fraga; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. **O conceito de divisão na formação inicial do professor**. Vitória: Ifes, 2018. 50 p.

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 19 de Fevereiro de 2018

COMISSÃO EXAMINADORA

MAPaiva

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Instituto Federal do Espírito Santo

Orientadora

Sandra Aparecida Fraga da Silva

Profa. Dra. Sandra Aparecida Fraga da Silva

Instituto Federal do Espírito Santo

Barbara Lutaif Bianchini

Profa. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Alexandre Krüger Zocolotti

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti

Instituto Federal do Espírito Santo

Aos meus pais Olívia e Sérgio, pelo apoio na vida,
e meu esposo Júlio Henrique, por confiar muito em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as oportunidades que eu tive na vida. Todas as experiências são válidas. Sejam elas positivas ou negativas todas me tornaram a pessoa que sou hoje. Todas as alegrias, tristezas, desafios vividos neste período me tornaram uma pessoa mais forte.

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais, pelo apoio dado em todas as escolhas da minha vida. Por incentivarem meus estudos e por acreditarem mais em mim do que eu mesma. Agradeço, principalmente, as cobranças para que eu terminasse logo o mestrado e, mesmo que as cobranças não tenham me dado mais agilidade, enfim eu consegui!

O agradecimento mais que especial dedico ao meu esposo, que tanto amo. Obrigada por conseguir fazer com que eu tivesse tranquilidade, mesmo que no decorrer do caminho eu tenha me desestabilizado um pouco; devo a você os momentos de mais crença em mim e em meu potencial para realizar esta conquista. A caminhada foi longa, cansativa, mas compartilhando a vida ao seu lado tudo foi mais gratificante e, no fim, deu certo. Agradeço sua compreensão pelas noites que passei em claro por ansiedade ou estudando, e por me ajudar nesta jornada que, enfim, consegui concluir, te amo muito.

Aos meus amigos mais presentes e, por vezes, ausentes nessa trajetória. Sem o apoio de cada um isso não seria possível. Agradeço, principalmente, a Jéssica, Sabrine, Rosana e Josias, que estiveram mais presentes no decorrer desses anos, a amizade de vocês é muito especial para mim. Minhas desculpas aos amigos Mariana, Camilo, Rafaella, Amanda, Isabella, por ter estado bastante ausente nesses anos do mestrado.

Agradeço à Dora, minha orientadora, por apoiar e orientar o desenvolvimento do meu projeto de mestrado, de maneira que eu conseguisse ter minha realização pessoal com o conteúdo escolhido. E aos membros da banca que ajudaram a construir e aprimorar o trabalho que desenvolvemos.

Aos professores da Comat que, desde o início da minha trajetória acadêmica na docência, se tornaram espelhos e exemplos de vida para mim. Um agradecimento especial para os professores Krüger, Sandra, Alex, Dilza, que acompanharam mais de perto minha trajetória e meu crescimento profissional. O exemplo de cada um me transformou na pessoa que sou hoje.

Agradeço a turma de demanda social do mestrado do ano de 2015, nossa turma tinha uma sintonia especial e com vocês a trajetória foi mais gratificante. Agradeço as amizades realizadas e as que foram fortificadas durante esses dois anos de convivência. Agradeço principalmente a Kariely, por ter sido minha principal parceira nessa caminhada. Nem nos conhecíamos direito e vimos o quanto somos parecidas, desde o mesmo conteúdo de pesquisa, mesma orientadora e mesmas afinidades. Obrigada por todos os direcionamentos e apoio nesta jornada.

Por fim, agradeço a turma de licenciandos ingressantes no ano de 2016 e o professor regente da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I, que me receberam de braços abertos e muito contribuíram para o desenvolvimento da minha pesquisa. O meu crescimento acadêmico e pessoal se deve à contribuição de cada um de vocês.

O saber a gente aprende com os mestres e os livros. A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes. (Cora Coralina)

RESUMO

Esta pesquisa de mestrado tem por objetivo analisar a (re)construção de saberes relacionada ao conceito de divisão apresentada por alunos de uma licenciatura em Matemática de uma instituição federal. Para isso, foi realizada, no contexto da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I, uma intervenção em cinco encontros, com diferentes abordagens sobre o tema. Essa disciplina prevê o trabalho de construção dos conjuntos numéricos, suas operações e propriedades e, portanto, um ambiente propício para realizar esta pesquisa. Trata-se de um trabalho de natureza qualitativa, aproximando-se da pesquisa do tipo intervenção pedagógica. Os dados foram produzidos em três momentos, antes das intervenções, por meio de um questionário para caracterizar os participantes e identificar alguns conhecimentos prévios; durante as intervenções, com a socialização das respostas e pelas folhas respostas, cuja etapa teve também gravações em áudio e vídeo e observações da pesquisadora; e, após as intervenções, com aplicação de um questionário final, em que os participantes avaliaram o curso. Os dados produzidos foram descritos por episódios e analisados com base em três categorias relacionadas à teoria de registros de representação semiótica. A primeira contém registros de representação semiótica na língua natural, retratando a produção de enunciados de questões envolvendo divisão partitiva e quotativa. A segunda categoria engloba registros simbólicos numéricos utilizados em situações-problema, e a terceira refere-se aos registros simbólicos numéricos de questões diretas de resolução do algoritmo de divisão. De maneira geral, diante das intervenções propostas e das socializações, os licenciandos (re)construíram seus conhecimentos referentes ao conceito de divisão, bem como refletiram sobre o conceito estudado. O produto educacional é um livro direcionado à formação inicial do professor que ensina Matemática, composto por atividades aplicadas neste estudo em uma abordagem investigativa, privilegiando os conhecimentos prévios dos participantes. O objetivo desse material é contribuir com o trabalho dos formadores de professores e para a formação de licenciandos em Matemática, (re)construindo conhecimentos relacionados ao conceito de divisão.

Palavras-chave: Formação Inicial. Saberes docentes. Conceito de divisão.

ABSTRACT

This master's degree research aims in analysing the (re)construction of knowledge related to the concept of division of students enrolled in a Mathematics Degree at federal institution. For that, an intervention was carried out in a form of five meetings in the context of the Fundamentals of Elementary Mathematics I paper, with different approaches on the subject. This discipline covers the work of constructing the numerical sets, its operations and properties and is therefore, a favourable environment to carry out this research. It is a work of a qualitative nature, that approaches pedagogical intervention methodology. The data was collected in three moments, before the interventions through a questionnaire used to categorize the participants and identify some previous knowledge, during the interventions, through social interaction and by written answers (at this stage video and audio recordings and researcher`s observations were used), and, after the interventions through a final questionnaire, in which the participants evaluated the course. The data produced were described by episodes and analysed based on three categories related to the theory of registers of semiotic representation. The first contains records of semiotic representation using the natural language, portraying the production of statements of questions involving partitive and quotitive division. The second category encompasses record of numerical symbolic representation used in contextualized questions, and the third contains numerical symbolic registers of direct algorithm resolution issues. The analysis aimed in identifying the subject knowledge and the pedagogical content developed in the interactions and discussions promoted in the classroom. In general, the graduates (re)constructed their knowledge of the concept of division, as well as reflected on it. As an educational product a book was developed for the initial formation of Mathematics teacher, containing activities applied in this study using an investigative approach and prioritizing the participants' prior knowledge. This material aims in contributing to the work of lecturers and for the training of graduates in mathematics, (re)building knowledge related to the concept of division.

Keywords: Initial Development. Teacher knowled. Concept of division.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Cefetes – Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo
Ciem – Congresso Internacional de Ensino de Matemática
Comat – Coordenadoria de Matemática
Ebrapem – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
Educimat – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – campus Vitória
Enade – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
Grupem – Grupo de Estudos e Pesquisa em Práticas Pedagógicas de Matemática
Ies – Instituições de Ensino Superior
Ifes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Pibic – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica
Pibid – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
Proeja – Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos
OIT – Organização Internacional do Trabalho
SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
Semat – Semana da Matemática
Senai – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
Sipem – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo
Unesco – Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo, subdividido em quatro partes, apresenta a trajetória profissional e acadêmica da pesquisadora. Em seguida, têm-se os objetivos e a estrutura do trabalho e, no final, a apresentação da revisão bibliográfica que contribuiu para o delineamento desta dissertação.

1.1 UM CAMINHO PERCORRIDO

Em 2007, enquanto cursava o 3º ano do ensino médio, fui aprovada no processo seletivo do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), antigo Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo (Cefetes) Campus Serra, para ingressar no curso técnico subsequente de Automação Industrial. Essa escolha foi influenciada pelos meus pais e parentes próximos, pois algumas dessas pessoas fizeram curso técnico e, posteriormente, iniciaram o curso de engenharia. No segundo semestre de 2007, comecei o curso técnico no período matutino e de forma concomitante, cursei o ensino médio junto à turma de pré-vestibular à noite. No fim desse ano, prestei o vestibular para engenharia elétrica, mas não fui aprovada.

No ano de 2008, me dediquei ao curso técnico e, ao concluí-lo no primeiro semestre de 2009, participei e fui aprovada em um processo de seleção da Vale do Rio Doce para o Programa de Jovem Aprendiz. No fim desse ano, prestei vestibular para a Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) para o curso de Engenharia de Produção, considerando este um possível caminho profissional e, no Ifes, para licenciatura em Matemática, por ser a disciplina com a qual eu mais me identificava durante toda a educação básica. Tendo sido aprovada no Ifes, no primeiro semestre de 2010 estava estudando nos três períodos: no matutino e vespertino, no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (Senai), curso direcionado às possíveis atividades que desempenharia na Vale do Rio Doce e, no período noturno, licenciatura em Matemática.

No segundo semestre de 2010, comecei a trabalhar nos períodos matutino e vespertino na Vale do Rio Doce e, à noite, ia para a faculdade. Enquanto trabalhava na área técnica, com manutenção preventiva e corretiva de equipamentos eletrônicos de locomotiva e estudava na área de licenciatura, fui percebendo minha preferência e afinidade pela licenciatura em Matemática. Era perceptível o meu entusiasmo com a licenciatura em detrimento da atuação na área técnica, pois eletrônica era uma das disciplinas que mais encontrava dificuldades enquanto realizava curso técnico. Trabalhei na mineradora de julho de 2010 a março de 2011 e, antes de me desligar da empresa, participei do processo de seleção de bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) e, então, expus para minha mãe a vontade de me dedicar exclusivamente à licenciatura em Matemática.

Diante de seu apoio, a partir de abril de 2011, dediquei-me ao curso e às atividades relacionadas à licenciatura em Matemática. Iniciei também minha experiência com vivências em sala de aula via Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) Matemática, no subprojeto do ensino fundamental. Com essa oportunidade, vivenciei por três anos o cotidiano escolar e as dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado das quatro operações fundamentais da matemática, mas, principalmente, com a divisão.

> As dificuldades dos alunos com os algoritmos, frequentemente constatadas, deveriam obrigar os professores a “enfrentá-las” na aula, analisá-las e corrigi-las. Os erros que aparecem, como “reduzir a um algarismo”, “dividir novamente o resto” etc., devem ser rejeitados pelos alunos explicitamente e esta rejeição incluída dentro de seus conhecimentos (SAIZ, 1996, p. 183).

As dificuldades levantadas por Saiz (1996) são apenas alguns exemplos constatados em sala de aula com relação ao conteúdo de divisão. Existem ainda dificuldades em interpretar enunciados e resultados encontrados após realizar o algoritmo das operações, além da dificuldade dos professores em interpretar erros dos alunos. Assim, essas lacunas deveriam ser uma motivação para buscar metodologias que possibilitem aos alunos aprenderem com o próprio erro. Ao invés disso, soluções erradas acabam sendo, por vezes, ignoradas tanto pelos alunos quanto pelos professores, que não as utilizam como instrumento de investigação e aprendizagem.

Também tive oportunidade de ser monitora da disciplina Fundamentos da Matemática no próprio Ifes, interagindo com alunos que cursavam ensino médio e licenciatura em Matemática. Constatei mais uma vez dificuldades enfrentadas pelos alunos de diferentes modalidades de ensino com aprendizagem matemática nos campos aritmético, geométrico, algébrico, entre outros.

Em 2012, após ter vivenciado tudo isso, ingressei no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (Pibic), no projeto intitulado "Constituição da identidade docente de licenciandos de Matemática do Ifes/ Vitória a partir das inserções no espaço escolar". Nesse programa fui orientada pela Prof.ª Dr.ª Dilza Côco e participei do Grupo de Estudos e Pesquisa em Práticas Pedagógicas de Matemática (Grupem) e, na pesquisa, direcionei meu olhar para a formação inicial e aprendizagens docentes no contexto do estágio supervisionado. Os resultados da pesquisa podem ser observados nos trabalhos apresentados em eventos (SANTANA; CÔCO, 2013; CÔCO; SANTANA; MATTIUZZI, 2013). Já no trabalho de conclusão de curso, embora eu tivesse interesse em pesquisar sobre divisão com números naturais, não foi possível tratar desse assunto. Apresentei, como professora regente, ações e desafios na aprendizagem do discente com espectro do autismo (SANTANA, 2014).

Como meu desejo de pesquisar o conceito de divisão com números naturais permaneceu, decidi participar dos processos seletivos, de demanda social e da turma especial de servidores, para o mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat). Fui aprovada em ambos, mas optei pela turma de demanda social, dado que alguns colegas da licenciatura compunham essa turma, o perfil da turma era de licenciados atuantes em sala de aula e eu tinha a opção de afastamento para o mestrado, ao completar o período de estágio probatório.

Como egressa do curso de licenciatura em Matemática e servidora dessa instituição, a intenção foi contribuir para melhorar o ensino e aprendizagem no contexto de formação de futuros professores de matemática de educação básica. Diante da minha trajetória profissional e de um cenário de pouca divulgação de trabalhos em eventos sobre conceito de divisão no contexto de formação de professores, consideramos pertinente o desenvolvimento de nossa pesquisa.

Além disso, em um levantamento de trabalhos apresentados nos últimos eventos mais relevantes ocorridos no Brasil, no cenário de educação matemática, como Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (Ebrapem), Congresso Internacional de Ensino de Matemática (Ciem) e Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Sipem), percebemos que o número de trabalhos que abordam o conceito de divisão é reduzido e esse conteúdo no contexto de formação de professores é ainda menor.

O Ebrapem é um encontro anual e, no ano 2015, apenas dois trabalhos abordaram o conceito de divisão, sendo um deles de fração. No ano seguinte, no mesmo evento, encontramos cinco trabalhos, sendo dois deles do nosso programa de mestrado: um de minha autoria. Ao comparar o conteúdo, dentro do contexto de formação de professores, os números são ainda menores. No primeiro ano, nenhum estava nesse contexto e, no ano seguinte, apenas três.

No Ciem, evento que ocorre de quatro em quatro anos, em 2017, apenas quatro trabalhos analisam o conceito de divisão. Destes, três relacionam-se com o contexto de formação de professores. E no Sipem, evento que ocorre trienalmente, em 2015, dois trabalhos contemplaram o conceito de divisão, mas nenhum deles no contexto da formação de professores.

A publicação e disseminação de pesquisas podem contribuir para o desenvolvimento da educação matemática, com a aprendizagem de diferentes práticas em sala de aula acerca do conceito de divisão. Assim, após apresentar minha trajetória acadêmica e pessoal, na seção seguinte apresentaremos os objetivos desta pesquisa.

1.2 OBJETIVOS

Frente às possibilidades de pesquisa, temos como objetivo geral: **analisar (re)construções de saberes relacionados ao conceito de divisão de ingressantes em uma licenciatura em Matemática**. A fim de alcançarmos o objetivo geral, propomos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar saberes prévios a respeito do conceito de divisão que licenciandos apresentavam durante a disciplina;
- Analisar diferentes registros de representação semiótica que são utilizados pelos licenciandos na resolução das atividades;
- Identificar saberes matemáticos que emergem durante discussões e investigações sobre o conceito de divisão;
- Elaborar como produto educacional, um livro com uma proposta de trabalho a respeito do conceito de divisão na formação inicial de professores.

Para alcançar os objetivos, elaboramos questionários e uma intervenção para os ingressantes no curso de licenciatura em Matemática de uma instituição federal, no ano de 2016. As ações foram realizadas no contexto da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I, durante os meses de junho e julho de 2016, em uma proposta de diálogo e colaboração, com uma metodologia que visava estimular a reflexão nos envolvidos no estudo.

As vivências durante o desenvolvimento desta dissertação estão contempladas em artigos produzidos no decorrer do mestrado e nesta dissertação, na estrutura apresentada a seguir.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos. No capítulo 1, que está subdividido em quatro partes, apresentamos inicialmente a trajetória profissional e acadêmica da pesquisadora e o interesse pela temática do estudo desta pesquisa.

Posteriormente, apresentamos os objetivos da pesquisa, a estruturação do trabalho e, por fim, uma revisão bibliográfica de cinco trabalhos que apresentam eixos que se aproximam desta pesquisa como, por exemplo, conceito de divisão, saberes docentes e teoria de registros de representação semiótica.

No capítulo 2 apresentamos nossos referenciais teóricos, iniciando a discussão apresentando um panorama sobre a formação inicial de professores. Em seguida, apresentamos a teoria desenvolvida por Shulman (1986, 2015[1]) acerca da base do conhecimento para o ensino, posteriormente, discutimos a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), e finalizamos com algumas ideias relacionadas ao conceito divisão.

No capítulo 3 encontram-se os procedimentos metodológicos adotados. Como nossa pesquisa é de caráter qualitativo e se aproxima do tipo Intervenção pedagógica (DAMIANI ET AL., 2013), neste capítulo apresentamos algumas exigências desses autores. Inicialmente, descrevemos o contexto e as etapas da pesquisa, em seguida, os participantes são caracterizados e as intervenções são descritas. O capítulo é finalizado com a avaliação das intervenções, tanto pelos participantes da pesquisa quanto pelas pesquisadoras.

No capítulo 4 realizamos a análise dos dados que foram organizados em três categorias com base na teoria de Duval (2009). A primeira trata de registros de representação semiótica utilizando a língua natural, a segunda categoria engloba registros simbólicos numéricos utilizados para resolução de situações-problema, e a terceira trata de registros simbólicos numéricos em questões diretas de resolução do algoritmo da divisão.

No capítulo 5 apresentamos brevemente o produto educacional e finalizamos o trabalho no capítulo 6, apresentando considerações finais da pesquisa. Assim, esta dissertação apresenta alguns de meus anseios a respeito do ensino do conceito de divisão no contexto da formação inicial de professores e esperamos

---

[1] Esta obra é a tradução para o português de SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

que nossa pesquisa contribua para (re)construção do conhecimento apresentado pelos licenciandos sobre esse conteúdo.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentamos um breve resumo dos trabalhos utilizados como revisão de literatura. Essa etapa contribuiu para a delimitação de nossa pesquisa e a escolha dos nossos referenciais.

Com o intuito de selecionar obras que abrangessem conteúdos relacionados à nossa pesquisa, consultamos alguns meios de tecnologia, como o Portal de Periódico da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Realizamos uma busca de trabalhos sem restringir a data de publicação, com o descritor ‘conceito divisão matemática’. Diante dos trabalhos apresentados e devido ao distanciamento das pesquisas com nossa proposta, pois muitos tratavam de outros conteúdos matemáticos distintos da divisão ou não estavam relacionados com educação matemática, nessa base de dados, selecionamos apenas o trabalho de Megid (2012). Posteriormente, realizamos uma busca de em programas de mestrado e doutorado e as obras selecionadas para nossa revisão de literatura encontram-se no Quadro 1.

Quadro 1 - Resumo dos trabalhos da revisão de literatura

AUTOR	TÍTULO	TIPO	ANO
Leticia Guimarães Rangel	Teoria de sistemas – matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo – estabelecendo relações em um estudo colaborativo	Tese	2015
Ana Maria de Jesus	Construir o conceito da divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso	Artigo	2005
Maria Auxiliadora Bueno Andrade Megid	O ensino aprendizagem da divisão na formação de professores	Artigo	2012
Princila Carrati Segadas	A compreensão do teorema da divisão Euclidiana: do conceito à análise do resto	Dissertação	2013
Regina da Silva Pina Neves	A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores	Tese	2008

Fonte: Resumo organizado pela autora (2018).

O trabalho de Rangel (2015) é uma tese com tema central em números racionais, com foco na operação de divisão, e relacionou saber pedagógico do conteúdo, proposto por Shulman (1986, 2015), em articulação com a matemática elementar, proposta por Felix Klein (2009). A pesquisa foi realizada em um estudo coletivo com professores dos anos finais do ensino fundamental, que atuavam em escolas particulares ou públicas do Rio de Janeiro.

A autora analisou como experiências anteriores dos participantes da pesquisa influenciam a própria formação e como conhecimentos do conteúdo a ser ensinado e conhecimentos pedagógicos se articulam na formação e prática docente. A busca por essa articulação justifica-se pelas ideias de Felix Klein (2009), que aponta uma ruptura entre matemática escolar e matemática acadêmica, fazendo com que conhecimentos do ensino básico não se comuniquem com a matemática do curso universitário e entre a matemática do curso universitário e a que será ensinada na escola básica. Mostra assim, uma *dupla descontinuidad*e na formação inicial do professor de Matemática.

Em sua proposta metodológica, Rangel (2015) considera que o processo de investigação com base em dúvidas foi uma boa estratégia para desenvolver o saber do professor, pois propiciou autonomia e protagonismo na construção do próprio saber. A autora evidenciou pouca influência da licenciatura na prática docente, reafirmando resultados de seus referenciais teóricos e que o processo de reflexão colaborativa em suas dimensões conceitual e pedagógica privilegia exposição, questionamento e (re)elaboração do conhecimento matemático.

Para nossa pesquisa, o trabalho de Rangel (2015) foi importante para identificar autores que discutem saberes docentes e formação de professores. Além disso, reafirma nosso interesse em discutir, a partir do conceito de divisão, a articulação entre saberes escolares, aprendidos nos ensinos fundamental e médio ou em estudos anteriores e experiências da graduação.

Outra obra selecionada foi a de Jesus (2005) que trabalhou a construção do conceito de divisão por meio da resolução de problemas, em uma turma de 20 alunos do terceiro ano do ensino fundamental. O conteúdo de divisão estava implícito nos enunciados das questões e os alunos poderiam se apropriar do conceito de forma gradual, utilizando caminhos diferentes do algoritmo da divisão. Foram ressaltados dois sentidos que podem ser estudados na divisão, as divisões do tipo partitivo e a quotativo. A autora informa que o objetivo não era os alunos aprenderem a distinguir essas duas maneiras de dividir, mas o professor possibilitar tais experiências com diferentes tipos de situações.

As questões apresentadas por Jesus (2005) possibilitaram aos alunos uma vivência diversificada com ideias envolvidas na divisão e buscassem estratégias de resolução para além do algoritmo. As análises focaram um aluno em especial, que inicialmente era considerado indisciplinado por suas atitudes em sala de aula. No início da proposta foi possível verificar, no relato da autora, que o aluno apresentava resistência para trabalhar em grupo, por considerar seus colegas fracos com relação à aprendizagem. O desafio, então, não era só que a turma desenvolvesse satisfatoriamente no campo matemático, mas que soubessem trabalhar no coletivo, valorizando as potencialidades de cada um.

O artigo de Jesus (2005) encerra-se ressaltando que, apesar do progresso visível desse aluno, alguns de seus colegas que apresentavam sucesso em atividades rotineiras tinham frustração e consequentemente, desinteresse por esse tipo de tarefa. Dessa maneira, é importante mantermos atenção ao adotar esse tipo de estratégia de ensino. Por vezes, alunos aguardam ansiosos que o professor explique como devem proceder, visto que ainda não se sentem confiantes para serem autônomos e responsáveis pelo próprio aprendizado. A leitura do artigo foi importante para inserir a discussão acerca da divisão partitiva e quotativa e para definirmos o tipo de estratégica a ser adotada em nosso ambiente de pesquisa, visto que uma atitude similar propicia um ambiente rico em informações e respeito mútuo.

Outro trabalho na revisão de literatura foi Megid (2012), que aborda o resgate da trajetória de aprendizagem inicial da divisão por meio da escrita de memórias de licenciandos em Pedagogia. Por considerar que as alunas já apresentavam experiências com o conteúdo de divisão, foi trabalhada a (re)construção do conhecimento sobre o conceito de divisão, com uso de diferentes estratégias para resolução de atividades investigativas e argumentos que apoiavam suas ideias.

No início dos estudos da divisão de Megid (2012), foi lançado um desafio solicitando que lembrassem e relatassem como aprenderam o conteúdo de divisão na escola, descrevendo técnicas e sentimentos vivenciados nesse processo. Os relatos apresentados constituem uma concepção mecanicista e não crítica de aprendizagem que, segundo a autora, devem ser questionadas e problematizadas, principalmente na formação inicial de professores, para que esse ciclo não permaneça imutável.

Com a leitura do artigo de Megid (2012) ficou evidente que um ambiente propício e de respeito mútuo permite aos participantes compartilhar suas angústias, sem se sentirem inferiorizados, visto que diferentes opiniões e estratégias são valorizadas. Além disso, a estratégia adotada pela professora, com a apresentação dos grupos, contribuiu para criar um ambiente favorável à aprendizagem. Nessa etapa, a autora considera que mais importante que as respostas encontradas era a participação e a busca de argumentos para as resoluções. Os próprios alunos conduziram discussões e a socialização foi uma oportunidade de validar soluções encontradas. Os relatos dos participantes da pesquisa mostram, ainda, que os procedimentos propostos no decorrer da disciplina possibilitaram (re)significação do conceito de divisão e assimilação da perspectiva pedagógica para o ensino de matemática nos anos iniciais.

Outro trabalho analisado foi o de Segadas (2013). Seu interesse em pesquisar divisão surgiu de suas observações em turmas de Pedagogia entre os anos 2009 e 2011. Essa experiência serviu para a pesquisadora identificar dificuldades de licenciandos com as quatro operações, principalmente, a divisão. Essas dificuldades também foram constatadas com os ingressantes no curso de Matemática. Diante dessas vivências, a proposta foi trabalhar com professores atuantes no ensino fundamental, do 4º ano ao 6º ano, e licenciandos em

Matemática ou Pedagogia, na tentativa de suprir dificuldades relacionadas ao conceito de divisão.

Ao analisar a dissertação de Segadas (2013), identificamos, desde seu teste diagnóstico, uma diferença com relação à proposta deste trabalho. O primeiro é que suas questões são diretas, pedindo para resolver, por exemplo, a divisão de 183 por 9 e determinar quociente e resto. Diferentemente dessa dinâmica, nossas questões buscam uma abertura maior com relação às estratégias de resolução adotadas pelos participantes e caso, os licenciandos recorram ao algoritmo da divisão, analisaremos se eles determinam corretamente o valor do quociente e resto.

Outra questão que diferencia a dissertação de Segadas (2013) da nossa proposta de pesquisa é que, por vezes, a pesquisadora apresenta aos participantes possibilidades de resolução, e posteriormente avalia tais aprendizagens. Diferentemente disso, buscamos seguir uma dinâmica em sala de aula, a partir do que os licenciandos propõem como resolução. Apesar dessas diferenças, esse trabalho apresenta estratégias interessantes de questões, que auxiliam a direcionar o trabalho com o conteúdo da divisão.

Diante dos trabalhos apresentados, formulamos nossa proposta de ação junto aos licenciandos. Com a produção de artigos e organização dos dados para uma análise posterior, sentimos necessidade de complementar as ideias Shulman (1986, 2015) acerca de conhecimentos necessários para lecionar, com uma teoria que abordasse especificamente o conteúdo matemático. Procurando algo que oferecesse subsídio para tal análise, pensamos em utilizar a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, mas nos deparamos com pesquisas direcionadas ao primeiro ciclo do ensino fundamental e formação continuada de professores que lecionavam para esse público, tratando de uma abordagem mais inicial sobre o conceito de divisão.

Prosseguindo nas buscas, encontramos um artigo de Fávaro e Neves (2012) que apresenta um resumo da revisão bibliográfica realizada por Neves (2008) em sua tese. A pesquisa de doutorado foi desenvolvida com dois grupos de pessoas, o primeiro eram três adolescentes de uma escola pública em defasagem idade/série e o segundo eram dez licenciandos, sendo oito em Matemática e dois em Pedagogia. Apesar da proposta metodológica do trabalho ser diferente da nossa e, dos participantes já apresentarem uma vivência maior na licenciatura em Matemática, este trabalho foi importante, principalmente, pela revisão bibliográfica realizada.

Em uma ampla revisão bibliográfica, Neves (2008) fez um levantamento de trabalhos publicados entre os anos de 1999 e 2006 que discutiam conceitos de divisão e números racionais. Apesar de a revisão bibliográfica tratar de pesquisas relativamente distantes deste estudo, ela foi importante para conseguirmos delinear nosso referencial teórico. Ao analisarmos a tabela produzida pelo autor, com resumo de 55 pesquisas, observamos que os trabalhos tratavam quase que exclusivamente de alunos do ensino fundamental ou professores que ensinam para essas turmas e utilizam, principalmente, teóricos franceses para as análises.

Mesmo que os participantes tenham um perfil diferente do nosso, a leitura desse trabalho foi importante para determinar a possibilidade de usar a teoria de registros de representações semióticas desenvolvida por Raymond Duval. Após essa definição, buscamos trabalhos que tratavam dessa abordagem junto com o conteúdo de divisão, mas os trabalhos encontrados abordavam quase que exclusivamente números racionais ou funções. Dessa forma, optamos por trabalhos do próprio autor, como artigos e livros, que discutiam sua teoria e, decidimos utilizá-lo como referencial teórico.

Para finalizar, identificamos na leitura dos trabalhos de Jesus (2005), Megid (2012), Segadas (2013) e Neves (2008), diferentes enfoques que podem ser contemplados no estudo do conceito de divisão. Diante da diversidade de possibilidades para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, apresentamos no capítulo a seguir os referenciais teóricos que embasam e delineiam nossa pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, discutiremos teorias que embasam esta pesquisa. Primeiramente, abordaremos a formação inicial com base nas ideias de Ponte (2014) e Gatti (2014). Posteriormente, apresentamos as categorias da base do conhecimento para o ensino proposta por Shulman (1986, 2015), e finalizamos com a teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval (2012a, 2012b). Essa teoria será utilizada para análise dos dados matemáticos produzidos pelos licenciandos nas intervenções.

Antes de discorrer acerca das teorias propriamente ditas, consideramos relevante fazer uma breve discussão sobre conhecimento e saber. Essas duas palavras, consideradas como sinônimos por alguns dicionários, apresentam significados diferenciados por alguns autores. Para Gamboa (2009, p.13),

> Enquanto o conhecimento se refere à parte dinâmica, ao processo de qualificar perguntas e produzir as respostas novas, os saberes se referem ao produto, à resposta elaborada, fechada, empacotada, sistematizada para ser distribuída, divulgada e consumida.

Com essa definição, há uma ideia de que saber é algo fixo e imutável, enquanto conhecimento é algo mais dinâmico. Na verdade, consideramos que a aquisição de diferentes conhecimentos sobre um determinado conteúdo constitui um saber. E esse saber pode ser modificado por meio da aquisição de outros conhecimentos e da ressignificação de suas compreensões.

No entanto, corroboramos com Rangel (2015), quando considera que conhecimento abrange uma perspectiva objetivista e é algo externo que precisa ser alcançado pelo indivíduo, enquanto saber é uma perspectiva subjetivista e é próprio do sujeito. Embora haja uma distinção entre saber e conhecimento, utilizaremos neste estudo essas palavras sem carga de significados próprios de cada uma, respeitando a expressão utilizada pelos autores. Entendemos ainda que a teoria de Shulman (1986; 2015) não realiza essa distinção, pois em suas produções não há elementos com indícios de que ele se apropria de um significado ou outro.

2.1 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Como a pesquisa foi realizada em um curso de licenciatura em Matemática, trazemos uma breve discussão acerca da formação inicial e formação de professores proposta por Gatti (2010, 2014) e Ponte (2014).

A busca por uma melhoria na estrutura dos cursos de licenciatura tornou-se mais expressiva a partir da década de 80, quando houve uma ampliação das pesquisas que discutiam formação docente. Essas pesquisas afastaram-se do enfoque da perspectiva comportamentalista e experimental da década de 70 e passaram a promover estudos sobre ‘pensamento do professor’ e ‘conhecimento do professor’ (MISUKAMI, 2004). Nas duas últimas décadas do século XX foi proposto um novo paradigma de produção do saber docente, de maneira que o professor passa a ser visto “como aquele que reflete, investiga e constrói seu saber” (PAIVA, 2006, p. 92).

Segundo um panorama histórico da educação brasileira realizada por Diniz (2006), no período de 1970, o professor era considerado “um organizador dos componentes do processo de ensino-aprendizagem” (DINIZ, 2006, p.16) e, para garantir capacitação instrucional dos alunos, com o intuito de prepará-los para o mercado de trabalho, deveria apresentar um planejamento rigoroso. Nessa época, os estudos eram descritivos e baseados em investigações experimentais. Mais tarde, segundo Diniz (2006), a educação passou a ser vista como prática social, em que o professor exerce uma prática educativa transformadora. Nesse movimento de transformação, a partir de 1980, há um foco maior na formação do educador, privilegiando o caráter político da prática pedagógica e o compromisso do educador com as classes populares. O discurso governamental era da valorização educacional, mas houve uma redução de maneira geral nos recursos públicos destinados a essa área (DINIZ, 2006).

Dando continuidade ao panorama histórico realizado por Diniz (2006), a partir de 1990 os estudos focam a formação do professor pesquisador e se encontram atentos em compreender como o professor constrói a própria identidade profissional, e a concepção de professor reflexivo ganha espaço na discussão. Segundo o autor, uma preocupação desse período é a interação entre saberes aprendidos nas universidades e o que é ensinado nas escolas e os processos de formação continuada (DINIZ, 2006).

Apesar de esse processo histórico caminhar para a valorização do professor, seus saberes e identidade profissional, na prática esse processo de avanço da valorização docente não é tão linear. Nesse sentido, em pesquisa recente realizada por Gatti (2014) sobre formação inicial de professores para educação básica, são apontados alguns aspectos em um panorama nacional que requerem atenção. Os pontos ressaltados nesse artigo mostram uma fragilidade na formação do licenciando por meio de dados de pesquisas e políticas públicas que reforçam a desvalorização do profissional da área educativa. Entre esses pontos ainda frágeis das licenciaturas, Gatti (2014) ressalta algumas características emergentes, como estágios sem projeto e acompanhamento, elevado índice de evasão, características socioeducacionais e culturais dos estudantes, currículos fragmentados, improvisação de professores, entre outros aspectos.

Uma das fragilidades presentes na formação inicial dos licenciandos e ressaltada por Pimenta (2008) refere-se ao distanciamento entre teoria e prática e, consequentemente, a falta de desenvolvimento da identidade docente durante a formação. Pimenta (2008) considera que a identidade docente é desenvolvida com a prática e, como as disciplinas entre conteúdos específicos e didáticos não se articulam, fica a cargo do estágio supervisionado desenvolver tal capacidade. Apesar de essa responsabilidade recair sobre o estágio, muitas vezes, ele apresenta um caráter burocrático e não contribui para a constituição da identidade docente (PIMENTA, 2008; PIMENTA; LIMA, 2010).

Além disso, licenciandos ingressam na licenciatura com um conhecimento do papel docente advindo de suas experiências anteriores como alunos. Nessa perspectiva, o desafio da formação inicial é fazer com que licenciandos desenvolvam e aprimorem sua identidade docente, de modo que migrem da visão de alunos e expectadores de aula para a constituição de seu papel como professor.

Em estudo anterior, Gatti (2010) analisou alguns cursos de licenciatura e identificou que o de Matemática, quando comparado com os cursos de Letras e Ciências, apresenta um equilíbrio melhor entre disciplinas específicas e formação docente. Apesar disso, conhecimentos específicos são predominantes, "espelhando mais a ideia de um bacharelado do que licenciatura" (GATTI, 2010, p. 1373). Esse formato de 1930, conhecido popularmente por "3+1", ainda é praticado em algumas licenciaturas em Matemática. Nessa proposta, tanto bacharéis quanto licenciados cursam as mesmas disciplinas nos três primeiros anos, diferenciando-se no ano final. Na maioria das ementas analisadas, a autora observou que não há uma articulação entre as disciplinas de formação específica e de formação pedagógica.

> Com as características ora apontadas, com vasto rol de disciplinas e com a ausência de um eixo formativo claro para a docência, presume-se pulverização na formação dos licenciados, o que indica frágil preparação para o exercício do magistério na educação básica (GATTI, 2010, p.1374).

Essa declaração sugere que ainda hoje existe uma deficiência nos cursos que formam professores e reafirma a ideia de que Instituições de Ensino Superior (IES) "se pautam por uma tradição reificada de que licenciatura é apenas complemento de um bacharelado e não um curso de graduação pleno com perfil próprio" (GATTI, 2014, p. 36).

Embora haja uma proposta de distanciamento da característica 3+1 das licenciaturas e apesar dessa proporção entre disciplinas de conteúdos e de ensino ter se aproximado de uma distribuição igualitária nos currículos, Moreira (2012) considera que a separação entre essas disciplinas ainda se baseia no sistema 3+1. Para o autor, "o princípio basilar ainda é o mesmo: a separação entre as disciplinas de conteúdo e as disciplinas de ensino" (MOREIRA, 2012, p. 1140). Assim, disciplinas de conteúdo e ensino ainda são projetadas e executadas de maneira independente, o que ainda remete à estrutura de formação de professores advinda da década de 1930.

Uma maneira de se distanciar dessa perspectiva é a valorização de ações dos formadores de políticas públicas e de formadores de professores, que consideram que para se ensinar existem certos conhecimentos necessários ao professor. Nessa direção, “[...] uma boa formação matemática para o professor acaba produzindo um olhar único para a sala de aula da escola; único, no sentido de singular, um olhar que só o professor tem” (MOREIRA, 2012, p. 1144-1145). A partir dessa afirmação, identificamos a necessidade de propor disciplinas dentro da licenciatura que priorizem a aprendizagem matemática de maneira integrada com aprendizagem docente.

Nesse sentido, nossa proposta de intervenção caracteriza-se por utilizar situações fundamentais para estimular a reflexão dos licenciandos ao mobilizar estratégias para (re)construção de saberes relacionados ao conceito de divisão. Para isso, procuramos

> [...] conhecer bem os participantes – saber o que os preocupa, o que lhes interessa, até que ponto estão dispostos a questionar-se e a expor-se perante os outros e até que ponto estão dispostos a investir na formação enquanto processo de aprendizagem (PONTE, 2014, p. 354-355).

Corroborando com a ideia de que a formação é um processo de aprendizagem, ela se faz presente desde o ingresso na licenciatura. No decorrer desta pesquisa, procuramos então, incentivar os licenciandos a apresentar suas opiniões, ir ao quadro e mostrar uma estratégia de solução ou argumentar diante das dúvidas.

Nessa dinâmica, a interação entre conteúdo e pedagogia estabelece relação entre os conhecimentos matemáticos aprendidos e as necessidades das situações de prática do professor. Ponte (2014) afirma que essa articulação é insuficiente, pois é necessário estabelecer, firmar essa ligação, analisando em cada caso os aspectos matemáticos, didáticos e pedagógicos. É baseado nessa interação que:

> O professor e o futuro professor compreendem melhor um conceito ou representação matemática, [...] pensando nas tarefas que podem usar para o ensinar, analisando resoluções diferentes dos alunos e observando as suas dificuldades em compreender esse conceito, do que

> aprendendo esse conceito de forma totalmente abstrata, tal como ele surge num livro de Matemática (PONTE, 2014, p. 351).

Essa interação entre teoria e prática, além de ser uma recomendação para uma apreensão de conhecimentos necessários à docência, é uma garantia de lei, proposta pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em ensino superior e para a formação continuada. No capítulo V das diretrizes, intitulado “Da formação inicial do magistério da educação básica em nível superior: estrutura e currículo”, Art. 13, § 3º, temos que: “Deverá ser garantida, ao longo do processo, efetiva e concomitante relação entre teoria e prática, ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessários à docência” (BRASIL, 2015, p. 11).

Portanto, a necessidade de articulação entre teoria e prática no processo de formação inicial não deve se limitar somente ao estágio e de maneira desarticulada do curso. Dessa maneira, buscando a possibilidade de trabalhar com a prática e de formar professores pesquisadores, propomos nossas intervenções com licenciandos ingressantes no curso de Matemática. Nossas ações, que serão apresentadas nesta dissertação, buscam articular teoria e prática desde o início da formação docente e contribuir para se distanciar de estudos que “mostram que os currículos oferecidos pelas IES estão longe de realizar na prática esse conceito” (GATTI, 2014, p. 38).

2.2 SABERES DOCENTES

Ao falar sobre formação de professores, podemos pensar em diferentes teóricos que discutem esse tema, porém, ao considerar a proposta de articulação entre conteúdo e formas de ensinar, reportamos aos trabalhos de Lee Shulman (1986, 2015). Esse filósofo mudou o foco de seus estudos para a área educacional e se tornou um dos teóricos de referência na discussão sobre saberes para a docência ao desenvolver pesquisas que visavam melhorias no processo de ensino e aprendizagem, interligando conteúdo específico e metodologia. Diante de seu interesse na psicologia educacional, Shulman entre os anos de 1962 e 1963, começou a estudar a formação de professores e desenvolveu sua tese sobre pensamento de professores. Após algumas vivências, observações e pesquisas, elaborou sua teoria da base de conhecimento do professor e passou a se dedicar a esse enfoque (GAIA et al., 2007).

A relevância do trabalho de Shulman justifica-se por “suas obras terem, principalmente nas duas últimas décadas, influenciado tanto pesquisas como políticas de formação e desenvolvimento profissional de professores” (MISUKAMI, 2004, p. 34). Suas obras mais relevantes foram publicadas em 1986 e 1987 (esta última foi traduzida para o espanhol em 2005 e para o português em 2015) e ambos os trabalhos buscam delinear uma base de conhecimento para o ensino.

Diante do panorama histórico realizado por Shulman (1986) sobre pesquisas de formação de professores, percebemos que entre os anos de 1960 e 1975 o programa de processo-produto era investigado no cenário educacional norte-americano. O foco desse estudo era comportamentalista e buscava entender como o posicionamento do professor em sala de aula influenciava o desempenho dos alunos. O comportamento do professor era analisado sem considerar contexto e conteúdo, e ignorava o pensamento como elemento central de ensino. Apesar de alguns pontos negativos desse tipo de pesquisa, ela foi importante para que a aprendizagem dos alunos não fosse determinada, pelas ideias de classe social ou características familiares (MISUKAMI, 2004).

Uma melhora foi observada a partir de 1970, com o desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao pensamento, raciocínio e tomada de decisões. Porém, quando pesquisas envolviam professores, elas continuavam investigando somente o comportamento dos docentes em sala de aula. Avanços continuaram a ser observados com estudos sobre pensamento e saber do professor a partir de 1980, sob uma perspectiva interpretativa. Entretanto, apesar dos avanços, o saber dos professores acerca de sua área específica e como eles o representam durante o ensino permaneceram esquecidos em pesquisas.

A falta de pesquisas a respeito de ensino e programas de avaliação e certificação de professores que fizessem menção ao conteúdo e ao conteúdo específico foi denominada por Shulman (1986) como ‘paradigma perdido’ e objetivavam generalizar, simplificando a complexidade do ensino na sala de aula. A fim de diminuir esse desequilíbrio, Shulman e seus colaboradores desenvolveram um programa de investigação para identificar “como um aluno de faculdade bem sucedido transforma seu conhecimento em uma forma que estudantes da Educação Básica possam compreender[2]?” (SHULMAN, 1986, p. 8, *tradução nossa*).

Shulman (1986), ao definir ‘paradigma perdido’ e realizar pesquisas relacionando saber do professor com processo do ensino, englobando suas dificuldades, desafios, potencialidades, entre outras abordagens, buscou uma visão mais compreensiva do ensino. O desenvolvimento de pesquisas que relacionam conhecimentos necessários para docência e processo pelo qual conhecimentos profissionais são construídos foi pensado com base em dois modelos: “a base de conhecimento para o ensino e o processo de raciocínio pedagógico” (MISUKAMI, 2004, p.37).

A ideia básica da base de conhecimento para o ensino encontra-se nas possíveis respostas à pergunta: O que o professor precisa saber para ser professor? Misukami (2004) considera que esses conhecimentos são mais limitados na formação inicial, e se torna mais diversificada e flexível com experiências profissionais reflexivas. Apesar da base de conhecimento para o ensino começar a aparecer na formação inicial, é possível identificar indícios dessa construção do conhecimento que, posteriormente, transformará licenciandos em professores.

A base do conhecimento para ensino é apresentada por Shulman (2015) em sete categorias: a) conhecimento pedagógico geral; b) conhecimento dos alunos e suas características; c) conhecimento dos contextos educacionais; d) conhecimento dos objetivos, finalidades e valores educativos, e suas bases filosóficas e históricas; e) conhecimento do conteúdo; f) conhecimento do

[2] How does the sucessful college student transform his or her expertise in the subject matter into a form that high school students can comprehend?

currículo; g) conhecimento pedagógico do conteúdo. A fim de compreender melhor as categorias e a própria teoria, buscamos leituras complementares para esse fim. Ball et al. (2008) consideram que as quatro primeiras categorias, além de não serem foco de estudo de Shulman, abordam dimensões gerais do conhecimento do professor que eram pilares dos programas de formação de professores da época. As três categorias seguintes, segundo Ball et al. (2008), definem dimensões do conhecimento do conteúdo específico e juntas constituem o paradigma perdido, discutido anteriormente. Como essas três são as categorias priorizadas no estudo de Shulman (1986, 2015), elas serão consideradas nesta pesquisa.

Desde sua publicação mais relevante e difundida no cenário educacional, Shulman (1986) sugere que seja feita distinção de três categorias para compreender o conhecimento do professor com ênfase no conteúdo: a) o conhecimento do conteúdo; b) o conhecimento pedagógico do conteúdo; c) o conhecimento curricular.

O conhecimento curricular é a adaptabilidade do professor frente à proposta de programas curriculares relacionada às orientações quanto ao ensino de determinado conteúdo. O professor, de acordo com sua experiência e conhecimento do público, da diversidade da turma, deve determinar o que é adequado ou não a ser ensinado. Para esse fim, deve fazer a adequação de materiais exigida pelas demandas e de acordo com alternativas curriculares disponíveis para ensinar sua disciplina, seleciona as que ele considerar mais adequada. Esse conhecimento relaciona-se com a experiência e o conhecimento do professor acerca do contexto em que se encontra inserido.

O conhecimento curricular é subdividido por Shulman (1986) e apresenta dois aspectos. O conhecimento lateral do currículo trata da habilidade do professor de relacionar o conteúdo de sua disciplina de maneira articulada com as demais aprendizagens curriculares. Esse conhecimento envolve apresentar um determinado conteúdo, bem próximo da realidade do aluno, relacionando-o com outras disciplinas. Já conhecimento vertical do currículo relaciona-se “[...] com os tópicos e problemas que foram e vão ser ensinados na mesma matéria durante os anos anteriores e nos últimos anos da escola, e os materiais que os incorporam" (SHULMAN, 1986, p.10, tradução nossa). Entendemos que esse aspecto refere-se à maneira de ensinar algo que permita a compreensão de conteúdos futuros.

O conhecimento do conteúdo é considerado a fonte primária do conhecimento dos alunos, uma vez que "[...] se refere à quantidade e organização do conhecimento por si na mente do professor" (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa). Sendo o professor a primeira referência dos alunos, ele precisa compreender não só os conteúdos, mas o porquê os conteúdos são ministrados daquela maneira. Ao compreender essas características, terá a capacidade de entender "[...] porque o dado tópico é especialmente central para uma disciplina enquanto outro pode ser periférico" (SHULMAN, 1986, p.9, tradução nossa).

Nesse sentido, diante de um bom conhecimento do conteúdo, o professor será capaz de organizar o sequenciamento de sua disciplina e encontrar diferentes maneiras de explicar determinado conteúdo, bem como ter à disposição diferentes estratégias que contribuam para a compreensão de um determinado conceito. Apesar desse conhecimento não ser suficiente para torná-lo um bom professor, provavelmente essa é a característica central da base de conhecimentos para o ensino, pois é com um entendimento adequado do conteúdo que o professor será capaz de estabelecer relações com o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Assim, o conhecimento pedagógico do conteúdo torna-se a categoria mais relevante da base de conhecimentos para o ensino, pois incorpora o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo. É considerado um "[...] amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial da compreensão profissional" (SHULMAN, 2015, p.206).

Diante da importância desse conhecimento, o professor precisa garantir sua autonomia ao ensinar, utilizando diferentes alternativas para apresentação de suas ideias, algumas delas derivadas da investigação em sala de aula. Além disso, ele precisa encontrar:

> [...] as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações – em uma palavra, as formas de representar e formular o assunto que o torna compreensível para os outros (SHULMAN, 1986, p.9, tradução nossa).

Esse domínio do professor e a diversidade de suas ações, de estratégias de resoluções, de maneiras de ensinar, do entusiasmo da regência em sala, entre outras ações em sala de aula, permitem que conteúdos sejam apresentados de maneira que os alunos consigam compreender e reorganizar suas ideias.

É o conhecimento exclusivo da esfera docente e "[...] é, muito provavelmente, a categoria que melhor distingue a compreensão de um especialista em conteúdo daquela de um pedagogo" (SHULMAN, 2015, p.207). Essa diferenciação entre um especialista e um pedagogo, que aqui pode ser compreendido como professor de qualquer disciplina, pode ser facilmente compreendida por meio de um exemplo dado por Ball et al. (2008). Ao utilizar uma operação de subtração, os autores apresentam tipos de conhecimento que um professor precisa ter.

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 0 & 7 \\ - & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

Ao se deparar com uma solução, qualquer pessoa habituada com a operação consegue identificar se está certa ou errada, com base no resultado apresentado, sendo esse um conhecimento matemático comum. Porém diante de resoluções como:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 0 & 7 \\ - & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 3 & 0 & 7 \\ - & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 9 \end{array}$$

O professor precisa compreender resoluções incorretas, mais do que isso, precisa interpretar o erro cometido pelo aluno e reconhecer possíveis causas desse erro, pois o "ensino habilidoso requer ser capaz de interpretar a fonte do erro matemático" (BALL et al., 2008, p. 397). No primeiro erro, é possível perceber que, em cada coluna, o dígito menor foi subtraído do maior. Já no segundo desenvolvimento, transformou-se uma centena em dezenas e uma dezena em unidades. Ao desenvolver a subtração, essa foi realizada corretamente nas unidades e nas centenas, mas na subtração das dezenas; como as simplificações não foram evidenciadas, pode-se deduzir que o aluno subtraiu o menor algarismo do maior, encontrando um resultado incorreto.

O mesmo entendimento flexível, o professor precisa desenvolver ao se deparar com resoluções que não seguem o algoritmo das operações e se relacionam com uma maneira individual de raciocínio. Frente às resoluções apresentadas, o professor precisa compreender se o que foi realizado tem validade e o que está acontecendo matematicamente em cada caso. Entendemos que existem mais diferenças entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo, mas trouxemos o exemplo apresentado por Ball et al (2008) para ilustrar uma das diferenças entre essas duas categorias da base de conhecimento para ensino.

Os autores consideram que é importante realizar uma definição que não seja superficial ou abrangente. Consideramos que, com o uso do exemplo, a distinção entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo será mais bem compreendida, além de conseguirmos delimitar a fronteira entre um conhecimento e outro. A preocupação com essa delimitação é uma tentativa de conseguir definir esses dois termos chave de nossa pesquisa, que serão importantes para a análise dos dados produzidos.

Também consideramos que é importante o professor articular bem os conteúdos a serem ensinados e que, para tanto, deve ter domínio dos conceitos estudados. Esse domínio envolve a maneira de tratar e representar os objetos matemáticos, selecionando meios de tornar seu conhecimento compreensível para os outros. Assim, essas duas ações têm papel preponderante na construção dos conceitos matemáticos e possibilitam a ressignificação de conceitos que foram aprendidos, anteriormente, por seus alunos. Por isso, trazemos a discussão da teoria dos registros de representação semiótica desenvolvida por Duval (2012a, 2012b) para contribuir com a análise do conhecimento matemático do futuro professor.

2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

No desenvolvimento da teoria de registros de representação semiótica proposta por Raymond Duval, ele se dedicou a estudar como as representações dos objetos matemáticos influenciam a aprendizagem. Trata-se de uma abordagem cognitiva do aprendizado que busca minimizar possíveis dificuldades matemáticas (DUVAL, 2012a, 2012b).

A primeira dificuldade na aprendizagem dos alunos destacada por Duval (2012a) é o paradoxo cognitivo do pensamento matemático. O paradoxo cognitivo destacado pela teoria de registros de representação semiótica ocorre, pois "[...] de um lado, apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre os objetos matemáticos se torna possível" (DUVAL, 2012a, p. 268). Uma maneira de evitá-lo é compreender características que norteiam o desenvolvimento do pensamento matemático. A representação de um dado objeto pode ocorrer de duas maneiras.

> As *representações mentais* recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As *representações semióticas* são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2012a, p. 269).

Frente a esses dois tipos de representação, não devemos considerar representações semióticas subordinadas e apenas um meio de externalizar representações mentais do indivíduo. Ao analisarmos registros de representação semiótica, é preciso associá-la a um modo de pensar sobre o objeto matemático e uma maneira de desenvolver o raciocínio, além da organização e conceitualização do conteúdo estudado.

Corroboramos com Duval (2012a) ao considerar que representações semióticas promovem, além da comunicação, importantes atividades cognitivas, como desenvolvimento de representações mentais, realização de diferentes funções cognitivas e produção de conhecimento. Diante da interdependência entre representação mental e semiótica, percebemos que “o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação” (DUVAL, 2012a, p. 270).

A dificuldade de acesso aos objetos matemáticos ocorre porque eles não estão diretamente acessíveis, como em física, biologia, ou ciências, necessitando de representações semióticas para o objeto matemático, e isso faz com que muitas vezes esses elementos sejam confundidos. Como solução para se evitar tal confusão, o ponto estratégico para a compreensão da matemática é saber realizar a distinção entre objeto e sua representação (DUVAL, 2012a). Para isso

> A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado (DUVAL, 2012a, p. 270).

A coordenação de muitos registros para a apreensão conceitual mostra a interligação entre noesis e semiose. A semiose utiliza signos para apreensão ou produção de uma representação semiótica, e a noesis utiliza o pensamento para apreensão conceitual de um objeto. Ao considerar primeiramente a semiose, Duval (2012a) afirma que são necessárias três atividades cognitivas para a formação de um registro de representação. São elas: formação, tratamento e conversão.

A formação de uma representação identificável é o primeiro acesso a um registro de representação semiótica e essa produção que possibilitará realizar tratamentos. Trata-se de “uma representação de um registro dado” (DUVAL, 2012a, p. 271). Aqui, provavelmente se enquadra a interpretação do aluno de uma questão dada e a escolha de um registro semiótico para iniciar sua resolução. O tratamento de uma representação ocorre ao resolvê-la, mantendo-se no registro em que ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna (DUVAL, 2012a). O cálculo numérico ou o tratamento na língua natural é considerado como uma operação intrarregistro. Já a conversão de uma representação é uma transformação externa, ou seja, a transformação de um tipo de registro em outro como, por exemplo, da língua natural em cálculo numérico (DUVAL, 2012a; MORETTI; THIEL, 2012).

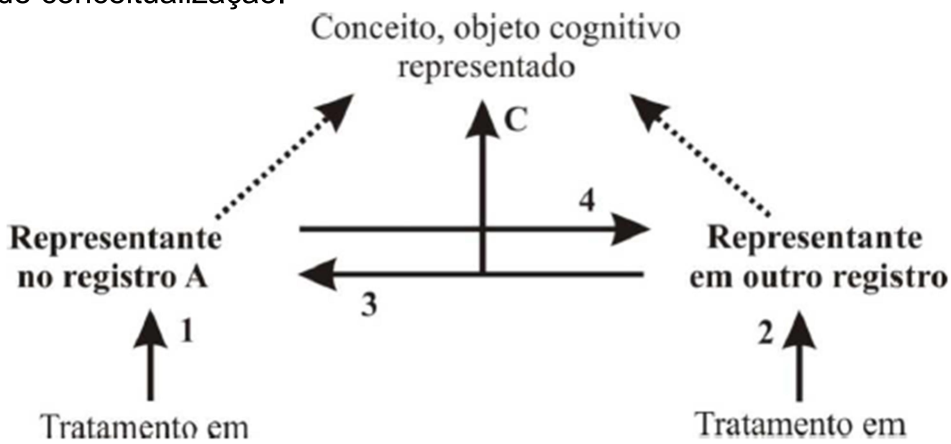
Com os estudos para o desenvolvimento da teoria, percebeu-se que somente formação e tratamento dos registros de representação semiótica eram considerados para organizar as sequências de aprendizagem. Considera-se erroneamente que “a conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro” (DUVAL, 2012a, p.277). No entanto, a conversão tem um papel importante na compreensão conceitual e, ao negligenciá-la, o aprendizado fica prejudicado. A ausência da conversão pode fazer com que o aluno somente se aproprie de um tipo de registro de representação, fazendo, então, com que ele confunda objeto matemático com sua representação.

Ao abordar a noesis, são apresentadas três maneiras de lidar com a coordenação dos registros de representação. Duas delas acerca da diversidade de registros no funcionamento do pensamento humano e uma sobre diferenciação entre representante e representado (DUVAL, 2012a).

A primeira categoria, centrada nos custos do tratamento, admite a escolha de um tipo de registro entre os que estão disponíveis, de maneira que o tratamento seja otimizado e econômico. A segunda categoria trata da complementaridade dos registros, em que se estabelece uma comparação entre os diferentes modos de representação de um mesmo objeto. “Esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido” (DUVAL, 2012a, p. 280). Assim, percebe-se que nessa categoria não há um único registro semiótico que atenda todas as necessidades informacionais e comunicacionais.

A terceira categoria, proposta com base em duas hipóteses, aborda a conceitualização por meio da coordenação de registros de representação. A primeira considera que “se o registro de representação é bem escolhido, as representações deste registro são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual apresentado” (DUVAL, 2012a, p. 280). Considera-se que é possível usar apenas um registro para que a significação funcione cognitivamente. Apesar de essa hipótese ser válida para alguns sujeitos que têm bom domínio da atividade matemática, negligenciar conversão de representação de um registro pode fazer com que insucessos sejam associados somente à noesis e não à semiose (DUVAL, 2012a). A segunda hipótese considera que por meio da coordenação de ao menos dois registros de representação cria-se a condição necessária para a compreensão integral de um conteúdo conceitual. Essa hipótese é ilustrada nas relações estabelecidas na Figura 1.

Figura 1 - Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: Duval (2012a, p. 282).

As transformações internas são ilustradas pelas setas 1 e 2, e as transformações externas pelas setas 3 e 4. Essas relações mostram a necessidade mais de um tipo de tratamento e necessidade da conversão de registros para a compreensão integral dos conceitos. As setas pontilhadas distinguem representante e representado, e compreender essa diferença também é importante para a apreensão conceitual.

A coordenação entre registros está longe de ser natural e, mesmo após um ensino de conteúdo que tenha abordado diferentes tipos de registro de representação, o isolamento existe. Ou seja, alunos não reconhecem um mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes.

Uma das hipóteses para o fenômeno é a variedade heterogênea de registros: a não congruência. O caso de não congruência, é de forma bastante resumida, a incompatibilidade de representação de partida e representação de chegada, ou seja, uma incompatibilidade semântica entre o enunciado e a representação semiótica a ser produzida.

Um exemplo que pode ser dado para entender o que seria congruência é a seguinte relação matemática: Um número adicionado ao dobro desse número é igual a 30. Que número é esse? Se fossemos transformar esse enunciado de língua natural para uma relação matemática, teríamos a seguinte equação: Sendo x o número a se determinar, $x+2x=30$. Nota-se que para cada palavra do enunciado há uma relação matemática que segue a ordem semântica do enunciado.

"[...] A conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão matemática" (DUVAL, 2012a, p.276) e, quando não há congruência, possibilidades de erros e dificuldades são maiores. É importante que o professor se atente para os erros apresentados pelos alunos, buscando identificar suas possíveis causas. Apesar dessa compreensão, é necessário um trabalho com atividades que estabeleçam e não estabeleçam relações de congruência. Dessa maneira, o desenvolvimento do raciocínio dos alunos será privilegiado.

Pelo que foi relatado, consideramos que a diversificação de atividades, situações e registros de representações privilegia a assimilação do conceito de um dado assunto, neste caso em particular, do conceito de divisão. Assim, os registros de representação semiótica produzidos pelos alunos são meios de auxiliar o professor a compreender a aprendizagem dos alunos.

> Os registros de representação semiótica são uma descrição do modo de funcionamento cognitivo subjacente a toda atividade matemática, qualquer que seja a área, atividades numéricas, geometria, álgebra, análise, etc. *O interesse dos registros de representação semiótica é determinar as variáveis didáticas que tocam diretamente os fenômenos de compreensão e de incompreensão no aprendizado da matemática* (DUVAL, 2012b, p. 323, *grifos nossos*).

Além disso, o acesso a diferentes representações e posterior análise dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos permite ao professor analisar os pontos fortes e frágeis do aprendizado dos alunos. Diante dessa tomada de consciência e análise crítica de suas ações, o professor deve buscar possíveis alternativas para melhorar o quadro observado referente ao aprendizado dos alunos. Essa diversificação permitirá ao aluno compreender o objeto e sua representação e, portanto, promoverá um distanciamento do paradoxo cognitivo.

Desse modo, no futuro, quando esses licenciandos se tornarem professores, deverão estar conscientes que devem auxiliar a promover nos alunos reflexão e compreensão de conceitos, de forma que os conhecimentos sejam desenvolvidos. A repetição e mecanização das ações não são capazes de promover um aprendizado considerado relevante. Para Duval (2012b, p. 309):

> Do ponto de vista matemático, a compreensão deve responder à exigência epistemológica de prova que é comum a todo conhecimento científico. Sem dúvida não se trata aqui de demonstrar no senso estrito do termo, mas é necessário ao menos poder explicar as propriedades utilizadas que “explicam” como se chega à solução de um problema e por que “isto dá certo”, ou por que outras soluções “não podem dar certo” mesmo quando elas são aparentemente evidentes.

É com base nessa ideia de compreensão que nossas discussões da intervenção foram pautadas. Como os participantes da pesquisa foram ingressantes no curso de licenciatura em Matemática, consideramos que não poderíamos exigir em um momento inicial o rigor de provas e demonstrações, mas pretendíamos desenvolver neles essa compreensão e a análise crítica das situações que lhes forem apresentadas. Corroboramos com Almouloud (2007, p.72) quando afirma que “falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão matemática”. Desse modo, pretendemos com nossa proposta de intervenção privilegiar o uso de diferentes registros de representação semiótica, e propiciar o desenvolvimento de um saber inicial acerca do conceito de divisão de maneira relevante para os licenciandos.

2.4 CONCEITO DE DIVISÃO

Esta seção contém algumas ideias relevantes para a (re)construção de saberes sobre o conceito de divisão. Como não foi possível desenvolver com o tempo disponível tudo que consideramos adequado, alguns tópicos, como produção de enunciados, discussão sobre divisão partitiva e quotativa, resolução de situações-problema e de questões diretas, divisão em que dividendo e/ou divisor é o número zero foram priorizados nas intervenções. Essas abordagens foram privilegiadas, em decorrência das discussões geradas pelos conhecimentos prévios apresentados pelos licenciandos, mas isso não quer dizer que foram considerados os mais importantes. Os tópicos mais evidenciados neste estudo decorrem do que foi priorizado nas intervenções.

2.4.1 Ideias e Tipos de Divisão

Essa seção apresenta uma síntese das ideias e dos tipos de divisão ao trabalhar com situações-problemas. Uma divisão é definida como quotativa ou partitiva e apresenta ideia de combinatória, configuração retangular, entre outros, se existir uma problematização, ou seja, uma situação-problema que os alunos, geralmente, leem, interpretam, resolvem a situação proposta e apresentam uma solução.

Baseados em recomendações trazidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do terceiro e quatro ciclos do ensino fundamental (BRASIL, 1998), determinamos algumas de nossas abordagens acerca do conceito de divisão. O foco era permitir aos licenciandos mudanças na própria postura para se constituir docente e, para isso, foi preciso delinear conteúdos considerados fundamentais para serem abordados.

Além disso, possibilidades para o trabalho na licenciatura sobre o conceito da divisão são bem extensas e há muitas maneiras de se abordar esse conteúdo. Nossa proposta, então foi apresentar aos licenciandos algumas das abordagens possíveis ao se trabalhar com a divisão. Optamos por fazer uma apresentação mais global do conteúdo ao invés de nos aprofundarmos em somente uma possibilidade, assim, abordamos em nossas intervenções a produção de enunciados de questões partitiva e quotativa, resolução de situações-problema e de questões diretas, uso do algoritmo de divisão, algoritmo de Euclides, entre outros.

Os PCN (BRASIL, 1998) recomendam algumas atitudes a serem desenvolvidas nos alunos dos terceiros e quartos ciclos. Entre as atitudes apresentadas, destacamos desenvolvimento da investigação, valorizando uso de estratégias de verificação dos resultados, reconhecimento de diversas formas de resolução para uma mesma situação-problema, valorização da linguagem matemática e do trabalho coletivo. Embora recomendações apresentadas estejam no 3º ciclo, essas atitudes também podem ser desenvolvidas no ciclo seguinte. Mas o objetivo é que os alunos cheguem ao ciclo final do ensino fundamental com tais potencialidades já desenvolvidas. Assim, atitudes do 4º ciclo são mais amplas ou apresentam as ideias anteriores mais aprofundadas e contemplam um posicionamento mais crítico diante das situações que lhes são apresentadas. Dessa forma, recomenda-se, entre outras atitudes, utilizar diferentes representações matemáticas que facilite a compreensão e análise de cada situação-problema e valorizar o trabalho coletivo com colaboração na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e sua validação.

O trabalho em sala de aula com questões envolvendo situações-problema, além de favorecer a interpretação e o raciocínio dos alunos, permite que as diferentes ideias da divisão sejam apresentadas a eles. O desenvolvimento de um algoritmo por si só não envolve o desenvolvimento das ideias da divisão, para isso, precisamos de situações-problema. Nesta proposta, os PCN, quando apresentam situações-problema envolvendo o conceito de multiplicação e divisão, denominada campo multiplicativo, ressaltam a utilização de quatro ideias, são elas: 1)Comparação Multiplicativa; 2)Comparação entre razões/ proporcionalidade; 3)Configuração Retangular; 4)Combinatória. Essa classificação é discutida por Vergnaud (2014), mas trazemos as ideias de cada uma dessas categorias em exemplos:

Quadro 2 - Ideias da divisão nos PCN

Comparação Multiplicativa	Lia tem R$10,00. Sabendo que ela tem o dobro da quantia de Pedro, quanto tem Pedro?	R$ 10,00 R$ 5,00 $\div 2$
Comparação entre razões/ proporcionalidade	Marta pagou R$ 24,00 por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote? Marta gastou R$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R$3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou?	R$ 24,00 3 pacotes R$ 8,00 1 pacote R$ 24,00 8 pacotes R$ 3,00 1 pacote
Configuração retangular	A área de uma figura retangular é de 54 cm². Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado? As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em fileiras e colunas. Se são 7 as fileiras, quantas são as colunas?	54 cm² 9 cm $\div 6cm$ 56 cadeiras 8 colunas $\div 7$ $fileiras$
Combinatória	Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?	12 casais 8 rapazes $\div 3$ $moças$

Fonte: Elaborado pela autora com situações-problema de BRASIL, 1998, p.72-73.

Nesses grupos, podemos encontrar alguns que estabelecem uma relação ternária ou quaternária. A relação ternária é constituída de dois elementos e de uma relação-elemento (VERGNAUD, 2014), e a relação quaternária ocorre entre quatro quantidades, sendo duas de cada tipo. Nessa relação são dadas três informações e queremos encontrar a que falta (VERGNAUD, 2014).

Apesar de Vergnaud (2014) definir a relação, ternária ou quaternária, estabelecida em cada uma das categorias, preferimos não fazer essa restrição, pois entendemos que a relação, dependendo da maneira de elaborar o enunciado, pode ser compreendida como ternária ou quaternária. Diante dos dois enunciados sugeridos pelo PCN (Brasil, 1998, p.73) ao grupo associado à ideia de configuração retangular, podemos fazer essa observação. No primeiro enunciado, “A área de uma figura retangular é de 54 cm². Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado?” (BRASIL, 1998, p. 73) pode-se afirmar a ocorrência de uma relação ternária, pois o tamanho de um dos lados do retângulo é determinado pela área do retângulo, dividida pela medida do lado conhecido.

$$tamanho\ do\ lado = área\ do\ retâgulo \div tamanho\ do\ lado\ conhecido$$

No segundo enunciado, “As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em fileiras e colunas. Se são 7 as fileiras, quantas são as colunas?” (BRASIL, 1998, p. 73), o número de colunas é determinado pelo número total de cadeiras dividido pelo número de fileiras.

$$nº\ de\ colunas = nº\ total\ de\ cadeiras \div nº\ de\ fileiras$$

Mas ao reescrever o segundo enunciado proposto, ele pode ser classificado como uma relação quaternária, pois o enunciado apresenta três informações de dois tipos, e a quarta informação precisa ser encontrada:

— As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em 7 fileiras. Quantas cadeiras devem conter em cada fileira?

	Cadeiras	Fileiras	
	56	7	
÷ 7	x	1	÷ 7

Com essa reescrita de enunciado, os alunos poderiam estabelecer uma relação quaternária em um enunciado de configuração retangular classificado como relação ternária. E, por isso, consideramos que esse rigor de classificação não deve ser considerado.

O que ocorre por vezes é tratar uma relação quaternária como se fosse ternária e isso pode fazer com que os alunos não consigam compreender a resolução do problema. Com as informações contidas nos enunciados que foram reescritos, muitas vezes surge a dificuldade de compreender soluções sugeridas durante o ensino. Quando o professor introduz o algoritmo de divisão e prioriza o uso desse recurso para resolver qualquer situação-problema, acreditamos que ocorre, por vezes, o tratamento ternário para situações quaternárias.

$$\begin{array}{r|l} n^{\underline{o}}\ de\ cadeiras & n^{\underline{o}}\ de\ fileiras \\ \cline{2-2} resto & n^{\underline{o}}\ de\ cadeiras\ por\ fileira \end{array}$$

Dividir o número total de cadeiras pelo número de fileiras e encontrar como quociente o número de cadeiras em cada fileira é muito complexo para uma criança, pois envolve a mistura de grandezas. É claro que o número encontrado no quociente se refere ao número de cadeiras por fileira, mas isso é avançado para a compreensão de crianças que estão aprendendo a dividir.

Nesta pesquisa priorizamos os dois tipos de divisão que não são ressaltadas nas recomendações dos PCN. Essa classificação envolve discussão de elementos que determinam a natureza de seus enunciados. Assim, a divisão pode ser definida como partitiva ou quotativa a partir das informações presentes no enunciado do problema. Selva e Borba (2005, p.55) consideram que:

> Problemas de partição são aqueles em que é dado um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo deve ser distribuído, o resultado é o valor de cada parte. Problemas de quotição consistem em problemas em que é dado o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividir o mesmo, o resultado consiste no número de partes obtidas (SELVA; BORBA, 2005, p. 55).

A identificação dessa diferença, embora seja importante ser discutida em cursos de formação de professores, não precisa ser apresentada aos alunos da educação básica. Corroboramos com Jesus (2005) quando afirma que o propósito não é que os alunos (dos ensinos fundamental e médio) saibam distinguir ou classificar a divisão como partitiva ou quotativa, mas que o professor possibilite tais experiências com diferentes tipos de situação.

Na pesquisa de Selva e Borba (2005), os participantes eram alunos da educação básica e, por isso, os problemas contemplavam apenas o conjunto dos números naturais. Quando trabalhamos com o conjunto dos números racionais ou reais, em uma situação partitiva, o dividendo pode ser menor do que o divisor, como, por exemplo: Tenho 5 pães e quero distribuir igualmente para 15 pessoas. Quanto cada uma vai receber? Assim, adaptando a classificação de Selva e Borba

(2005), o mais correto é dizer que: Problemas de partição são aqueles em que é dado um conjunto e o número de partes em que ele deve ser distribuído; o resultado é o valor de cada parte. Já para problemas de quotição, há sempre um conjunto maior no dividendo e, portanto, a definição inicial é válida para este estudo.

Diante da definição de divisão partitiva e quotativa e identificando que os exemplos dados pelos PCN não contemplam tal classificação, podemos propor um trabalho com divisão que aborde situações associadas à: 1)Comparação Multiplicativa; 2)Comparação entre razões/ proporcionalidade; 3)Configuração Retangular; 4)Combinatória, com o uso de exemplos de divisão partitiva e quotativa.

O trabalho de Silva (2009) contém, além dos grupos do Quadro 3, a ideia de grupos equivalentes, mas, para nós classifica-se também como comparação entre razões/ proporcionalidade, e por isso foi incluído nesse grupo.

Quadro 3 - Exemplos das ideias x tipo de divisão

IDEIAS DA DIVISÃO	DIVISÃO PARTITIVA	DIVISÃO QUOTATIVA
Comparação Multiplicativa	Rosangela possui 15 bonecas, sabemos que ela tem três vezes mais bonecas que Ana. Quantas bonecas Ana têm?	Rosangela possui 15 bonecas e Ana 5 bonecas. Rosangela tem quantas vezes mais bonecas que Ana?
Comparação entre razões/ proporcionalidade	Um carro percorreu 300 km em 5 horas. Se percorrer sempre a mesma velocidade, quantos km andou por hora? Matheus comprou 5 pacotes de figurinhas e agora tem 15 figurinhas. Quantas figurinhas têm em cada pacote?	Um carro se move a uma velocidade média de 60 km por hora. Quantas horas ele demora para percorrer 300 km? Matheus comprou pacotes de figurinhas e agora tem 15 figurinhas. Se em cada pacote vem 3 figurinhas, quantos pacotes ele comprou?
Representação Retangular	Em uma sala de aula tem 30 carteiras dispostas em cinco filas com a mesma quantidade de carteiras. Quantas carteiras têm em cada fila?	Em uma sala de aula tem 30 carteiras dispostas em filas com seis carteiras em cada. Em quantas fileiras a sala foi organizada?
Combinatória	Uma sorveteria faz 15 tipos de sorvetes com coberturas diferentes. Sabendo que essa sorveteria oferece 5 sabores de sorvete, quantas são as coberturas?	

Fonte: Adaptado de Silva (2009).

No Quadro 3 adaptamos também a classificação da representação retangular, pois na obra original não há uma definição de divisão partitiva e quotativa. Além disso, no grupo da ideia de combinatória não conseguimos definir o enunciado como partitivo ou quotativo. Essa impossibilidade é justificada, pois esse tipo de questão apresenta grandezas distintas.

Assim, o trabalho fazendo a distinção entre os tipos de divisão é importante, visto que a divisão partitiva está mais presente no cotidiano, enquanto a divisão quotativa não se apresenta com tanta frequência em experiências sociais informais (LAUTERT; SPINILLO, 2002). Portanto, a diversificação de atividades propostas pelo professor é necessária para que os alunos tenham oportunidade de experienciar duas abordagens no ambiente de aprendizagem formal e tenham contato com diferentes possibilidades de questões envolvendo situações-problema.

Os PCN, no decorrer do texto abordam técnicas de resolução convencionais e não convencionais. Entendemos como estratégias convencionais o uso do algoritmo próprio da operação e, portanto, os demais recursos utilizados que não são algoritmo serão considerados neste estudo como estratégias de divisão não convencionais.

2.4.2 Estratégias de divisão não convencionais

Ao se trabalhar com divisão, principalmente nos primeiros anos do ensino fundamental, deveria ser comum encontrar estratégias de resolução não convencionais, ou seja, que não remetam ao uso do algoritmo da divisão.

Pelo que apresenta os PCN, definimos que cálculo mental, por estimativa e aproximações, como estratégias não convencionais, uma vez que é utilizado em ambientes fora da escola e em situações cotidianas. Ainda consideramos dentro dessa categoria utilização de somas ou subtrações sucessivas, uso de multiplicação, tentativa e erro, decomposição do dividendo e até mesmo uso de desenhos e formação de tabelas para se determinar o valor desejado, entre outras resoluções que possam ser adotadas no estudo dessa operação. Todas essas estratégias elencadas distanciam-se do algoritmo da divisão e, de acordo com Jesus (2005, p.97), ao “criar e explorar os seus próprios processos de resolver problemas prepara os alunos para uma aprendizagem significativa dos algoritmos estandardizados”.

Essa experiência inicial antes da inserção do algoritmo das operações é confirmada nos PCN ao considerar como um dos conteúdos conceituais e procedimentais do primeiro ciclo do ensino fundamental “cálculos de multiplicação e divisão por meio de estratégias pessoais” (BRASIL, 1998, p.51). Vale ressaltar que o documento recomenda o uso de estratégias pessoais para os cálculos de multiplicação e divisão, ou seja, sem rigor procedimental. No segundo ciclo do ensino fundamental, entre o 6º e 9º ano, o documento norteador recomenda que o professor inicie o trabalho de desenvolvimento de técnicas convencionais, mas valorizando sempre hipóteses e estratégias pessoais, uma vez que elas representam a maneira de pensar do aluno.

Corroboramos com as recomendações dos PCN, entendendo que este deve ser o caminho mais adequado para estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos da educação básica. Em contrapartida, como a inserção prematura dos algoritmos das operações já ocorre desde o primeiro ciclo do ensino fundamental e, portanto, está presente no cenário real da educação, essa proposta de ensino fica um pouco distante.

Como um dos conteúdos conceituais e procedimentais do segundo ciclo do ensino fundamental recomenda-se a “resolução das operações com números naturais, por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos” (BRASIL, 1998, p. 59). Fica evidente, na leitura do documento norteador, a necessidade de articular diferentes estratégias pessoais com convencionais, de forma a evitar a inserção prematura e sem significado do algoritmo da divisão, assim como de outras operações aritméticas no ensino fundamental.

2.4.3 Estratégia de divisão pelo algoritmo

Ao se trabalhar com algoritmo da divisão, os alunos constroem registros de representação que traduzem muitas vezes sua maneira diferente de pensar. E mesmo que o algoritmo da divisão seja apresentado utilizando ordens numéricas e sistema posicional, é importante que o professor demonstre diferentes maneiras de se resolver o algoritmo da divisão. Ao se apropriar do conceito, os alunos podem utilizar estratégias de decomposição, estimativa, entre outras.

2.4.3.1 Algoritmo da divisão por subtrações sucessivas

No início do estudo do conceito de divisão são apresentadas apenas situações com números naturais e, "muitas vezes, o algoritmo da divisão é apresentado à criança sem justificativas, simplesmente a partir do princípio fundamental da divisão, exigindo-se que a criança faça o processo mais curto desde o início" (BITTAR; FREITAS, 2005, p.78). Mas, a maneira natural de aprendizagem é associar a introdução do algoritmo da divisão com estratégias pessoais.

No método de subtrações sucessivas existe a ideia de repartir igualmente uma quantidade de objetos, assim como se fazia antes da aprendizagem formal (TOLEDO e TOLEDO, 2010; BITTAR e FREITAS, 2005). A distribuição ocorre de uma a uma e, a cada etapa, o aluno verifica se é possível dividir novamente.

Para exemplificar, apresentamos o seguinte problema: João tem 16 balas e quer dividir igualmente entre 3 pessoas, quantas balas cada um vai receber? O aluno pode resolver o problema de maneiras distintas:

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 3 \\ \hline
\underline{-3} & 1 \\
13 & 1 \\
\underline{-3} & 1 \\
10 & 1 \\
\underline{-3} & \underline{1} \\
7 & 5 \\
\underline{-3} & \\
4 & \\
\underline{-3} & \\
1 &
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} +
\qquad
\begin{array}{r|l}
16 & 3 \\ \hline
\underline{-3} & 1+1+1+1+1=5 \\
13 & \\
\underline{-3} & \\
10 & \\
\underline{-3} & \\
7 & \\
\underline{-3} & \\
4 & \\
\underline{-3} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
16 & 3 \\ \hline
\underline{-6} & 2+3 \\
10 & \\
\underline{-9} & \\
1 &
\end{array}
$$

As resoluções apresentadas podem sugerir um primeiro contato com o método de subtrações sucessivas, fazendo a distribuição das 16 balas uma a uma. A diferença está na maneira de representar o quociente. No primeiro caso, a cada divisão realizada, optou-se por escrever o resultado um abaixo do outro; já no segundo caso, como o aluno optou por indicar os valores do quociente ao lado, foi necessário inserir o sinal de adição, uma vez que sua não representação geraria um valor indevido de quociente, devido ao nosso sistema de numeração ser posicional.

Por meio do contato com o algoritmo da divisão, o aluno vai percebendo que é possível determinar mais de uma unidade no quociente e consequentemente uma economia de tempo e espaço na resolução de um problema. Essa percepção pode resultar em estimativas maiores para o valor do quociente, como na terceira representação, até que o aluno consiga determinar de imediato o valor final do quociente. Na realização dos três processos, o professor precisa informar ao aluno que o resto da divisão é sempre menor do que o divisor[3], para que entenda o momento de finalizar a divisão e para que não confunda o resultado de uma subtração referente a uma estimativa realizada com o resto da divisão.

---

[3] Como nos primeiros contatos com o algoritmo da divisão as situações propostas estão no conjunto dos números naturais, dizer que o resto deve ser menor que o divisor é suficiente.

Com o passar dos anos escolares, situações-problemas passam a apresentar números maiores de dividendo e divisor, o que pode tornar a distribuição unitária, método americano ou por estimativa mais demorada. Assim, faz-se necessário desenvolver a divisão a partir do algoritmo da divisão tradicional, inicialmente pelo método longo e posteriormente o método curto.

2.4.3.2 Algoritmo da divisão pelos métodos longo e curto

O algoritmo da divisão utilizando ordens numéricas geralmente começa pelo algoritmo longo. Nesse processo, a cada número indicado no quociente faz-se uma subtração. O valor a ser subtraído do dividendo é o produto entre quociente e divisor. Posteriormente, utiliza-se o algoritmo curto em que, após determinar o valor do quociente, indica-se apenas o resto de cada procedimento realizado.

Nos processos longo e curto da divisão de 5530 por 54, representamos de vermelho o valor referente ao resto de cada etapa da divisão que está sendo realizada.

Algoritmo Longo

UM	C	D	U				
5	5	3	0	54			
-0				0	1	0	2
5	5			UM	C	D	U
-5	4						
0	1	3					
	-0	0					
	1	3	0				
	-1	0	8				
	0	2	2				

Algoritmo Curto

UM	C	D	U				
5	5	3	0	54			
5	5			0	1	0	2
	1	3		UM	C	D	U
	1	3	0				
		2	2				

Em cada etapa da divisão é importante o professor atentar-se para as falas expressadas enquanto o licenciando resolve o algoritmo da divisão. Quando o dividendo selecionado é menor do que o divisor, como, por exemplo, na divisão de 5020 por 5, na etapa da divisão das dezenas, as falas dos professores e licenciandos ocorreram, majoritariamente, da seguinte forma: “2 dividido por 5 não dá para dividir, então, eu coloco zero no quociente”. E diante desse “não dá para dividir”, ainda reaproveitam a escrita de uma divisão, de maneira que o aluno não sabe o que é resto ou o que é dividendo da divisão.

Algoritmo Curto

UM	C	D	U				
5	0	2	0	5			
0	0	2	0	1	0	0	4
			0	UM	C	D	U

Algoritmo Curto

UM	C	D	U				
5	0	2	0	5			
0	0			1	0	0	4
	0	2		UM	C	D	U
		2	0				
			0				

Na primeira resolução de 5020÷5, embora apresente um quociente e resto corretos, os procedimentos realizados podem fazer com que alunos não compreendam o algoritmo da divisão. Inicialmente, realizou-se a divisão de 5 unidades de milhar por 5, encontrando 1 unidade de milhar como quociente e resto igual a 0. Posteriormente, o trabalho começou com as centenas e, ao realizar a divisão de 0 centenas por 5, o quociente encontrado foi igual a 0 centenas e, por isso, continuou a reaproveitar o valor anterior do dividendo. Nesse desenvolvimento, percebe-se a ausência do resto em cada uma das etapas.

No segundo desenvolvimento do algoritmo curto, diferentemente da primeira resolução, o resto de cada etapa da divisão está representado em vermelho e, a cada determinação de quociente, indica-se o valor do resto. O professor deve atentar-se em falar como “cinco unidades de milhar dividido por 5, é igual a quantas unidades de milhar? Assim, se o dividendo é menor do que o divisor, a pergunta deve ser formulada da mesma maneira, como, por exemplo, “duas dezenas dividido por 5, é igual a quantas dezenas?”. Nesse último caso, é possível definir um quociente igual a zero, e prosseguir a operação determinando o resto de cada etapa, seja no processo longo ou curto do algoritmo da divisão.

Acreditamos que essa expressão “não dá para dividir” refira-se à distribuição igualitária e unitária de objetos, e significa que os grupos não receberam nenhuma unidade. No entanto, isso significa que, se eu dividir duas balas igualmente entre cinco crianças (no conjunto dos números naturais), a distribuição unitária não será possível e ninguém receberá bala, ou seja, cada um recebeu zero bala. A representação do zero no quociente é tópico especial em alguns livros que sugerem estratégias para que o aluno não apresente dificuldades com esse número. Alguns autores, como Vergnaud (2014) e, Toledo e Toledo (2010), sugerem que o número zero seja tratado como outro número qualquer e, independente da ordem numérica, ele seja representado no quociente. Sugerem também trabalhar com material dourado para auxiliar essa compreensão.

Ao recorrer a essa proposta, na divisão de 121 por 4, as ordens numéricas de cada algarismo do dividendo são identificadas, e as mesmas ordens ficam reservadas no quociente da divisão. Ordem por ordem, os algarismos do dividendo vão sendo divididos pelo divisor e se calculados os algarismos referentes ao resultado da divisão no quociente. A escrita das ordens numéricas tanto no dividendo quanto no quociente é necessária para que os alunos compreendam que, ao dividir as centenas, deve-se determinar um valor para o quociente que corresponda à mesma ordem. Assim, ao dividir uma centena por 4, teremos como quociente 0 centena e uma centena como resto.

C	D	U				
1	2	1	4			
				C	D	U

Algoritmo Curto

C	D	U			
1	2	1	4		
1	2		0	3	0
	0	1	C	D	U
		1			

Algoritmo Longo

C	D	U			
1	2	1	4		
-0			0	3	0
1	2		C	D	U
-1	2				
0	0	1			
		-0			
		1			

No processo longo e curto do algoritmo da divisão identificamos o resto de cada etapa na cor vermelha, sendo possível acompanhar o preenchimento da ordem das centenas, dezenas e unidades no quociente.

Para o desenvolvimento do algoritmo da divisão, os autores Vergnaud (2014) e, Toledo e Toledo (2010) sugerem a construção da tabuada do divisor. O primeiro autor apresenta a tabuada do divisor pelos números de 1 a 9, e Toledo e Toledo

(2010) sugere que o divisor seja multiplicado pelos números de 0 a 10. Para nós, o mais adequado é construir a tabuada do divisor pelos números de 0 a 9, uma vez que trabalhamos com a base decimal e os algarismos de 0 a 9 representam todas as possibilidades de representar as divisões com o uso do algoritmo tradicional.

Assim, na divisão de 235 por 13, o professor pode sugerir o desenvolvimento da tabuada, encontrando na coluna destacada os possíveis algarismos para compor o quociente da divisão. Posteriormente, os alunos identificam centenas, dezenas e unidades do dividendo e reservam o espaço no quociente para, então, dar início ao algoritmo da divisão.

Divisor		
13x	0	=0
13x	1	=13
13x	2	=26
13x	3	=39
13x	4	=52
13x	5	=65
13x	6	=78
13x	7	=91
13x	8	=104
13x	9	=117

UM	C	D	U				
2	3	5	0	13			
2	3			0	1	8	0
1	0	5		UM	C	D	U
		1	0				
		1	0				

É comum que em sala de aula os professores digam "para dividir 8 por 4 eu procuro o número que multiplicado por 4 dá resultado 8 ou o mais próximo possível de 8" (BITTAR; FREITAS, 2005, p.78). Apesar desse tipo de expressão ser fortemente utilizada durante o estudo da divisão, ela pode ser inadequada. No exemplo dado ao dividir 2350 por 13, quando dividimos 23 centenas por 13, determinamos como quociente uma centena. Mas se formos analisar a expressão usual em sala de aula o quociente deveria ser 2, uma vez que o produto igual a 26 é mais próximo de 23 do que o produto igual a 13. Por tanto, ao buscarmos um quociente, o correto seria: procuramos um número que, ao ser multiplicado pelo divisor, seja igual ou menor e o mais próximo possível do dividendo.

Diante dessas especificidades e forças do hábito aqui relatadas, percebemos possíveis atitudes do professor em sala de aula que reforçam as dificuldades dos alunos ao dividir, utilizando o algoritmo da divisão. Desse modo, é necessário que o professor compreenda bem as particularidades da divisão e, para uma compreensão mais aprofundada da divisão, estude e compreenda com clareza o algoritmo de Euclides.

2.4.3.3 Algoritmo de Euclides

Com a classificação de Caraça (2010), divisão é uma das quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), sendo definida como uma operação de segundo grau e inversa da multiplicação (quando esta é exata). Para a representação de uma divisão existem dois símbolos, logo, para representar 'a dividido por b', podemos ter $\mathrm{a{:}b}$ ou $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ e, como definição, temos $a{:}b = c \leftrightarrow b.c = \mathrm{a}, \mathrm{com\ b} \neq 0$. Nessa representação, a é dividendo, b é divisor e c é quociente. Nesse caso em particular, a divisão é exata e, portanto, o dividendo é múltiplo do divisor. Em situações em que a condição anterior não é satisfeita, existe um quarto número denominado resto, de modo que $\mathrm{r} < b$. Nessa situação satisfaz-se a igualdade $\mathrm{a} = \mathrm{b.c} + \mathrm{r}$ (CARAÇA, 2010).

Como a definição de divisão feita por Caraça (2010) é realizada no conjunto dos números naturais, ela foi estendida utilizando o algoritmo de Euclides para o conjunto dos números inteiros. Com a definição de algoritmo de Euclides apresentada por Domingues (2009, p.131), temos:

> Para quaisquer $\mathrm{a, b} \in \mathrm{Z}, \mathrm{b} > 0$, existe um único par de inteiros q, r de maneira que $\mathrm{a} = \mathrm{bq} + \mathrm{r}, \mathrm{onde}\ 0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{b}$.
> Na igualdade que expressa o teorema, os elementos $\mathrm{a, b, q\ e\ r}$ são chamados respectivamente dividendo, divisor, quociente e resto, na divisão euclidiana de $\mathrm{a\ por\ b}$.

Apesar de a definição abranger inicialmente o conjunto dos números inteiros com $\mathrm{a, b} \in \mathrm{Z}$, a restrição de $b > 0$ limita as possibilidades do divisor como positivo, de maneira que b não engloba todos os números inteiros. A apresentação do algoritmo de Euclides, definido sem restrição de quaisquer elementos é dada por:

Para quaisquer $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Z}$, com $b \neq 0$ existe um único par $\mathrm{q}, \mathrm{r} \in \mathrm{Z}$, de maneira que $\mathrm{a} = \mathrm{bq} + \mathrm{r}$, onde $0 \leq \mathrm{r} < |\mathrm{b}|$.

Ao considerar a definição do algoritmo de Euclides para o conjunto dos números inteiros, sua aplicabilidade a partir do número 307 como dividendo e do número 3 como divisor e seus respectivos opostos, é formada por quatro possíveis situações:

- Sendo $a = 307$ e $b = 3$, temos $307 = 3q + r$, em que $0 \leq \mathrm{r} < |3|$. Logo $q = 102$ e $r = 1$.
- Sendo $a = 307$ e $b = -3$, temos $307 = -3q + r$, em que $0 \leq \mathrm{r} < |-3|$. Logo $q = -102$ e $r = 1$.
- Sendo $a = -307$ e $b = 3$, temos $-307 = 3q + r$, em que $0 \leq \mathrm{r} < |3|$. Logo $q = -103$ e $r = 2$.
- Sendo $a = -307$ e $b = -3$, temos $-307 = -3q + r$, em que $0 \leq \mathrm{r} < |-3|$. Logo $q = 103$ e $r = 2$.

Pelas abordagens apresentadas na seção 2.4, é possível compreender a complexidade e amplitude do trabalho com o conceito da divisão. O que tratamos neste trabalho não representa todas as possibilidades de estudo da divisão, mas consideramos que diferentes abordagens para o estudo da divisão são essenciais para que licenciandos possam (re)construir saberes acerca do conceito da divisão e tenham consciência da complexidade dessa operação aritmética. Como as quatro operações aritméticas iniciais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e seus algoritmos são introduzidos nas séries iniciais do ensino fundamental, é importante que professores das séries finais do ensino fundamental tenham conhecimento sobre particularidades das operações e possíveis abordagens para os conteúdos. Desse modo, ao identificar uma possível fragilidade na aprendizagem dos alunos, o professor pode intervir para melhorar o cenário observado. Por isso consideramos necessário realizar este trabalho na formação inicial do licenciando em matemática.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa teve como objetivo principal analisar (re)construções de saberes relacionadas ao conceito de divisão por licenciandos em Matemática. Para alcançar esse objetivo realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo que se aproxima do tipo intervenção pedagógica, pois, para Damiani et al. (2013, p. 58):

> [...] são investigações que envolvem o planejamento e implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências.

Essa definição também caracteriza nossa pesquisa de mestrado. Este estudo se aproxima da pesquisa intervenção, pois objetiva-se promover um espaço de mudança e inovação, buscando melhoria na aprendizagem do conceito de divisão. Apresentando assim, um caráter aplicado e com a finalidade de contribuir para solução de problemas práticos.

Nossa finalidade ao realizar intervenções é estimular a formação de futuros professores atentos a algumas dificuldades de alunos. Consideramos importante discutir esse conteúdo, visto que normalmente nas licenciaturas não há disciplinas que estimulem discussões sobre conceitos mais elementares. Já na licenciatura em Matemática, cenário da pesquisa, Fundamentos da Matemática Elementar I é uma das disciplinas do curso que contempla esse tipo de discussão. Nesse sentido, é fundamental que professores formadores observem tais discussões e promovam espaços de diálogo, pois, se seguirem rigorosamente a ementa das disciplinas, os licenciandos podem se formar sem compreender os conteúdos mais elementares. A inexistência de um espaço de discussão nas licenciaturas favorece a formação de professores com esse pensamento e que consideram as dificuldades dos alunos como um problema unicamente deles.

Assim, como contribuição para encerrar esse ciclo, a proposta é discutir possibilidades para o ensino do conceito de divisão, de forma que os licenciandos possam refletir sobre as quatro operações aritméticas, estudadas no ensino fundamental, isto é, não é tão simples compreendê-las. Isso significa dizer que as operações apresentam suas especificidades e que, se não forem bem trabalhadas, acabam gerando dificuldades iniciais que vão refletir em diferentes conteúdos subsequentes.

Outra característica importante da pesquisa do tipo intervenção definida por Damiani et al. (2013) refere-se ao detalhamento do relatório da pesquisa que deve ser produzido. Ele deve ser dividido em duas partes, sendo uma delas para apresentar ao leitor o método de intervenção (método do ensino) e o método de avaliação da intervenção (método de pesquisa). As autoras consideram que, ao não realizar essa separação, fica prejudicada a identificação do trabalho como pesquisa diante da imprecisão dos relatórios, bem como dificulta o entendimento do processo investigativo.

Para Damiani et al. (2013), o método da intervenção (método de ensino) deve apresentar uma descrição detalhada e deve evitar repetições, explicitando seu embasamento teórico. As intervenções em sala de aula devem ser descritas apresentando o método de ensino aplicado e justificando diferentes práticas específicas planejadas e implementadas. O maior cuidado se deve ter na produção dessa parte do relatório diz respeito à postura da escrita do pesquisador, pois, para a descrição do método da intervenção:

> [...] o foco do autor do relatório deve estar voltado **somente** à sua atuação como professor (agente da intervenção). Deve-se evitar a inclusão, nesse item do relatório, de informações relativas à atuação do autor como pesquisador (ou seja, evitar descrições sobre o método de pesquisa propriamente dito: coleta e análise de dados para a avaliação da intervenção, mesmo que sejam utilizados durante ela) (DAMIANI et al., 2013, p.62)

Dessa maneira, apresentamos, na produção desta dissertação, o detalhamento descritivo do planejamento das intervenções realizadas, a condução realizada durante cada dia. Posteriormente, apresentamos, com a descrição dos dados que foram produzidos, nossas análises dos dados na perspectiva dos referenciais teóricos.

O procedimento de análise dos dados produzidos é denominado de método de avaliação da intervenção, descreve os instrumentos de produção de dados e analisa os dados que foram produzidos. Essa parte do relatório apresenta um caráter investigativo da intervenção e foca na atuação do autor como pesquisador. As análises devem ser realizadas com base nos "[...] achados relativos aos efeitos da intervenção sobre seus participantes e os achados relativos à intervenção propriamente dita" (DAMIANI et al., 2013, p. 62).

O primeiro elemento analisa mudanças observadas nos participantes da pesquisa. Nesse caso, (re)construções de saberes relacionadas ao conceito da divisão. Já o segundo elemento dessa parte do relatório analisa características das intervenções realizadas que foram responsáveis pelas mudanças observadas nos participantes, evidenciando pontos fortes e fracos da intervenção (DAMIANI et al., 2013).

Como relatado anteriormente, o interesse pela pesquisa surgiu de minhas vivências profissionais, e a vontade de se investigar surgiu por uma angústia pessoal. Essa informação garante a classificação como pesquisa do tipo intervenção pedagógica, pois nela

> [...] é o pesquisador quem identifica o problema e decide como fará para resolvê-lo, embora permaneça aberto a críticas e sugestões, levando em consideração, eventuais contribuições dos sujeitos-alvo da intervenção, para aprimoramento do trabalho (DAMIANI et al., 2013, p.60).

Assim, devido a inquietações pessoais, identificamos um local e o consideramos oportuno para as discussões, visto que tratavam do conceito de divisão. Então, propusemos uma intervenção, a fim de promover um espaço de discussão na licenciatura em Matemática. Por se tratar de um conteúdo relacionado ao aprendizado da Matemática no ambiente escolar, e por buscarmos uma mudança na postura dos licenciandos, desde a licenciatura até início de suas vivências em sala de aula, é possível afirmar que características da pesquisa do tipo intervenção pedagógica encontram-se presentes em nosso trabalho.

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA

A produção dos dados ocorreu no primeiro semestre de 2016, com a turma ingressante na licenciatura em Matemática de uma instituição federal. Esse curso é ofertado no período noturno e realiza processos seletivos anualmente.

No fim de 2015, ao ter conhecimento de quem seriam os professores responsáveis pelas disciplinas do 1º período, resolvi conversar com o professor de Fundamentos da Matemática Elementar I. Isso porque ele apresenta uma postura que propicia discussão dos conteúdos e permite a criação de espaços em que licenciandos não se sintam inibidos em tirar dúvidas e participar da aula. Além disso, essa disciplina, segundo recomendações da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), prevê um trabalho com conjuntos numéricos, suas operações e discussões de métodos dedutivos, demonstrações (SBM, 2015). Mais especificamente no conjunto dos números inteiros o documento de Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática considera que devem existir comentários sobre divisão euclidiana e, no conjunto dos números racionais, a definição de suas operações. Diante dessa especificidade, consideramos que esse seria um ambiente propício para desenvolvermos nossa pesquisa. Após conversar com o professor e sua concordância em participar da pesquisa, apresentei a ele nossa proposta de trabalho, iniciei as observações e, posteriormente, realizamos as intervenções.

Como os horários das aulas do mestrado e da disciplina da licenciatura conflitavam com meu horário habitual de serviço, 15h às 21h, solicitei à própria instituição um horário especial de estudante para conseguir conciliar todas as atividades. Concentrei a compensação de horas na segunda e terça-feira e, assim, cumpria menos horas na quinta e sexta para conseguir acompanhar todas as aulas da disciplina, que era ofertada nas segundas, quintas e sextas-feiras, conforme descrição do
Quadro 4.

Quadro 4 - Horário da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I (2016/1)

Dias da semana	Horários
2ª feira	18h30min às 20h30min
5ª feira	20h30min às 22h30min
6ª feira	20h30min às 22h30min

Fonte: Horário do professor regente (2018).

Acompanhei as aulas junto com uma licencianda que desenvolvia uma pesquisa de iniciação científica. O intuito desse acompanhamento não foi realizar observações em sala de aula e nem buscar analisar a participação dos alunos, mas sim foi a maneira mais apropriada na ocasião para os licenciandos se habituarem à presença das pesquisadoras. Ficou acordado que realizaríamos nossas pesquisas no fim do semestre letivo, então, assim que a licencianda terminou suas ações da iniciação científica, iniciamos as intervenções.

As intervenções ocorreram entre os dias 30 de junho e 8 de julho de 2016. Foram planejados cinco dias de intervenções mediadas pela pesquisadora e pelo professor regente, e uma lista com três atividades, que foram aplicadas em um dia posterior. Não caracterizamos a lista como intervenção, pois não realizamos uma discussão coletiva, visto que foi utilizada como atividade avaliativa.

O objetivo geral das intervenções foi discutir o conceito de divisão utilizando as atividades propostas, tendo como objetivos específicos:

- Identificar conhecimentos prévios de licenciandos sobre o conceito de divisão;
- Promover diálogo e socialização de respostas;
- Analisar, junto aos participantes, estratégias de resolução apresentadas durante as socializações;
- Promover reflexão diante de situações propostas nas intervenções.

Os dados foram produzidos em três momentos: antes das intervenções, com aplicação do questionário de caracterização dos participantes e identificação de conhecimentos prévios; durante as intervenções, por meio da socialização das respostas e das folhas de solução dos licenciandos, com utilização de gravações em áudio e vídeo e observações da pesquisadora, e após as intervenções, com aplicação de um questionário final, em que os participantes tiveram oportunidade de avaliar o curso.

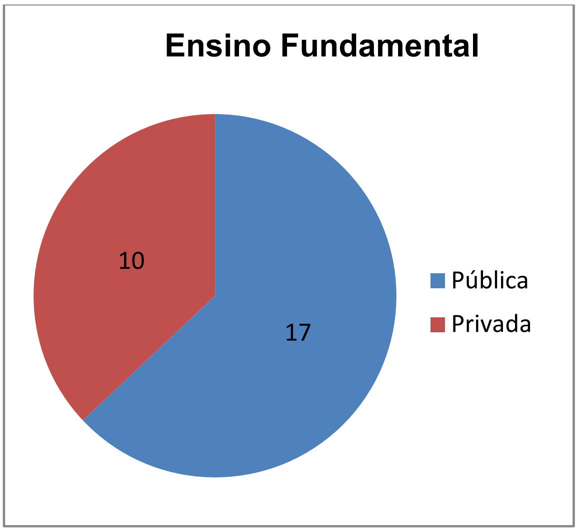
3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

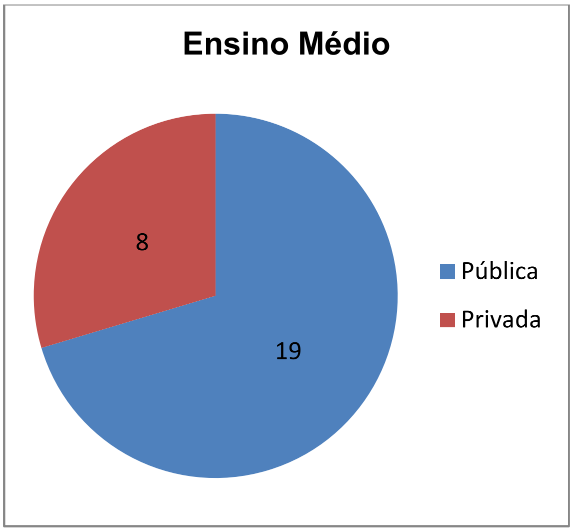
Antes de realizar as intervenções, os 31 participantes envolvidos na pesquisa assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A). O documento foi lido junto aos licenciandos, foram esclarecidas dúvidas e explicamos que utilizaríamos nomes fictícios para preservar as identidades e não usaríamos nenhuma imagem ou gravação que pudesse identificá-los.

O instrumento utilizado para caracterização dos participantes foi um questionário on-line (Apêndice B), encaminhado para o e-mail pessoal de cada licenciando. Formulamos esse instrumento com intuito de caracterizar os participantes, identificando vivências pessoais e expectativas sobre o curso no qual haviam ingressado, bem como identificar alguns conhecimentos matemáticos acerca do conceito de divisão por meio de questões envolvendo cálculo mental e algoritmo da divisão. Dos 31 licenciandos envolvidos nas intervenções, 22 participantes responderam ao nosso questionário on-line.

Para conseguirmos caracterizar melhor a turma, a primeira parte do questionário que trata da caracterização dos participantes foi impresso e entregue aos 9 que faltavam responder. Desse total, 5 pessoas retornaram. Dessa maneira, algumas das informações serão baseadas no total de 27 pessoas que responderam o questionário on-line ou impresso e forneceram subsídios para caracterizar os ingressantes na licenciatura em Matemática do ano de 2016. Trata-se de um grupo que cursou em sua maioria o ensino fundamental e médio em escolas públicas de ensino, conforme distribuição dos Gráficos 1 e 2:

Gráficos 1 e 2 - Curso em instituições particulares ou públicas dos ensinos fundamental e médio



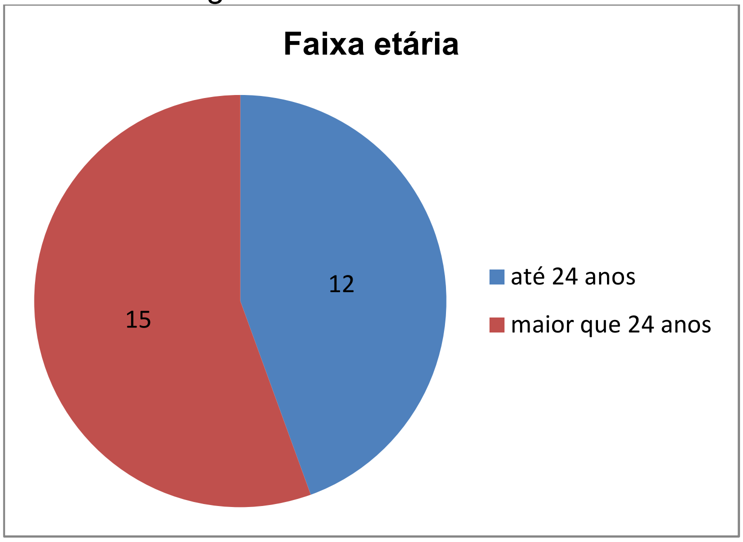


Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Os dados dos Gráficos 4 e 5 confirmam o panorama realizado por Gatti (2014), em que licenciandos provém em sua maioria de instituições públicas de ensino.

A turma é composta por 20 homens e 11 mulheres, com idades que variam de 17 a 45 anos, e média de idade de aproximadamente 26 anos. O Gráfico 3 apresenta a distribuição por idade dos licenciandos ingressantes. Se fossemos basear nossas informações nesses dados, poderíamos afirmar que muitos jovens e recém-formados do ensino médio optam por serem professores. Apesar disso, veremos em seguida que, desse total, uma grande parcela dos mais jovens não possuem a licenciatura como primeira opção de curso.

Gráfico 3 - Faixa etária dos ingressantes na licenciatura em Matemática 2016/1

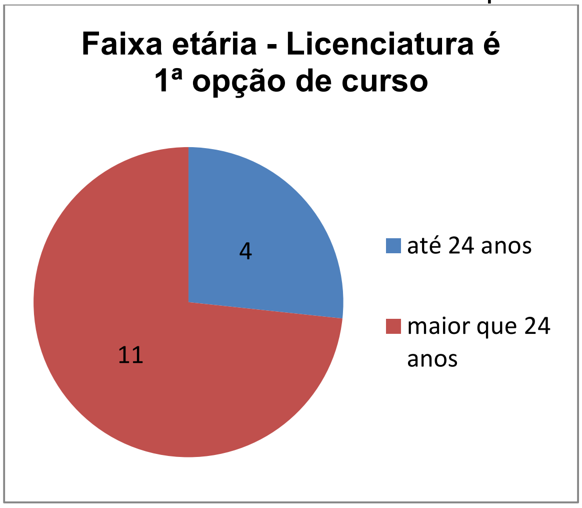


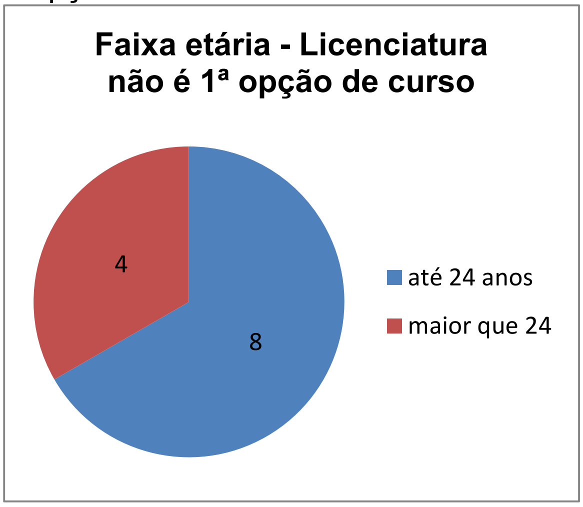
Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Com base na composição do Gráfico 3, é possível afirmar que a turma de alunos ingressantes no ano de 2016 apresenta dados abaixo do que foi constatado pelo Enade, sobre distribuição etária. Em pesquisa realizada por Gatti (2014), em torno 46% dos estudantes das licenciaturas encontram-se na faixa etária considerada ideal de 18 a 24 anos. Nessa turma, apenas 44% dos licenciandos está na faixa etária considerada ideal e essa porcentagem diminui drasticamente ao analisar a faixa etária dos participantes da pesquisa que apresentam a licenciatura em Matemática como primeira opção de curso.

Do total de 27 participantes que responderam ao questionário, 15 licenciandos tem a licenciatura como primeira opção e 12 tinham outros cursos como primeira opção. No segundo grupo, um apresentou como preferência Física, um Ciências Biológicas e dez disseram que Engenharia era primeira opção. Ao analisarmos a faixa etária desses dois grupos, observamos um movimento inverso entre eles.

Gráfico 4 e 5 - Análise da faixa etária dos grupos que tem e que não tem a licenciatura em Matemática como primeira opção de curso





Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Diante desses dados, apenas 27% dos licenciandos com licenciatura em Matemática como primeira opção de curso estão na faixa etária ideal, de acordo com pesquisa de Gatti (2014). Enquanto isso, em um movimento contrário, dos licenciandos que não tinham a licenciatura em Matemática como primeira opção, 67% encontram-se na faixa etária ideal, o que comprova a afirmativa de Gatti (2014, p.32) ao dizer que “[...] a carreira docente não tem exercido suficiente atração para os jovens concluintes do ensino médio, em especial para o trabalho com áreas disciplinares específicas, como matemática, física, química etc.”.

Os dados encontrados neste trabalho também são validados pelo estudo realizado pela Organização Internacional do Trabalho (OIT) e pela Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO). Nessa pesquisa, “[o] levantamento revelou que um número cada vez menor de jovens está disposto a seguir a carreira do magistério. E os baixos salários praticados constituem uma das principais causas apontadas para isto, senão a mais importante” (BRASIL, 2007 p.9). Isso se confirma quando dez participantes, dos doze que não tem licenciatura como primeira opção de curso, responderam que a primeira opção foi Engenharia.

3.3 ETAPAS DA PESQUISA

Esta seção contém um resumo das etapas realizadas para o desenvolvimento desta pesquisa.

1ª etapa: Estudo piloto - questionário

Destacamos aqui a realização do estudo piloto do questionário que inicialmente foi discutido no Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Espírito Santo (GEPEM-ES). No mês de fevereiro de 2016, o modelo de questionário foi entregue para cada componente do grupo presente no dia da discussão. Primeiramente, os participantes leram o questionário de maneira individual e, em seguida, sugeriram algumas alterações na formatação do arquivo e redação das perguntas. Com as sugestões, realizamos alterações a fim de garantir clareza nas questões propostas.

Para validar o questionário produzido (Apêndice B), ele foi enviado no dia 26 de fevereiro de 2016, aos licenciandos da instituição que participaram do Pibid Matemática no ano de 2016, solicitando que fosse respondido até o dia 2 do mês seguinte. Algumas perguntas foram adaptadas ao perfil dos participantes e, com a mediação da coordenadora geral do Pibid Matemática, o questionário on-line foi encaminhado aos licenciandos. Com o retorno dado por 14 participantes, validamos nosso primeiro instrumento de produção de dados e produzimos um artigo com alguns resultados desse estudo piloto (SANTANA, BRITO, PAIVA, 2017).

2ª etapa: Estudo piloto - oficina

O segundo estudo piloto, realizado no dia 19 de maio de 2016, foi uma oficina na V Semana da Matemática (Semat) do Ifes Campus Vitória, intitulada “Os zeros na divisão”. Contamos com a presença de 17 participantes, entre licenciandos e professores das redes de ensino da Grande Vitória. Consideramos que essa experiência foi importante, visto que identificamos quais pontos ainda eram falhos e deveriam ser aprimorados nas intervenções.

O ponto principal diz respeito à interação com os participantes e à mediação das dinâmicas propostas. Mais da metade dos participantes ficou em silêncio e não se sentiu à vontade para apresentar ao grupo as estratégias de resolução adotadas. Além disso, não conseguimos cumprir todo planejamento, assim, essa experiência foi importante para reorganizar a distribuição das atividades em mais dias, de modo a valorizar momentos de socialização que seriam gerados.

Apesar da angústia inicial, gerada pela inibição dos participantes, durante a socialização das respostas percebemos que as questões propostas contribuíram para a reflexão sobre o conceito de divisão. A oficina mostrou-se um bom espaço para validação das questões, e, com o retorno dado pelos participantes alteramos os enunciados que consideramos necessários, identificando o ponto que poderia ser mais problemático. Isso porque a participação dos licenciandos é primordial para analisarmos a (re)construção do conhecimento acerca do conceito de divisão.

3ª etapa: Estruturação das intervenções
Após os dois estudos pilotos, reelaboramos o questionário e as questões das intervenções (Apêndice C), modificando alguns enunciados, reorganizando atividades diárias e ampliando o tempo de duração das intervenções. As intervenções foram organizadas em cinco dias com abordagens distintas, seguindo uma ordem crescente em termos de rigor. No planejamento proposto, os conteúdos nunca deveriam ser discutidos antes de observar conhecimentos prévios dos participantes. Para isso, eles deveriam apresentar para a turma estratégias adotadas para resolver as questões e, com as sugestões iniciais, pesquisadora e professor regente conduziriam a dinâmica das aulas.

4ª etapa: Observações e intervenções
As observações das aulas da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I foram realizadas durante o primeiro semestre de 2016. Algumas vezes, a pesquisadora realizou alguma inferência ou sugestão, mas a proposta principal desse acompanhamento era que os licenciandos se habituassem com a presença dela e se sentissem à vontade para expressar as próprias ideias, sem

medo de errar no momento de apresentação das soluções para a turma. As intervenções ocorreram no fim do primeiro semestre de 2016 e, apesar do planejamento prever cinco dias de aula, o tempo não foi suficiente para realizar todas as aplicações e socializações das atividades. Durante nossas ações, algumas discussões duraram mais tempo do que o previsto e, portanto, não foi possível executar o planejamento em sua totalidade.

5ª etapa: Análise dos dados

Para analisar os dados, eles foram organizamos em três categorias com base na teoria dos registros de representação semiótica. A primeira traz registros de representação semiótica utilizando a língua natural e as duas últimas categorias englobam registros simbólicos numéricos. A segunda categoria trata dos registros simbólicos de questões envolvendo resolução de situações-problema, e a terceira categoria engloba os registros simbólicos numéricos de questões diretas de resolução do algoritmo da divisão. As duas últimas categorias foram analisadas separadamente, visto que entendemos que a maneira de lidar com cada uma delas é diferente.

Desse modo, foram analisadas produções, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica, bem como se resoluções apresentadas no decorrer das intervenções melhoraram, de maneira que os erros conceituais identificados inicialmente fossem minimizados. Nessas análises, na perspectiva dos saberes descritos por Shulman (1986, 2015), o objetivo era encontrar indícios de saberes docentes, como conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo.

3.4 DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO

Neste item descrevemos, conforme indicação para desenvolvimento da pesquisa do tipo intervenção pedagógica, os cinco encontros ocorridos no contexto da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I. Cada encontro durava em média duas horas e envolveu ao todo 31 licenciandos. Essa distribuição de participantes e os assuntos trabalhados em cada dia encontram-se resumidos no Quadro 5.

Quadro 5 - Planejamento dos conteúdos e quantitativo de participantes nas intervenções

Dia	Quantitativo	Assuntos trabalhados
30/06/2016	28	Grupo: Diferentes estratégias utilizando duas situações-problema.
01/07/2016	22	Individual: Divisão partitiva e quotativa, com produção de enunciados e as cinco ideias da divisão (Grupos equivalentes, Comparação multiplicativa, Comparação entre razões (proporção), Representação retangular e Combinatória) e nova produção de enunciados.
04/07/2016	22 e 25	Individual: Estimativa com uso de divisões que foram projetadas, julgando e justificando os resultados. Grupo: Como eles, como futuros professores, explicariam o algoritmo da divisão para alunos do sexto ano. Questões envolvendo zero no dividendo e/ou divisor.
07/07/2016	23	Grupo: Situações-problema envolvendo simplificação do dividendo e divisor e consequências no valor do resto. Uso do cálculo mental.
08/07/2016	15	Grupo: Teoria dos números: Possibilidades do quociente e divisor ao fornecer o dividendo e o resto. Uso da calculadora e, por fim, algoritmo de Euclides.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

A dinâmica das intervenções seguia, basicamente, a mesma estratégia. Com os licenciandos organizados em grupos, entregávamos a atividade proposta para cada participante, eles a discutiam, nos entregavam uma folha resposta por grupo e, posteriormente, realizávamos as socializações. Com soluções apresentadas ou com falas e diálogos desenvolvidos conduzíamos a dinâmica de aula e questionamentos para a turma, com intuito de (re)construir saberes sobre o conceito de divisão.

1º encontro

No primeiro dia de intervenção, realizada no dia 30 de junho de 2016, estiveram presentes 28 licenciandos, que se organizaram em grupos de quatro pessoas. Como o quantitativo de licenciandos na turma era grande, consideramos que esta essa seria uma boa organização, visto que não tínhamos muito tempo para as intervenções, e era preciso conhecer as estratégias adotadas pelos grupos. Contudo, o ideal seria montar trios, pois alguns licenciandos ficam inibidos com grupos maiores. As questões aplicadas objetivavam identificar conhecimentos prévios dos licenciandos enquanto resolviam situações-problema acerca da divisão. Para esse primeiro contato, foi proposta a seguinte questão:

Quadro 6 - Enunciado da questão 1 do primeiro dia de intervenção

1) Uma escola com 300 alunos está organizando uma viagem para Domingos Martins e orçou os custos para o aluguel de ônibus com duas empresas de transportes. Nos contratos de ambas as empresas, uma cláusula permitia a inclusão de novos alunos - mesmo após fechar o contrato - desde que os custos com a viagem fossem arcados. A escola estabeleceu que:

- ✓ Todos os alunos pagariam um mesmo valor;
- ✓ O dia 30 de junho seria o último dia para que os alunos confirmassem a participação no evento.

O quadro a seguir apresenta os valores praticados por cada uma das empresas.

Empresa	Capacidade de pessoas por ônibus	Custo por ônibus
A	45	R$ 1.000,00
B	30	R$ 700,00

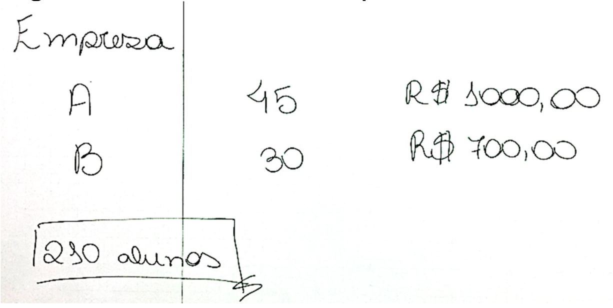
a. No dia 29 de junho, 210 alunos já haviam confirmado que iriam à viagem. A diretora, na tarde desse mesmo dia, fechou o contrato com a empresa que apresentou o menor custo para essa quantidade de alunos. Qual foi essa empresa?
b. No dia 30 de junho, mais 20 alunos também confirmaram que iriam à viagem. Como ainda estavam no prazo, a diretora precisou incluí-los. O aumento no número de alunos interessados na viagem representou uma diminuição no valor pago por pessoa? Justifique sua resposta. (Vale lembrar que os custos do transporte serão divididos igualmente entre os alunos).

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Nossa expectativa era que no primeiro item os licenciandos construíssem o custo total das empresas e escolhessem a de menor valor. Já no segundo item, estávamos interessados em saber se, após contratação da empresa, o aumento no quantitativo de alunos interessados em participar da viagem representaria uma diminuição do valor pago por pessoa. Esperávamos que calculassem o valor por pessoa antes e após inclusão das 20 pessoas que decidiram participar da viagem. Consideramos que essa seria uma das possíveis respostas, porém temos consciência e valorizamos diferentes tipos de soluções.

A questão 1a foi entregue, eles discutiram nos grupos e escreveram a solução do grupo. Em seguida, recolhemos uma folha por grupo e socializamos estratégias adotadas. Na socialização, dois licenciandos foram ao quadro, a primeira foi Sara, mas como ela não estava com uma folha de auxílio, pediu que sua colega Márcia lesse o enunciado. Enquanto isso, ela anotava as informações necessárias para os cálculos, conforme **Erro! Fonte de referência não encontrada.**2.

Figura 2 – Uso de tabela para coletar informações do enunciado da questão 1



Empresa		
A	45	R$ 1000,00
B	30	R$ 700,00
210 alunos		

Fonte: Acervo da autora (2018).

Ao término da leitura e conversão do enunciado em linguagem matemática, Sara iniciou o tratamento dos dados. Ela utilizou algoritmo da divisão, porém, como sua resolução foi diferenciada, Marcelo foi ao quadro apresentar outra estratégia, utilizando novamente algoritmo da divisão. Após a apresentação de Marcelo, perguntei se alguém utilizou outro caminho de resolução. Um aluno falou sobre formar uma tabela e usar somas sucessivas relacionando o número de ônibus com o total de passageiros. Concluímos que a empresa B foi contratada, por apresentar um valor menor do que a empresa A.

Antes da socialização da questão 1b, o professor fez uma observação com base no enunciado, reforçando a ideia de que a diretora fechou contrato um dia antes do previsto. Alguns grupos não haviam se atentado a esse detalhe e analisaram ambas as empresas antes e após a inserção das 20 pessoas. Independentemente da estratégia adotada, todos chegaram à solução correta.

A segunda situação discutida em nosso primeiro dia de intervenção envolveu a capacidade de livros por estante e mudança de mobiliários de uma biblioteca (Quadro 7), solicitando duas estratégias distintas de resolução.

Quadro 7 - Questões 2 e 3 do primeiro dia da intervenção

2)	Uma biblioteca escolar possuía 20 estantes, com 150 livros cada. Por ocasião de uma reforma, foram solicitadas estantes menores e mais ergonômicas, com capacidade para 120 livros cada. Calcule a quantidade mínima de novas estantes que deve ser comprada de modo a acomodar todos os livros da biblioteca.
3)	Experimente traçar outra estratégia de solução para a questão 2 diferente da utilizada.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

O objetivo foi explorar e valorizar o uso de diferentes estratégias para resolver um mesmo exercício. Contudo, lembramos a eles que, uma vez em sala de aula, como professores, eles poderão encontrar essa situação e precisam estar habituados e flexíveis às diferentes interpretações de um enunciado.

Durante a socialização das questões 2 e 3, houve uma participação maior de licenciandos que se voluntariaram a ir ao quadro expor sua estratégia de resolução. Quatro participantes foram ao quadro e como o primeiro apresentou suas duas soluções, houve ao todo a exposição de cinco soluções diferentes. Com as duas atividades propostas analisamos, principalmente, se eles recorriam ao algoritmo da divisão ou apresentavam outras estratégias de resolução.

Ao analisar as folhas respostas dos grupos de ambas as questões, identificamos uma predominância do algoritmo da divisão em detrimento de outras estratégias de resolução. Na primeira situação, apenas um grupo dos sete formados utilizou uma tabela para resolver o problema. Já na segunda situação houve um uso mais diversificado de estratégias de resolução, mas seis grupos recorreram ao algoritmo da divisão em alguma das resoluções.

2º encontro

No segundo dia de intervenção, realizada no dia 1º de julho de 2016, foi proposta uma discussão sobre divisão partitiva e quotativa e ideias do campo multiplicativo (Grupos equivalentes, Comparação multiplicativa, Comparação entre razões (proporção), Representação retangular e Combinatória). Estavam presentes 22 licenciandos e trabalhamos com produção individual de enunciados de problemas.

Como teve projetor nessa aula, os licenciandos sentaram-se próximos, mas a organização da turma não atrapalhou o desenvolvimento da aula. Iniciamos a dinâmica relembrando os termos: Dividendo, divisor, quociente e resto e os identificamos na representação usualmente utilizada do algoritmo de divisão.

$$\begin{array}{r|l} Dividendo & divisor \\ \cline{2-2} quociente & resto \end{array}$$

Antes de entregar as folhas de resolução, expliquei que nessa atividade era para elaborar uma situação em que o dividendo fosse o número 5530 e o divisor fosse o número 54. Porém, não era para fazer como arme e efetue e deveriam elaborar um enunciado.

Quadro 8 - Enunciado da questão 1 do segundo dia de intervenção

1) Elabore uma situação-problema de divisão, próxima da realidade, em que o dividendo seja 5530 e o divisor seja 54.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Após a produção do enunciado inicial, questionei os licenciandos se saberiam distinguir o enunciado produzido como do tipo partitivo ou quotativo. A partir dessa indagação foi possível identificar o conhecimento deles sobre essa diferenciação. Inicialmente, ressaltaram o fato de a divisão ter resto ou não; alguns apresentaram outras justificativas, como o quociente apresentar um número inteiro ou decimal, mas não definimos de imediato os dois tipos. Como eles estavam distantes da definição correta, apresentamos exemplos utilizados por Selva e Borba (2005, p.58) de forma que conseguissem distinguir e estabelecer as características da divisão do tipo partitiva ou quotativa.

> Partição:
> 1. Na festa de São João da escola, a professora Ana trouxe 34 pamonhas para servir em 4 bandejas. Ela quer que em cada bandeja fique a mesma quantidade de pamonhas. Quantas pamonhas via ter em cada bandeja?
> 2. Em uma festa de aniversário, a mãe de João tinha 36 chicletes para serem dados a 8 crianças. Ela quer que cada criança receba a mesma quantidade de chicletes. Quantos chicletes cada criança vai receber?
> Quotição:
> 1. Na organização de uma festa, Luísa preparou 34 sanduíches. Em cada bandeja cabem 8 sanduíches. Quantas bandejas ela vai usar?
> 2. Sr. Antônio encomendou 28 pastéis para sua festa de aniversário. Em cada pratinho cabem 8 pastéis. Quantos pratinhos ele vai precisar?

Com essa proposta, os licenciandos conseguiram distinguir diferenças entre elas. Foi um processo longo, pois discutimos por 30 minutos até eles conseguirem associar suas afirmativas corretamente. Um dos licenciando, ao término das nossas discussões, observou: "Parece que a parte define a quota e na quotição a quota define as partes", e eu comentei que eu sempre me confundida, pois, em todos os casos, se temos as partes, descobrimos as cotas e, se no enunciado temos as quotas, descobrimos as partes. Desse modo, a discussão foi concluída dizendo que um enunciado de divisão é partitivo ou quotativo dependendo das informações do enunciado.

Somente após os licenciandos compreenderem as diferenças entre os dois tipos, é que apresentamos a definição de divisão partitiva e quotativa, segundo Selva e Borba (2005, p.55)[4].

> Problemas de partição são aqueles em que é dado um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo deve ser distribuído, o resultado e o valor de cada parte. Problemas de quotição consistem em problemas em que é dado o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividir o mesmo, o resultado consiste no número de partes obtidas.

Reafirmamos que a definição baseava-se nos dados contidos no enunciado e, então, prosseguimos com nossas atividades com a resolução das questões 2 e 3 (Quadro 9). Eles classificaram o enunciado da questão 1 como partitivo ou quotativo. Em seguida, deveriam produzir um enunciado utilizando o mesmo contexto, mas com o outro tipo de divisão. Ou seja, se o enunciado da questão 1 era quotativo, deveriam transformá-lo em partitivo e vice-versa. Como alguns estavam com dificuldades para utilizar o mesmo contexto, permitimos que criassem outro contexto para produzir o segundo enunciado.

[4]Em uma avaliação posterior percebemos que a definição de divisão partitiva e quotativa de Selva e Borba (2005) precisava ser expandida para contemplar o conjunto dos números reais, assim como a apresentada na seção 2.4.1. Mas na seção de descrição, ela será apresentada como em nossas intervenções.

Quadro 9 - Enunciado das questões 2 e 3 do segundo dia de intervenção

2)	Analise o enunciado que foi produzido e o classifique como divisão partitiva ou quotativa, justificando sua resposta.
3)	Agora, produza um enunciado com o mesmo contexto do enunciado produzido anteriormente e o transforme utilizando o outro tipo de divisão.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Enquanto alguns finalizavam a resolução das questões 2 e 3, perguntamos aos licenciandos qual tipo de divisão, para eles é mais trabalhada no ensino fundamental. Eles disseram que a divisão partitiva. Diante da resposta, expliquei que o ideal é o professor mesclar atividades com os dois tipos de divisão. Reforçamos a ideia de abordar as operações aritméticas de forma concomitante apresentando a eles a proposta de trabalho de Vergnaud dos campos aditivos e multiplicativos. Aproveitando a organização realizada pelo autor, também sugerimos que tais campos sejam apresentados aos alunos de forma concomitante, assim, chegará um momento em que o professor apresentará para os alunos, situações-problema mesclando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Recomendamos que o trabalho concomitante seja realizado porque, se tal fragmentação ocorrer, os alunos podem apenas coletar informações do enunciado e operar com base no conteúdo que está sendo estudado naquele momento. Também aproveitamos a oportunidade para falar sobre situações com relação ternária e quaternária.

Finalizada essa discussão inicial, perguntamos aos licenciandos se eles saberiam definir ou exemplificar algumas das cinco ideias da divisão. Porém, como a resposta foi negativa, apresentamos, com auxílio do projetor, as cinco ideias da divisão utilizando exemplos da tese da Silva (2009).

Ressaltamos mais uma vez que a proposta não é que os alunos do ensino fundamental saibam diferenciar as ideias apresentadas, mas que os professores estimulem diferentes vivências em sala de aula. Para finalizar, eles deveriam escolher dois tipos de divisão e produzir enunciados partitivos e quotativos (Quadro 10).

Quadro 10 - Enunciado da questão 4 do segundo dia de intervenção

- Escolha duas entre as cinco ideias da divisão (Grupos equivalentes, Comparação multiplicativa, Comparação entre razões (proporção), Representação retangular e Combinatória) e elabore enunciados com Divisão Partitiva (DP) e Divisão Quotativa (DQ).

a) Ideia da divisão: ______________________________

DP: ____

____

DQ: ____

____

a) Ideia da divisão: ______________________________

DP: ____

____

DQ: ____

____

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

3º encontro

No terceiro dia de intervenção, realizada em 4 de julho de 2016, trabalhamos com dois momentos distintos. O primeiro foi realizado individualmente, com a presença de 22 licenciandos, e envolveu divisão mental ou por estimativas. Apresentamos com auxílio de um projetor quatro divisões (Figura 3).

Figura 3 - Questões projetadas no 3º dia de intervenção

a) $540 \div 5 = 18$

b) $10.008 \div 4 = 2.502$

c) $2240 \div 20 = 17$

d) $808 \div 8 = 11$

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

As divisões foram apresentadas uma a uma, com intervalo de tempo entre elas. Nesse intervalo, os participantes julgaram os resultados como absurdo ou não, justificando a resposta (Quadro 11). A proposta era que eles não recorressem ao cálculo escrito, mas que encontrassem uma estratégia alternativa para julgar se o resultado estava distante do valor real pela estimativa ou realizassem cálculos mentalmente, descrevendo a estratégia utilizada.

Quadro 11 - Enunciado da questão 1 do terceiro dia de intervenção

1. Quais resultados lhe parecem absurdo:

	Sim	Não	Por quê?
a)			
b)			
c)			
d)			

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Pelas folhas resposta, nem todos conseguiram julgar corretamente o resultado da divisão como absurdo ou não. E nas justificativas apresentadas, a maioria dos licenciandos apenas escreveu se o resultado da divisão estava correto ou incorreto, outros corrigiram as respostas incorretas apresentando uma solução correta, e alguns apresentaram estratégias de decomposição ou prova real para avaliar as soluções apresentadas.

Após aplicar essa atividade, percebemos que uma das questões apresentadas não seguia nossa proposta inicial. Quando pensamos nas questões, o objetivo era que as respostas apresentassem excesso ou ausência de zeros, assim como as questões a, b e d. A divisão da letra c não seguia esse padrão, pois 2240÷20=112. Dessa maneira, a divisão deveria ser 2140÷20=107. Apesar desse erro, é possível perceber que o resultado era um absurdo, pois é bem menor do que deveria.

Finalizada essa etapa, pedimos que se organizassem em grupos e prosseguimos para a segunda proposta, com presença de 25 licenciandos. Propusemos que se imaginassem como professores de uma turma de 6º ano e explicassem cinco divisões, utilizando algoritmo da divisão (Quadro 12).

Quadro 12 - Enunciado da questão 2 do terceiro dia de intervenção

2. Agora você é o professor. Imagine-se em uma turma de 6º ano. Explique a eles as divisões a seguir:
   a) $687 \div 3 =$
   b) $325 \div 4 =$
   c) $436 \div 4 =$
   d) $553 \div 5 =$
   e) $6141 \div 6 =$

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Planejamos a atividade para que os grupos resolvessem e explicassem todas as divisões. Contudo como foi utilizado um tempo maior na primeira etapa, dividimos as alternativas entre os grupos, de modo que cada grupo resolvesse duas questões. Na sequência, deveriam escrever como explicariam passo a passo. Apesar dessa orientação, percebemos que nenhum grupo relatou nas folhas de solução como a explicação seria realizada, ao invés disso, alguns resolveram todas as divisões propostas com o tempo disponível.

Durante a socialização, exploramos essa ideia de se imaginarem como professores. Os licenciandos que foram ao quadro apresentaram uma resposta correta, mas enquanto explicavam os procedimentos, empregavam termos e/ou atitudes frequentemente utilizados em sala de aula, como simplificação do dividendo e divisor sem saber a razão de dar certo, e as consequências dessa simplificação, e o uso da expressão ‘2 dividido por 5? Não dá para dividir’, entre outros, que podem gerar nos alunos aprendizagens com erros conceituais. Após a socialização das respostas, prosseguimos para a segunda etapa de discussões em grupo. As questões abordam operações com zero como dividendo e/ou divisor (Quadro 13). Nessa etapa, os grupos deveriam resolver e explicar as quatro alternativas.

Quadro 13 - Enunciado da questão 3 do terceiro dia de intervenção

3. Resolva as divisões a seguir, justificando sua resposta:
   a) $8 \div 2 =$
   b) $0 \div 2 =$
   c) $2 \div 0 =$
   d) $0 \div 0 =$

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Na socialização dessas questões, as alternativas a e b foram respondidas sem dificuldades, já nas duas últimas, os licenciandos apresentaram respostas inconsistentes, como $2 \div 0 = \infty$ ou $0 \div 0 = 0$. Como o professor regente mediou essas resoluções, eu ia sugerindo que os licenciandos também participassem e apresentassem suas opiniões. Assim, compreenderíamos como pensaram para responder as questões propostas, identificando suas dificuldades, entendimento e erros conceituais.

4º encontro

No quarto dia de intervenção, realizado no dia 7 de julho de 2016, estavam presentes 23 licenciandos. Os alunos se organizaram em grupos para discutir uma situação-problema envolvendo simplificação do dividendo e divisor e alterações que acarretam no resto. Essa questão foi uma adaptação de uma vivência em sala de aula, de um professor da Coordenadoria de Matemática (Comat) de uma instituição federal. Ao ter conhecimento de minha pesquisa, relatou uma situação ocorrida com uma turma de ensino médio ao trabalhar arcos côngruos. Assim, produzimos uma situação de maneira a adaptar o contexto do problema e mantivemos os valores do problema gerador. Com seu relato, reproduzimos o ocorrido na resolução do aluno 1 e, aproveitando a ideia, elaboramos a resolução do aluno 2 para que os licenciandos pudessem analisar essas duas estratégias de resolução (Quadro 14).

Quadro 14 - Enunciado da questão 1 do quarto dia de intervenção

1) Um professor propôs a situação a seguir para a sua turma:

> Gabriela, todo ano, faz uma poupança para garantir o pagamento das primeiras mensalidades da escola de sua filha do ano seguinte; assim, ela consegue organizar suas finanças para que não tenha que recorrer a nenhum tipo de empréstimo.
> Sabendo que:
> - os valores economizados por Gabriela, ao longo de 2015, totalizaram R$1.480,00.
> - a mensalidade da escola da sua filha, em 2016, é de R$360,00,
> Determine o número de mensalidades que Gabriela conseguiu pagar usando apenas os R$ 1.480,00, e quanto sobrou para a mensalidade seguinte.

Em seguida, apresentou duas soluções que lhe chamaram a atenção:

Aluno 1
$148\cancel{0} \,\|\, 36\cancel{0}$ $4 \quad\;\; 4$ mensalidades   Ela pagou 4 mensalidades e sobrou R$ 4,00.
Aluno 2
$\frac{1480}{360} = \frac{148}{36} = \frac{74}{18} = \frac{37}{9}$ $\quad 37 \,\|\, 9$ $1 \quad 4$ Conseguiu pagar 4 mensalidades e sobrou R$ 1,00

a) Note que os alunos encontraram resultados diferentes. Elabore uma explicação que descreva o que cada um deles fez ao tentar responder a questão proposta.

b) Algum aluno obteve a resposta correta?
   - ✓ Se você acha que sim, indique esse aluno;
   - ✓ Se você acha que não, indique o resultado correto para a situação proposta. Não se esqueça de justificar sua resposta.

Fonte: Adaptado pela autora (2018).

Esperávamos que as resoluções distintas causassem um estranhamento nos licenciandos e eles apresentassem nas folhas respostas as causas dos diferentes valores encontrados no resto da divisão. Contudo, quase todos os grupos se limitaram a descrever os procedimentos das resoluções e apenas dois grupos reconheceram as causas da alteração no resto.

Nesse dia, ao explorar essa questão, conseguimos retomar uma situação ocorrida no primeiro dia de intervenção envolvendo mudança de mobiliário de uma biblioteca. Nessa situação, o licenciando que foi ao quadro disse que simplificou o dividendo e divisor porque o colega havia dito que dava certo. Após socializar com a turma e discutir os erros cometidos no primeiro dia de intervenção, trabalhamos com uma questão envolvendo cálculo mental, mas não houve tempo para socializar. No planejamento também tínhamos uma questão sobre uso da calculadora, mas não houve tempo hábil para aplicá-la.

5º encontro

No quinto dia de intervenção, realizado em 8 de julho de 2016 estiveram presentes 15 licenciandos que se organizaram em três grupos. A ausência de quase metade da turma foi porque era uma sexta-feira, alguns moram em cidades distantes e os participantes da pesquisa não tiveram as duas primeiras aulas. No encontro anterior, a turma pediu para anteciparmos a aula, mas não foi possível, pois o professor regente tinha aula em outra turma nos dois primeiros horários.

Nesse dia, discutimos temas relacionados à teoria dos números, em que a primeira questão propõe a determinação de todas as possibilidades de quociente e divisor ao apresentar um valor de dividendo e resto.

Quadro 15 - Enunciado da questão 1 do quinto dia de intervenção

1) Na divisão de 28 por um número natural, o resto é 8. Determine **todas** as possibilidades do quociente (q) e do divisor (d).

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Esperávamos que eles entendessem que o valor do produto entre o divisor e o quociente era 20, pois o dividendo era 28 e o resto era 8. Após determinar as possibilidades de quociente e divisor, deveriam excluir os que apresentassem divisor menor ou igual a 8, visto que o divisor deve ser maior do que o resto.

Durante as discussões geradas, percebemos que a potencialidade da questão era maior do que essa, já que os licenciandos associaram a possibilidade dos divisores a um padrão matemático dos possíveis divisores, alegando que eles sempre dobravam. Um novo exemplo foi sugerido com dividendo igual a 88 e resto igual a 8. Ao determinar as possibilidades de divisor e quociente, a afirmação foi fortalecida, pois no primeiro exemplo haveria como divisores os números 10 e 20. E, no segundo exemplo, os divisores foram 10, 20, 40 e 80, portanto também dobravam de valor.

Diante dessa ocorrência, o professor sugeriu o número 98 como dividendo e o número 8 como resto. Nesse exemplo, os licenciandos sugeriram o número 10 como o primeiro divisor e ainda buscavam padrões. No decorrer da discussão, insistiram na tentativa de encontrar padrões e, somente após discutirmos essas três situações e com a quebra no padrão que estavam buscando, eles perceberam que estavam informando divisores de 90, maiores do que o resto.

Posteriormente, foi proposta uma questão envolvendo o algoritmo de Euclides, com base em dois enunciados que foram entregues em uma mesma folha.

Quadro 16 - Enunciados das questões 2 e 3 do quinto dia de intervenção

2) Obtenha o quociente(q) e o resto (r) da divisão de 307 por 3.
3) Agora obtenha o quociente(q) e o resto (r) da divisão de -307 por 3.

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

As folhas foram entregues para os grupos, mas os componentes não discutiram as soluções de forma coletiva. Como a proposta foi a resolução de 307÷3 e -307÷3, os licenciandos resolveram a primeira divisão e, quando tentaram resolver a segunda, começaram a fazer alguns questionamentos. Dois licenciandos de um dos grupos disseram que tinha pegadinha e, se o dividendo era negativo, não sobra (referindo-se à possibilidade do resto ser positivo). Os comentários, continuaram dizendo que se eu não tenho nada (referindo-se ao dividendo negativo), como vai sobrar. Como consequência dessas análises coletivas, afirmaram que o resto da divisão de -307 por 3 é igual a -1. Ao recolher a folha dos grupos, percebemos uma unanimidade nas respostas e, além disso, todos os grupos reproduziram os algoritmos das duas alternativas, acrescentando apenas o sinal negativo no quociente e resto.

O estudo dessa questão foi motivado por duas vivências anteriores à realização de nossas intervenções. A primeira foi o contexto do mestrado, ao cursar a disciplina Debates Conceituais em Matemática. Com a proposta de apresentação por meio de seminários, meu grupo ficou responsável pelo conjunto dos números naturais. Assim, em parceria com o grupo que discutiu conjunto dos números inteiros, discutimos sobre o algoritmo de Euclides. Porém, durante as atividades, verificamos que alguns mestrandos tinham dúvidas acerca desse assunto.

Motivados pelas discussões geradas na disciplina do mestrado, também discutimos algoritmo de Euclides na oficina que realizamos durante a V Semat do Ifes Campus Vitória. Mais uma vez constatamos que alguns participantes desconhecem as características do algoritmo de Euclides, principalmente, com dividendo negativo. Por isso, o consideramos importante para ser discutido na intervenção, para que licenciandos ingressantes tenham contato com essa discussão, pois assim eles terão subsídios para articular o saber científico com o escolar e, então, poderão desenvolver futuramente o saber pedagógico do conteúdo.

Para finalizar, propusemos uma questão sobre calculadora, mas não tivemos tempo hábil para discussão, pois as questões anteriores tomaram muito tempo. Os licenciandos resolveram nos grupos e nos entregaram a resposta.

Quadro 17 - Enunciado da questão 4 do quinto dia de intervenção

4) Sabendo que você possui uma calculadora com os algarismos de 0 a 9, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e o sinal de igual, responda as questões a seguir: a) Quais operações você faria para obter o resto da divisão de 12.597 por 368? b) Tente reduzir o número de operações utilizadas. c) Qual o número mínimo de operações necessárias para obter o resto da divisão proposta?

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Ao observar as soluções dos grupos, percebemos que adotaram dois caminhos. Dividiram 12.697 por 368 e encontraram um resultado com parte inteira e decimal. Alguns grupos subtraíram a parte inteira e posteriormente multiplicaram por 368, encontrando 85 como resto. Outros grupos, ao se depararem com um resultado de divisão com parte inteira e decimal, utilizaram a parte inteira, que nesse caso foi 34, multiplicaram por 368, e o resultado foi subtraído de 12.597, encontrando também como resto o número 85.

Findada as descrições dos episódios de nossa pesquisa, apresentamos na seção seguinte a avaliação das intervenções. Relatamos primeiramente a avaliação dos participantes da pesquisa e posteriormente apresentamos nossa avaliação.

3.5 AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO

Esta seção contém um dos elementos fundamentais para caracterizar a pesquisa como do tipo intervenção pedagógica. Nela, apresentamos a avaliação da intervenção pelos participantes da pesquisa e, posteriormente, relatamos a avaliação realizada pelos responsáveis pelas intervenções, ou seja, professor regente da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I, pesquisadora e orientadora desta dissertação.

3.5.1 Avaliação dos participantes

Após realizar as intervenções, produzimos um questionário on-line (APÊNDICE D) para que licenciandos pudessem avaliar as ações realizadas em sala de aula. Enviamos o questionário para o e-mail pessoal dos participantes e para o e-mail da turma, havendo retorno de 17 participantes. É um número expressivo, pois o questionário foi enviado no fim do semestre e alguns licenciandos já haviam concluído as obrigações do semestre ou estavam em período de prova final.

Nesse questionário, os licenciandos tiveram oportunidade de avaliar a metodologia adotada, expor os conteúdos que mais marcaram seu aprendizado e o que consideraram interessante aprender. Nessa avaliação havia 5 perguntas. A primeira referia-se à avaliação da metodologia adotada e as demais se relacionavam aos conteúdos abordados na intervenção.

Diante das respostas apresentadas, selecionamos as mais relevantes. Essa seleção foi necessária, pois algumas não forneceram indícios para avaliar a intervenção, por se limitarem a responder com expressões do tipo: excelente, muito boa, de 0 a 10 me daria nota 8, entre outras respostas.

Primeiramente, recordamos os procedimentos realizados em sala de aula e solicitamos que eles avaliassem a metodologia adotada. Algumas das respostas fizeram menção à importância da metodologia para a formação do conhecimento e o desenvolvimento do próprio raciocínio; outros licenciandos associaram nossa postura a um processo investigativo de aprendizagem.

As avaliações de três licenciandos merecem destaque, pois ao analisá-las, apresentaram alguns indícios do posicionamento deles como futuros professores e uma aproximação com o saber pedagógico do conteúdo, uma vez que consideraram nossa postura em sala de aula adequada para o ensino. Esses relatos permitiram observar que alguns deles já possuem uma preocupação, como futuros professores, de dar aos alunos oportunidade de serem agentes ativos no próprio aprendizado. Para esclarecer, seguem as falas de alguns licenciandos:

Quadro 18 - Opinião dos licenciandos sobre as intervenções

É um método interessante, pois estimula o aluno a pensar por si mesmo e chegar ao resultado sozinho.
Foi muito interessante. Seria bacana observar tal abordagem em grupos de alunos que têm seu primeiro contato com a matéria.
As intervenções foram ótimas! Os professores e a pesquisadora estavam sempre atentos aos detalhes e nos abriam os olhos para casos frequentes de problemas com divisão e da dificuldade de estudantes no aprendizado.

Fonte: Acervo da autora (2018).

Na fala do último licenciando, observamos que ele ressalta os exemplos dados em sala de aula, destacando possíveis motivações para dificuldades de alunos do ensino básico com a divisão. Outros licenciandos destacaram a importância da proposta de intervenção e do pronunciamento feito pelos licenciandos, permitindo que estes se preparem para o papel que executarão como futuros professores.

Quadro 19 - Percepção dos licenciados do papel ativo dos participantes da pesquisa

A metodologia é boa e super válida, pois busca investigar, incentivar o pronunciamento por parte dos alunos, futuros professores.
As intervenções foram de extrema importância para o enriquecimento cognitivo, o professor por sua vez, juntamente com as pesquisadoras, eles mantiveram sim um papel de retaguarda, deixando a iniciativa partir dos alunos, investigando, gerando conjecturas, formulando métodos e compartilhando as diferentes formas de se chegar a um mesmo resultado.
Essa metodologia de trabalho adotada foi boa, pois podemos interagir com outras pessoas e, na hora de discutir o método da resolução da questão, podemos perceber outros modos de pensar e solucionar aquela questão.

Fonte: Acervo da autora (2018).

As demais perguntas objetivaram resgatar o que foi mais marcante para os licenciandos com relação à intervenção. Diante da proposta de (re)construção dos aprendizados sobre o conceito de divisão, tivemos a oportunidade de identificar os conhecimentos considerados mais relevantes pelos licenciandos.

Ao responder a pergunta: “Como você analisa seu conhecimento sobre divisão em dois momentos distintos: antes e após as intervenções?”, alguns licenciandos consideraram que antes possuíam conhecimentos similares a alunos de ensino médio e, após a intervenção, consideraram que a compreensão acerca da divisão avançou mais. Além disso, dois licenciandos já explicitaram nessa pergunta conteúdos que mais se destacaram, conforme respostas a seguir:

Quadro 20 - Licenciandos destacam as aprendizagens das intervenções

Divisão sempre é a operação que mais nos complica quando somos menores, pois é um pouco complexo e difícil de aprender, enfim, antes não tinha noção do que era uma divisão partitiva e cotativa, dessa forma, aprendi coisas novas e que, com certeza, levarei a meus alunos quando for professor.
Aprendi uma estratégia nova de divisão. E me atentei para a definição de divisão de Euclides e da limitação que ela implica.

Fonte: Acervo da autora (2018).

Essas revelações aconteceram com outros licenciandos em questões posteriores, reforçando nossas avaliações no que mais focamos durante as intervenções. Um relato, apesar de não destacar a situação específica, revela que no decorrer da questão proposta, sua dúvida foi sanada.

Quadro 21 - Licenciando relata que a atividade elucidou sua dúvida

Teve um ponto que a própria atividade me elucidou o algoritmo. E tivemos também dois outros pontos nas discussões que foram elucidativos.

Fonte: Acervo da autora (2018).

Acreditamos que esse processo somente foi possível porque estimulamos que os licenciandos apresentassem suas dúvidas e, com elas, conduzimos a socialização das respostas e as discussões em sala. Esse relato reforça a importância de discussões coletivas integradas a reflexões individuais, tornando essa integração imprescindível no processo de formação de professores.

Na terceira pergunta propusemos aos licenciandos refletirem sobre as “transformações” ocorridas no próprio aprendizado, ou seja, a reconstrução de conhecimento sobre algum conceito. Começaram, então, a aparecer com mais frequência os conteúdos e abordagens mais relevantes.

Diante da pergunta “Com as intervenções, você percebeu alguma ‘transformação’ nos conhecimentos que você possuía sobre divisão? Se sim, relate o que você julga ter sido ‘transformado’”, as respostas que apareceram com mais frequência, mencionavam o zero no quociente, a divisão de zero por zero ser uma indeterminação, diferentes maneiras de se resolver uma divisão, e principalmente, a divisão com números negativos e o resto dessa divisão, referindo-se ao algoritmo de Euclides. Um dos licenciandos ainda se recordou da atividade sobre simplificações da fração e, consequentemente, a simplificação do resto.

Por fim, perguntamos aos licenciandos se aprenderam algo inédito: “As intervenções permitiram a você conhecer algo inédito para a divisão? Se sim, relate sobre os novos conhecimentos adquiridos”, e as respostas foram similares, com menções ao zero no quociente, divisão partitiva e quotativa, algoritmo de Euclides, em que o dividendo é negativo e o divisor positivo, e o fato de encontrar nessa divisão resto positivo. Uma licencianda recordou-se da atividade proposta em que havia valor do dividendo e do resto e foram solicitadas as possibilidades de quociente e divisor.

Pelas respostas que constam nos relatos dos licenciandos, percebemos que as atividades que mais os marcaram foram as atividades que serão analisadas no capítulo 4 desta dissertação.

3.5.2 Avaliação dos formadores

As observações durante todo o semestre na disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I foram importantes para que os licenciandos se acostumassem com a presença da pesquisadora e não se sentissem desconfortáveis no momento de socialização. Esse tempo foi importante para promovermos um ambiente de respeito mútuo por incentivar a participação ativa dos grupos durante a socialização de respostas. Portanto, também consideramos ideal realizar intervenções no fim do semestre, pois a turma demorou algum tempo para se entrosar e se sentir à vontade para expor opiniões e estratégias de solução, especialmente por ser uma turma ingressante.

Apesar de, no início da proposta de intervenção, termos pensado em um trabalho que discutisse cálculo mental, estimativa, calculadora, divisão partitiva e quotativa e algoritmo da divisão, não foi possível dar um enfoque adequado a cada uma das discussões. Para conseguirmos dar um enfoque a todos os assuntos, precisaríamos de um tempo maior para a pesquisa. Essa percepção somente surgiu no decorrer das intervenções, visto que, inicialmente, pensamos que conseguiríamos desenvolver nosso planejamento. Quando executamos o planejamento e as discussões excediam o tempo previsto, acabávamos privilegiando os dois últimos temas citados. Com relação aos demais assuntos, não tivemos oportunidade de socializar estratégias de solução, assim somente recolhemos as respostas dos licenciandos. Dessa maneira, durante nossas análises e no produto educacional privilegiamos as abordagens nas quais socializamos as respostas.

Durante e após as intervenções observamos alguns equívocos nos enunciados e, em um caso, o licenciando destacou essa situação. Consideramos que, por vezes, os enunciados elaborados não alcançavam os objetivos que havíamos planejado. Em algumas questões foi solicitado que se colocassem como professores e descrevessem a maneira de explicar o algoritmo de divisão, mas os licenciandos não produziram esses relatos, restringindo-se a resolver as divisões propostas. Diante dessas constatações, alguns enunciados foram reelaborados para serem inseridos já modificados no produto educacional. A intenção foi estimular e desenvolver esse posicionamento nos futuros professores.

Por fim, consideramos que três elementos foram imprescindíveis para a (re)construção do conhecimento dos licenciandos acerca do conceito de divisão. O primeiro, e presente em diferentes momentos de nossa intervenção, refere-se às posturas do professor regente e da pesquisadora como mediadores das discussões. Esse posicionamento em sala de aula privilegiou outros dois elementos importantes nesse processo: a proposta de trabalharmos um conceito baseado em conhecimento prévio dos licenciandos e as socializações das estratégias adotadas pelos grupos, privilegiando o diálogo entre os participantes da pesquisa.

4 ANÁLISE DE DADOS

Organizamos este capítulo com base nos dados produzidos nas intervenções. Nesta análise qualitativa contemplamos transcrições de falas e diálogos, produções escritas da socialização em sala de aula e das que foram entregues nas folhas respostas.

Inicialmente, os dados seriam organizados e analisados em episódios, mas acabamos por classificá-los em três categorias com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009). A primeira refere-se a registros utilizando a língua natural, nela encontram-se enunciados de problemas de divisão do tipo partitivo e a quotativo. A segunda categoria engloba registros simbólicos numéricos, sendo subdividida em duas abordagens: registros utilizados em questões envolvendo situações-problema com situações ocorridas no primeiro e quarto dia de intervenção e registros de questões diretas de resolução do algoritmo da divisão, nela agrupamos vivências do terceiro dia e quinto dia de intervenção.

4.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA COM O USO DA LÍNGUA NATURAL

Nesta categoria agrupamos dados referentes à produção de enunciados realizada no segundo dia de intervenção. Após o momento inicial de elaboração de um enunciado envolvendo o número 5530 como dividendo e o número 54 como divisor, verificamos o conhecimento prévio da turma acerca da divisão partitiva e quotativa.

No momento de discussão inicial detectamos que os licenciandos ainda não apresentavam o que Shulman (1986, 2015) denomina como conhecimento do conteúdo. As definições e ideias iniciais estavam distantes da definição correta, pois associavam a diferenciação de divisão partitiva ou quotativa ao fato de o problema apresentar resto ou não, ou o quociente ser um número inteiro ou decimal. Alguns licenciandos disseram que divisão partitiva é quando se divide em partes iguais e não tem resto, outro associou divisão quotativa a situações de distribuição de uma pizza, ao qual foi pedido que pensasse em uma distribuição de quantidades discretas e ele não conseguiu exemplificar. Diante dessa situação, pedimos um exemplo de divisão partitiva e disseram que só seria possível se fosse, por exemplo, 30 balas entre 5 pessoas, na divisão de 31 balas para 5 pessoas não seria possível, pois haveria resto.

Após identificarmos esses conhecimentos prévios dos licenciandos compreendemos que eles apresentavam pouco conhecimento do conteúdo sobre divisão partitiva e quotativa. Dessa forma, apresentamos exemplos dessas divisões para que (re)construíssem o conhecimento do conteúdo e formulassem suas próprias impressões sobre divisão partitiva e quotativa. Nessa ação e em outras que serão apresentadas neste capítulo de análises, utilizamos para orientá-los na construção desse conhecimento duas fontes: “[...] a bibliografia e os estudos acumulados nas áreas de conhecimento, e a produção acadêmica histórica e filosófica sobre a natureza do conhecimento nesses campos de estudo” (SHULMAN 2015, p.207), pois corroboramos quando Shulman (2015) afirma que o ensino é uma profissão que exige formação acadêmica.

Após a leitura do primeiro exemplo de divisão partitiva por um licenciando, retomamos a discussão do exemplo das 30 balas, perguntando como ficaria um enunciado partitivo. Um licenciando disse corretamente que seriam 30 balas, para serem divididas por 5 pessoas. Ao ler a mesma situação na divisão quotativa, um dos licenciando observou: “Na partitiva, os itens são diferentes e, na quotativa, os itens são iguais”. Durante a socialização, não foi possível dizer se seria correto em todos os casos e, assim, generalizar. É preciso estudar mais sobre isso. Contudo, em uma análise feita a posteriori foi possível refletir melhor sobre as afirmativas do licenciando e perceber o equívoco em sua fala. Assim, na divisão partitiva, as grandezas realmente são diferentes, pois teríamos 30 <u>balas</u> para serem distribuídas entre 5 <u>pessoas</u>. Mas na divisão quotativa as grandezas continuam distintas, pois seriam teríamos 30 <u>balas,</u> e distribuiríamos 6 <u>balas por pessoa</u>.

No decorrer da discussão em sala, os licenciandos começaram a focar na solução do problema, ou se o valor do resto interferia ou não na resposta do problema. Como começaram a retomar uma discussão que não era necessária para distinguir os tipos de divisão, apresentamos a eles mais dois exemplos com divisão partitiva e quotativa em situações que, ao serem divididas, seriam inexatas. Diante desses exemplos, perceberam que o fato da divisão ser exata ou não exata não define se será partitiva ou quotativa. Assim, após a leitura dos exemplos propostos por Selva e Borba (2005), retomamos a proposta de elaborar um enunciado partitivo e quotativo envolvendo 30 balas. Os licenciandos formularam o enunciado corretamente, e reafirmamos que, independente do problema ter resto ou não, como a reformulação do problema com 31 balas e mantendo as outras informações, conseguimos classificá-lo. A elaboração correta dos enunciados envolvendo divisão partitiva e quotativa apontou a construção do conhecimento do conteúdo, pois os licenciandos estabeleceram relações válidas e sem erros conceituais.

Em seguida, um licenciando concluiu: "Parece que a parte define a quota e na quotição a quota define as partes". Percebe-se nesse comentário um desenvolvimento do conhecimento do conteúdo, pois ele identifica a transitividade entre os enunciados das questões. Contudo, apesar de ser uma observação importante, ainda não representa a definição dos dois tipos de divisão.

Com essa observação do licenciando, foi possível dizer que, ao se referir à divisão do tipo partitiva ou quotativa, em todos os casos, quando no enunciado temos o todo e as partes, se descobrem as cotas e, se no enunciado há o todo e as quotas, as partes são descobertas. Assim, precisamos observar os dados do enunciado para fazer essa classificação do problema como partitivo ou quotativo. Após essa definição informal, apresentamos a definição de divisão partitiva e quotativa, na perspectiva de Selva e Borba (2005)[5].

---

[5]Na discussão inicial de divisão partitiva e quotativa apresentada na seção 2.4.1, expandimos a definição de divisão partitiva e quotativa de Selva e Borba (2005) para contemplar o conjunto dos números reais. Mas em nossas intervenções, os exemplos que utilizamos eram válidos para a definição apresentada pelas autoras.

Nesses processos de idas e vindas identificamos a predominância de uma das categorias do modelo de raciocínio e ações pedagógicos de Shulman (2015). Identificamos a 'compreensão' sendo estabelecida, pois "Ensinar é, primeiro, entender. Pedimos que o professor compreenda criticamente um conjunto de ideias ou conteúdo a ser ensinado" (SHULMAN, 2015, p. 216). Nesse sentido houve engajamento e curiosidade dos licenciandos para compreender os conceitos envolvidos.

Vale ressaltar que as discussões foram longas, privilegiaram o conhecimento prévio dos licenciandos e com essa interação conseguimos perceber (re)construções do conhecimento em ação, visto que foram mobilizadas afirmações assertivas que não ocorreram no início da intervenção. Findada a primeira etapa, prosseguimos para a resolução das próximas atividades com classificação do enunciado produzido e sua reformulação para o outro tipo de divisão.

A fim de validar (re)construções do conhecimento do conteúdo acerca da divisão partitiva e quotativa, analisamos os enunciados elaborados durante nossa intervenção. Primeiramente, analisamos se os licenciandos classificaram corretamente o primeiro enunciado e posteriormente, se conseguiram transformá-lo no outro tipo de divisão. Assim, se, por exemplo, o enunciado elaborado inicialmente fosse partitivo, esperávamos um enunciado quotativo e vice-versa.

Nos enunciados produzidos pelos licenciandos e que serão apresentados, em alguns casos havia erros de grafia, de acentuação ou de representação matemática. Eles foram transcritos na íntegra, respeitando-se a maneira de cada licenciando representar sua produção textual e matemática naquele momento.

4.1.1 Distribuição dos enunciados produzidos

Dos 22 participantes da primeira etapa, não conseguimos avaliar os enunciados de três licenciandas. Esses enunciados não foram quantificados, já que um envolvia a ideia de multiplicação, outro não era um problema, mas uma descrição de uma situação, e o terceiro não contemplava um enunciado lógico passível de resolução.

Com as produções de licenciandos possíveis de serem quantificadas, organizamos uma tabela para analisar a distribuição dos enunciados de acordo com os tipos de divisão (Quadro 22). Classificamos os enunciados iniciais, verificamos se foram classificados de maneira correta pelos licenciandos e classificamos a segunda produção de enunciados.

Quadro 22- Distribuição da produção de enunciados envolvendo divisão partitiva e quotativa

	Questão 1		Classificação		Questão 3	
	Partição	Quotição	Correta	Incorreta	Partição	Quotição
Número de enunciados	16	3	15	4	5	14

Fonte: Organizado pela autora (2018).

A produção do enunciado da questão 1 gerou um número mais de cinco vezes maior de enunciados de divisão partitiva, quando comparada à divisão quotativa. Vale lembrar que a produção desse enunciado foi feita no primeiro momento da intervenção e não fizemos nenhuma inferência anterior. Esses dados são validados pelos estudos de Lautert e Spinillo (2002) quando afirmam que as resoluções das divisões de partição por crianças são mais fáceis, pois estão mais presentes em experiências sociais e por tratar da correspondência de um a um para cada conjunto. Estes autores, consideram ainda que a forma de raciocinar da quotição é menos comum nas experiências sociais informais. Dessa maneira, mesmo que nosso público seja diferenciado da pesquisa realizada, as afirmativas de Lautert e Spinillo (2002) ainda são válidas. Portanto, ocorreu uma produção maior de enunciados de divisão partitiva, por ser mais comum nas experiências sociais e são, assim, mais fáceis de serem reproduzidos nos enunciados das questões.

4.1.2 Classificação e mudança de tipo de divisão realizadas corretamante

Ao realizarmos uma análise dos enunciados produzidos, consideramos que 15 licenciandos encontram-se nessa categoria. Eles apresentam conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 2015), tanto na classificação do enunciado produzido como partitivo ou quotativo quanto na produção de um novo enunciado com o outro tipo de divisão e realizaram tratamento adequado de sua produção inicial (DUVAL, 2012). Aqui foram consideradas duas subcategorias, uma que mantém um mesmo contexto e, para tanto, ao produzir novo enunciado altera o valor do divisor. Na segunda subcategoria, há os mesmos valores de dividendo e divisor nos dois enunciados, assim, alteram o contexto dos problemas.

Dos 15 licenciandos agrupados nessa categoria, 9 deles desenvolveram enunciados mantendo o contexto da situação inicial. Para nós, o contexto só é mantido quando o quociente do primeiro problema torna-se divisor do segundo. Essa ideia consta na elaboração do enunciado da licencianda Bianca.

Quadro 23 - Transcrição dos enunciados da Licencianda Bianca

Questão 1	Questão 3
Um grupo de formandos, compostos por 54 alunos resolveram alugar um espaço para a festa de formatura. O valor orçado pela comissão foi de R$5530. Qual o valor que cada aluno irá arcar para o aluguel do espaço?	Uma comissão de formatura fechou um espaço para formatura no valor total de 5530. Se o valor unitário do espaço por pessoa é de R$ 102,41, quantas pessoas poderão participar da formatura?

Fonte: Acervo da autora (2018).

Após classificar corretamente o primeiro enunciado como divisão partitiva, ela transformou o enunciado em divisão quotativa, preservando o contexto do problema e, por consequência, os valores da solução do problema inicial passaram a pertencer ao enunciado da segunda produção. Nessa categoria há uma predominância da semiose e suas três atividades cognitivas possíveis: a formação, tratamento e conversão (DUVAL, 2009). Há formação de um registro de representação semiótica na produção do primeiro enunciado, tratamento do registro de representação semiótica com a produção do segundo enunciado e a conversão da língua natural para a linguagem simbólico numérica para determinar o valor do divisor do segundo problema (DUVAL, 2009).

Na primeira questão, para responder a pergunta proposta na situação-problema pode-se utilizar o algoritmo da divisão, sendo R$5.530,00 como dividendo, e 54 alunos como divisor. O quociente, então, será o valor que cada aluno pagou, ou seja, R$/aluno.

UM	C	D	U	d	c	m
5	5	3	0			
	1	3				
	1	3	0			
		2	2	0		
				4	0	
				4	0	0
					2	2

5	4					
0	1	0	2,	4	0	7
UM	C	D	U	d	c	m

Após resolver o algoritmo da divisão, é possível observar que o valor do quociente é R$102,407, mas como no sistema monetário, usualmente, são utilizadas duas casas decimais para pagar valores, a licencianda fez um arredondamento e obteve R$102,41. Esse valor foi utilizado para produzir o segundo enunciado e, assim, consideramos que o contexto inicial foi mantido. Em todas as produções em que a solução do primeiro problema tornou-se divisor do segundo, o contexto foi mantido. Nesses casos fez-se a conversão do registro em língua natural para registro simbólico numérico, bem como seu tratamento. Apesar da percepção de que precisaram fazer a conversão e tratar os registros de representação, não é possível afirmar como foram realizadas. Isso porque nem todos os licenciandos desenvolveram a operação matemática na folha em que produziram o enunciado, mas o fato é que, para encontrar esse novo valor de divisor, a conversão e o tratamento foram necessários.

Na segunda subcategoria estão os licenciandos que utilizaram nas duas produções dos problemas os números 5530 como dividendo e 54 como divisor. Na produção do licenciando selecionado, pode-se observar que ele produz ambos os enunciados com os mesmos sujeitos, mas o contexto é distinto.

Quadro 24 - Transcrição dos enunciados do Licenciando Marcelo

Questão 1	Questão 3
Uma tribo de índios com 5530 integrantes pretendem construir ocas que caibam 54 índios em cada. Quantas ocas serão necessárias para acomodar todos os índios?	Uma tribo com 54 índios desejam dividir entre si 5530 laranjas que colheram no meio da mata de forma igual. Com quantas laranjas cada um ficará? Sobrará alguma?

Fonte: Acervo da autora (2018).

Na elaboração dos enunciados, é possível observar que no primeiro, embora o licenciando apresente uma proposta de divisão quotativa, sua escrita requer um aprimoramento porque, apesar de afirmar que as ocas comportam 54 índios, não garante que deve conter esse total sempre que couber, tornando o problema passível de várias respostas. A segunda produção, envolvendo divisão partitiva, permite somente uma resposta possível, mas como não solicitamos que os licenciandos resolvessem o enunciado proposto, não podemos afirmar se ele se atentou para esses detalhes. Podemos supor que essa preocupação com a segunda produção ocorreu diante da familiaridade com divisão partitiva e por compreender que ela deve ser igualitária. Apesar dessa suposição, não é possível afirmar que o licenciando imaginou uma resposta única para cada questão, pois as mesmas não foram resolvidas.

4.1.3 Classificação e mudança de tipo de divisão incorretas

Nesta categoria agrupamos enunciados de quadro licenciandos que produziram problemas que apresentavam a ideia de divisão, mas classificaram o enunciado incorretamente e não conseguiram produzir um novo enunciado com outro tipo de divisão, assim, produziram dois enunciados partitivos ou dois quotativos. Para representar essas produções, apresentaremos os enunciados produzidos pelo licenciando Marcos (Quadro 25). Portanto, eles não conseguiram desenvolver nessa prática o conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 2015), tampouco realizar o tratamento adequado de sua produção inicial (DUVAL, 2012).

Deles, três produziram enunciados partitivos, classificando-o como quotativos, e produziram novos enunciados de divisão partitiva. E um licenciando produziu enunciados envolvendo divisão quotativa e cometeu os mesmos erros que os demais. Todos utilizaram contextos diferentes para elaborar o segundo enunciado e os mesmos valores do primeiro enunciado, ou seja, o número 5530 como dividendo e o número 54 como divisor, números sugeridos para produzir o primeiro enunciado.

Nos enunciados dessa categoria, percebemos que, apesar dos erros e omissões de informações, houve uma produção lógica envolvendo divisão e textos com sentido e possíveis de serem resolvidos, ou seja, conseguiram realizar a formação de uma representação identificável (DUVAL, 2012). Porém, entre as produções realizadas, um dos licenciandos apresentou um erro que consideramos mais relevante.

Quadro 25 - Transcrição das produções do enunciado do Licenciando Marcos

Questão 1	Questão 3
Num estádio de futebol existe 5530 lugares, esses lugares são distribuídos em 54 fileiras paralelas ao campo. Quantas fileiras tem nesse estádio?	Num espaço de 5530m² acomoda 54 caixas. Qual espaço que ocupa cada caixa?

Fonte: Acervo da autora (2018).

No primeiro enunciado consta a informação do número total de lugares em um estádio e o número de fileiras, logo, a pergunta deveria ser o número de lugares por fileira, mas o licenciando perguntou o número de fileiras no estádio. Para responder essa pergunta não é necessário realizar nenhuma operação, pois a informação está no enunciado. Apesar disso, consideramos que sua produção se enquadra na classificação de divisão partitiva, e que a pergunta final foi produzida incorretamente. A segunda produção de enunciado também se refere a uma divisão partitiva e traduz a ideia que os demais licenciandos dessa categoria produziram.

4.1.4 Nova produção de enunciados

Ao considerar a importância de permitir aos licenciandos a possibilidade de refletir utilizando diferentes tipos de registros de representação (DUVAL, 2009), foram apresentadas a eles mais situações-problema de divisão partitiva e quotativa. A nova produção de enunciados também foi feita no segundo dia de intervenção, logo após as discussões sobre divisão partitiva e quotativa. Nessa vivência, os licenciandos selecionaram duas das ideias de divisão apresentadas e produziram, para cada ideia da divisão escolhida, um enunciado partitivo e quotativo. No final das quatro produções dos enunciados, elas foram quantificadas de acordo com as ideias da divisão (Quadro 26).

Quadro 26 - Distribuição dos enunciados de acordo com a ideia de divisão envolvida

	Comparação multiplicativa	Comparação entre razões/ proporcionalidade	Representação retangular	Combinatória
Número de enunciados	12	12	9	5

Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Enquanto na primeira produção de enunciados, 15 licenciandos conseguiram classificar e transformar o enunciado inicial, nesta foi possível classificar a produção de 19 licenciandos. Ou seja, houve um aumento de 4 licenciandos, os quais que conseguiram produzir enunciados envolvendo divisão partitiva e quotativa corretamente. Essa melhora na produção revela indícios de uma (re)construção do conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 2015), ao realizarem corretamente o tratamento dos dados em língua natural (DUVAL, 2012).

Desse modo, no final da produção dos enunciados os licenciandos tiveram oportunidade de produzir seis enunciados, em que metade deveria envolver divisão partitiva e a outra metade divisão quotativa. Como no início da intervenção os licenciandos não sabiam nem diferenciar os tipos de divisão, consideramos que a oportunidade de produzir essa quantidade de enunciados, discutir seus conhecimentos prévios e conhecer a definição de ambas foi importante para (re)construir conhecimentos sobre o conceito de divisão e desenvolver o conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015) sobre divisão partitiva e quotativa.

Nesse sentido, a fim de verificar essa (re)construção do conhecimento, direcionamos o foco para as produções dos licenciandos que erraram nas primeiras produções. E com a melhora dos enunciados desses participantes, podemos afirmar que houve um resultado favorável, pois apresentaram enunciados envolvendo corretamente os tipos de divisão partitiva e quotativa, e as perguntas produzidas estavam corretas. Para ilustrar, selecionamos o exemplo do licenciando que, no início da intervenção, elaborou a pergunta incorreta na primeira questão (Quadro 25, p.104).

Quadro 27 - Transcrição dos novos enunciados do Licenciando Marcos

Partitivo	Quotativo
Joana possui 10 bonecas e comprou 50 roupinhas para elas. Quantas roupinhas ficará para cada boneca?	Joana comprou 100 roupinhas para bonecas. Sabendo que ela quer comprar uma quantidade de boneca e que cada boneca ficará com 5 roupinhas, quantas bonecas ela terá que comprar?
João comprou 5 vezes mais bolinhas de gude que Mario. Sabendo que Mário comprou 65 bolinhas de gude, quantas bolinhas João comprou?	João possui 80 carrinhos. Mario tinha 10 carrinhos e comprou mais 30. Quantas vezes é que João tem a mais de carrinhos que Mario?

Fonte: Acervo da autora (2018).

Observa-se no Quadro 27 uma produção de enunciados representando um desenvolvimento do conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015). Percebemos nessas produções de enunciados um progresso, mas é preciso aperfeiçoar a coesão textual, pois a primeira situação apresentada é superficial e fora da realidade, visto que não foram compradas 50 ou 100 roupas para bonecas, nem 20 bonecas de uma só vez. Consideramos que os problemas propostos pelo licenciando poderiam ser mais adequados e próximos da realidade.

Diante das situações relatadas nessa categoria de análise, inferimos que a produção de enunciados não é simples de ser realizada. Todavia, uma qualidade textual ao produzir enunciados de questões é um conhecimento necessário e que deve ser desenvolvido pelo professor. Tornar-se competente e saber elaborá-los indica um desenvolvimento correto do conhecimento pedagógico do conteúdo, porém diante dos dados produzidos nesta pesquisa e os que foram apresentados nesta seção, não é possível afirmar que esse conhecimento encontra-se presente nessas vivências. Apesar disso, pode-se afirmar que os licenciandos (re)construíram conhecimentos do conteúdo sobre divisão partitiva e quotativa.

4.2 REGISTROS SEMIÓTICOS COM O USO DOS SIMBÓLICOS NUMÉRICOS

Nessa categoria agrupamos registros de representação semiótica com uso de símbolos numéricos, que foram subdivididos em estratégias de resolução de questões envolvendo situações-problema e de questões diretas.

4.2.1 Estratégias de resolução de questões envolvendo situações-problema

Ao apresentar aos licenciandos situações-problema, Duval (2009, 2012a) considera que o trabalho se desenvolve por meio de tarefas de compreensão e esta mobiliza três tipos de atividades cognitivas relacionadas à semiose: formação, tratamento e conversão de um registro de representação semiótica. A conversão ocorre ao realizar a leitura de um enunciado e encontrar meios de representar matematicamente as informações redigidas em língua natural. O próprio registro simbólico numérico é a formação de um registro, e o tratamento realizado vai depender diretamente do tipo de formação escolhida. Após formar e tratar a representação matemática, os licenciandos devem interpretar o resultado encontrado, de maneira a responder a situação proposta.

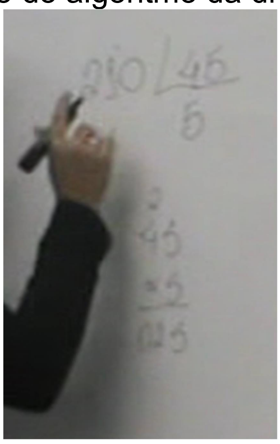
Nesse sentido, serão apresentadas no decorrer das intervenções três situações-problema, as duas primeiras ocorridas no primeiro dia, e a terceira ocorrida no quarto dia de intervenção. Buscamos, por meio de produções de licenciandos, identificar soluções recorrentes e se seus registros de representação semiótica apresentavam ou não erros conceituais.

4.2.1.1 Formação e tratamento dos primeiros registros de representação semiótica

Ao propor as primeiras situações da intervenção, selecionamos a resolução de problemas para identificarmos os tipos de registros de representação semiótica produzidos pelos licenciandos. Na primeira atividade envolvendo contratação de uma empresa para realizar uma viagem escolar (atividade proposta no Quadro 6 ou apêndice C), dois licenciandos foram ao quadro. A primeira participação foi de Sara, que optou por realizar pelo algoritmo as operações $210 \div 45$ e $210 \div 30$. Ela resolveu $210 \div 30$, sem auxílio de seus colegas, mas em $210 \div 45$, Sara não sabia de imediato o valor do quociente, selecionou 21 dezenas, pensou um pouco, colocou 5 unidades no quociente e 15 unidades como resto. Porém, percebeu que aquela representação estava incorreta e seus colegas, notando sua dificuldade, pediram que ela usasse tabuada. Enquanto ela resolvia a multiplicação, um colega disse que o valor do quociente era 4. Mas ela optou por continuar a resolução da multiplicação.

Embora a licencianda tenha apagado a multiplicação, conseguimos fotografar esse procedimento (Figura 4), comprovando que, para o desenvolvimento do algoritmo da divisão, Sara precisou recorrer ao algoritmo da multiplicação.

Figura 4 - Resolução do algoritmo da divisão



$$\begin{array}{r|l} 210 & \underline{45\quad} \\ & \ 5 \end{array}$$

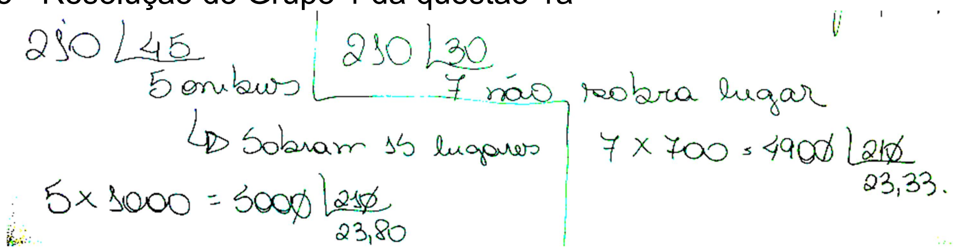
$$\begin{array}{rr} & {}^{2} \\ & 4\ 5 \\ \times & 5 \\ \hline & 2\,2\,5 \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora (2018).

Sara resolveu a multiplicação de 5x5 mentalmente, escreveu o número 2 sobre as dezenas e, mesmo após encontrar na multiplicação de 45 por 5 o valor final de

225, ela confirmou que seriam 5 unidades no quociente. Com essa resolução, percebemos que a licencianda escolheu como ‘formação de uma representação identificável’ (DUVAL, 2012) a representação usual para o algoritmo da divisão. Mas o ‘tratamento’ (DUVAL, 2012) dessa representação não ocorre de maneira usual, pois, ao multiplicar o quociente pelo divisor, o valor encontrado é maior do que o dividendo. Além disso, abaixo do quociente, em ambas as operações ela escreveu uma observação sobre o resto, não utilizando o local comumente reservado para o resto (Figura 5). Provavelmente Sara recorreu ao algoritmo da divisão para formar uma representação identificável, mas tratou seus dados interpretando o problema com base nos lugares disponibilizados no ônibus e, por isso, não utilizou o espaço no algoritmo da divisão reservado para indicação do resto da operação realizada.

Figura 5 - Resolução do Grupo 1 da questão 1a



Fonte: Acervo da autora (2018).

Essa reinterpretação do algoritmo da divisão pela licencianda possibilitou levantar alguns pontos de discussão importantes. Embora ela não tenha pensado na resolução do problema de maneira usual, escolheu como representação identificável o algoritmo da divisão. Essa associação pode estar vinculada ao uso excessivo e à introdução prematura dos algoritmos das operações na educação básica, visto que, embora a licencianda tenha apresentado pensamentos alternativos para resolver a situação proposta, sentiu necessidade de recorrer ao algoritmo da divisão.

Após calcular o valor da contratação de cada empresa Sara, ainda determinou o custo individual dividindo 5.000 e 4.900 pelo total de alunos. Na socialização, ela explicitou que multiplicou os valores unitários pelo total de alunos e passou a encontrar uma diferença de aproximadamente R$105,00 entre as empresas.

Diante do tratamento desses registros de representação semiótica, percebemos que o grupo não observou adequadamente o enunciado e realizou mais operações do que era necessário para encontrar a diferença de valores na contratação das empresas, sendo que já havia sido determinada.

Após a apresentação de Sara, iniciamos um diálogo retomando o que foi socializado. Nos diálogos e trechos das explicações, algumas vezes serão utilizadas explicações que serão apresentadas em parênteses, para que a situação seja mais bem compreendida.

Quadro 28 - Transcrição de parte do áudio entre pesquisadora e a turma, 30/06/2016

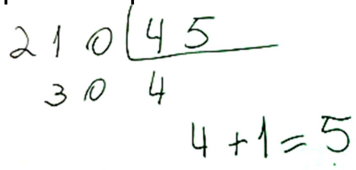
Pesquisadora: Todo mundo chegou até essa resposta aí? R$ 23,80... (sou interrompida)
Felipe: Professora, a gente finalizou no R$ 5.000,00 e R$ 4.900,00. Não era mais necessário porque ele só queria saber a empresa, na verdade.
Pesquisadora: Todo mundo concorda? O fato de ela ter continuado a solução, ela escolheu a empresa diferente de vocês?
Todos: Não.
Pesquisadora: Só que se tratando do que o enunciado pedia, poderia parar até o 5.000 e 4.900 (me referindo ao valor total do aluguel dos ônibus).
Todos: Exato, [...], isso.
Pesquisadora: Mesmo encontrando a resposta correta, todo mundo fez as divisões iguais?(alguns responderam que sim)
Pesquisadora: Já achou o 5 na resposta? (me referindo ao valor do quociente)
Todos: Não! (Em um tom de voz mais alto)
Um licenciando respondeu que encontrou quatro e sobraram 30 (referindo-se à resolução do algoritmo da divisão). E outro falou que sobra não, faltam 30. (referindo-se ao número de pessoas que ainda precisam viajar)

Fonte: Acervo da autora (2018).

Percebemos nessa última parte do diálogo uma possível referência ao tratamento realizado pela licencianda. Ao considerar apenas o algoritmo da divisão, teríamos 4 unidades no quociente e 30 unidades no resto, mas como se refere a uma situação-problema, uma representação pode ser interpretada de diferentes maneiras. Enquanto um entende que são 4 ônibus lotados e sobram 30 pessoas para ir no 5º ônibus, outro entende que são 4 ônibus lotados e falta acomodar 30 pessoas. Dessa maneira, embora a resposta final dos grupos esteja adequada, o professor precisa compreender a complexidade e individualidade que é a interpretação de cada um. Assim, além do tratamento depender do tipo de formação de registro identificável (DUVAL, 2012) também depende da maneira individualizada de raciocínio.

Ao final da discussão, Marcelo se propôs a mostrar sua resolução. Ele resolveu apenas o algoritmo de $210 \div 45$, colocando 4 unidades no quociente e 30 unidades no resto e, em seguida realizou a adição de $4 + 1 = 5$ (Figura 6).

Figura 6 - Resolução do Grupo 2 da questão 1a



Fonte: Acervo da autora (2018).

Como a explicação dada enquanto ele apresentava a solução não ficou tão clara, o professor regente perguntou se ele poderia explicar novamente e Marcelo narrou os procedimentos realizados:

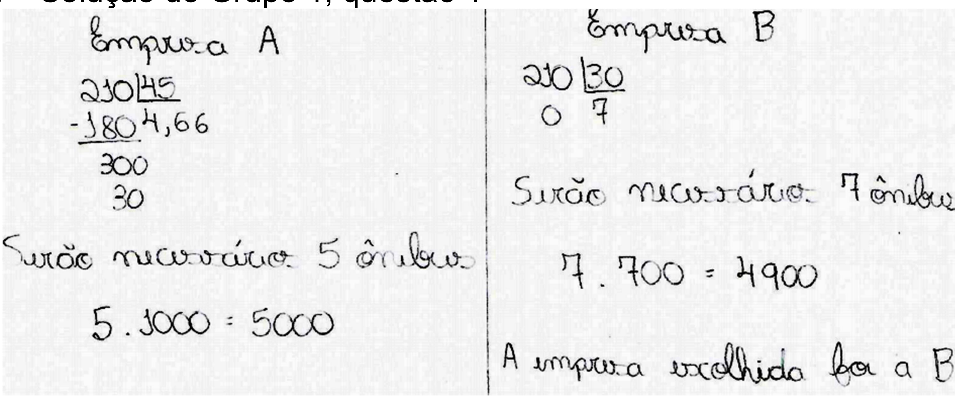
> A gente pegou a quantidade de alunos e dividiu por 45, aí deu 4 aqui (no quociente), 180 no valor aqui (45x4), diminuído de 210, sobra 30 (no resto). Ou seja, sobraram 30 alunos. Como não dá para levar nesses quatro ônibus aqui, então, a gente pega e soma mais um ônibus, aí dá 5 ônibus e aí pega os 30 alunos e leva junto (Marcelo, 30/06/2016).

Nessa resolução, o aluno aborda adequadamente a formação da representação identificável (DUVAL, 2012), respeitando a condição de a multiplicação entre divisor e quociente ser igual ou menor e o mais próximo do dividendo. Surge aqui um conhecimento do conteúdo relacionado ao desenvolvimento do algoritmo da divisão, pois Marcelo realizou adequadamente os procedimentos e diante dos valores de quociente e resto encontrados, interpretou-os para resolver o problema. Mesmo não apresentando erros conceituais no uso de seu registro de representação, não podemos dizer que o licenciando possui um conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN 1986, 2015), pois nessa situação identificamos que ele conhece o algoritmo da divisão e o interpreta após a resolução, apresentando para a turma os procedimentos realizados.

Em uma análise das folhas respostas, identificamos uma predominância, assim como na socialização, do algoritmo da divisão em detrimento de outras estratégias de resolução. Dos sete grupos formados, apenas um utilizou tabela relacionando as duas empresas e todos os demais utilizaram algoritmo da divisão. A diferença dos seis grupos que escolheram o algoritmo da divisão como sua formação de uma representação identificável ocorreu na maneira de tratar os registros matemáticos (DUVAL, 2012).

Dois grupos dividiram 210 por 45, encontrando como quociente um valor com casas decimais e interpretaram o resultado encontrado (Figura 7). Além disso, esses grupos foram os únicos que grafaram o resto da divisão exata no local usual.

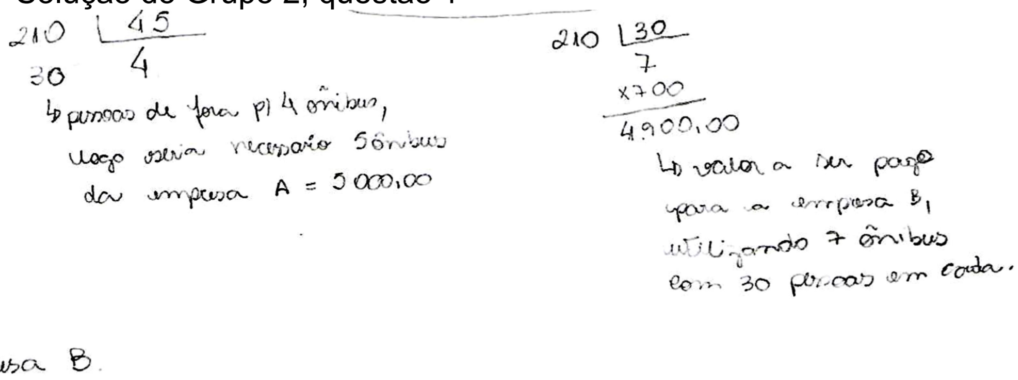
Figura 7 - Solução do Grupo 1, questão 1



Fonte: Acervo da autora (2018).

Dois grupos apresentaram uma resolução similar ao que foi apresentada pelo licenciando Marcelo, resolvendo o algoritmo da divisão no conjunto dos números naturais e interpretando o valor de quociente e resto para resolver o problema (Figura 8).

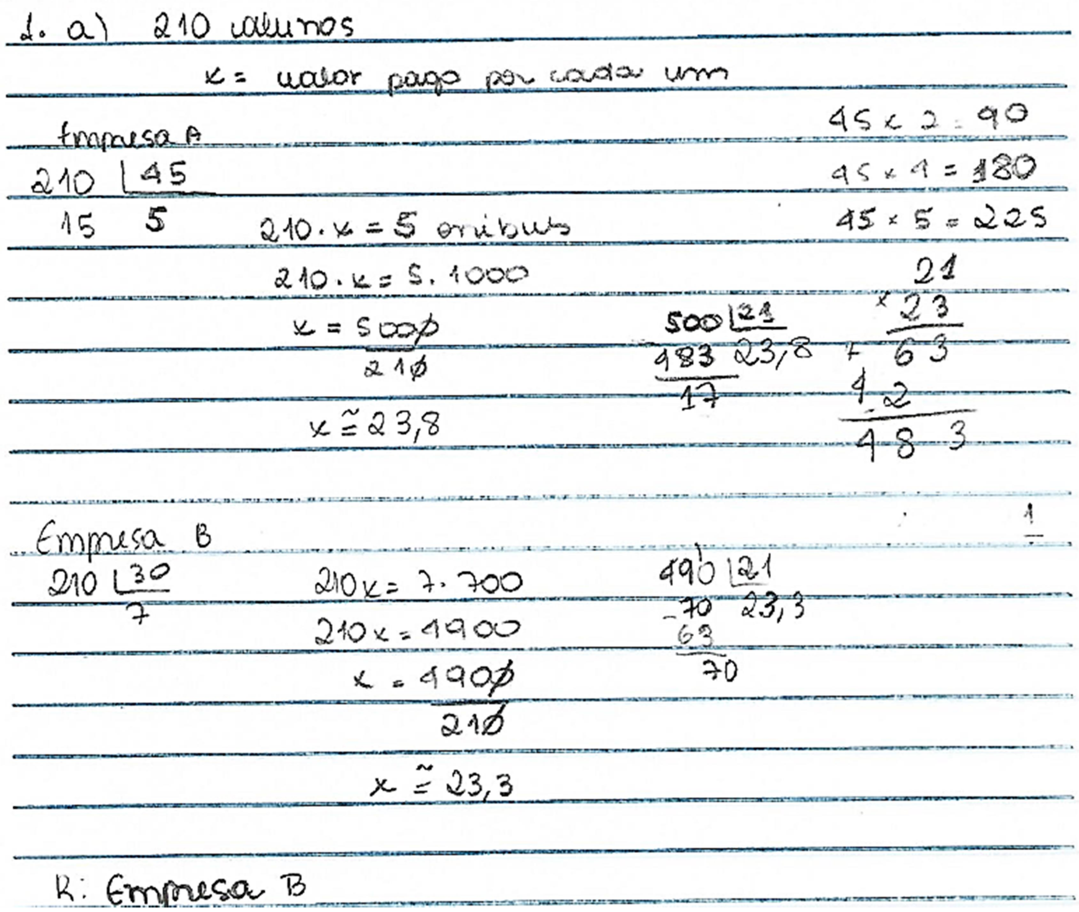
Figura 8 - Solução do Grupo 2, questão 1



Fonte: Acervo da autora (2018).

Os outros dois grupos apresentaram uma resolução similar à de Sara. Ao interpretarmos a resolução da Figura 9, poderíamos supor, inicialmente, que o grupo errou a questão porque ao utilizar o algoritmo da divisão, indicou o número 5 como quociente e como resto o número 15. Contudo, ao analisar as demais etapas de resolução, é possível observar no canto superior direito que eles constroem a tabuada do divisor, isto é, do número 45. Desse modo, é possível supor que o resto da divisão, igual a 15, indica o quantitativo de lugares vagos no ônibus, semelhante à resolução de Sara. Além disso, ao utilizar a equação considera de forma correta que devem ser contratados 5 ônibus da empresa A.

Figura 9 - Solução do Grupo 3, questão 1


1. a) 210 alunos

x = valor pago por cada um

Empresa A

210 |45
15 5

210 . x = 5 ônibus

210 . x = 5 . 1000

x = 500~~0~~ / 21~~0~~

x ≅ 23,8

500 |21
483 23,8
17

45 x 2 = 90
45 x 4 = 180
45 x 5 = 225

21
x 23
63
42
483

Empresa B

210 |30
7

210x = 7 . 700
210x = 4900
x = 490~~0~~ / 21~~0~~
x ≅ 23,3

490 |21
-70 23,3
63
70

R: Empresa B

Fonte: Acervo da autora (2018).

Podemos afirmar, ainda, que o conhecimento do conteúdo do grupo requer um aprimoramento, pois como escolheram o algoritmo da divisão como formação de representação identificável, o tratamento desse registro deveria ser o usual (DUVAL, 2012). Apesar dos erros no registro de representação semiótica presentes na resolução do grupo, visto que em uma simples prova real o grupo poderia perceber que 45x5+15= 240, a interpretação dada pelo grupo não está incorreta, já que uma situação-problema envolve a percepção individual do indivíduo.

Desse modo, sendo os registros de representação semiótica “os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor” (DUVAL, 2009, p. 37), afirmamos, pela conversão, da linguagem natural para simbólica numérica realizada por cada um dos grupos, que o algoritmo da divisão é um recurso enfatizado na educação básica. Em nosso estudo, a ênfase ao algoritmo é confirmada, pois mais de 85% dos grupos recorreu a esse tipo de representação. Acerca do tratamento realizado por cada grupo, os registros de representação semiótica das Figuras 7 e 8 são mais objetivos e realizam o tratamento dos registros de maneira coerente com a formação da representação identificável escolhida (DUVAL, 2012). Já na resolução apresentada na Figura 9, esse tratamento não ocorre de maneira correta. Mesmo que o raciocínio apresentado pelo grupo esteja correto, o algoritmo da divisão foi utilizado de forma incorreta.

4.2.1.2 Formação de diferentes registros de representação semiótica

Essa seção apresenta dados gerados pela resolução e socialização da questão envolvendo a mudança de mobiliário de uma biblioteca (Quadro 7), privilegiando, pelo menos, duas estratégias de resolução por grupo. Era também possível solicitar a participação de mais grupos na socialização, pois foram formadas diferentes representações identificáveis (DUVAL, 2012). Assim, houve exposição de estratégias distintas, em que cada uma recebeu um tratamento adequado.

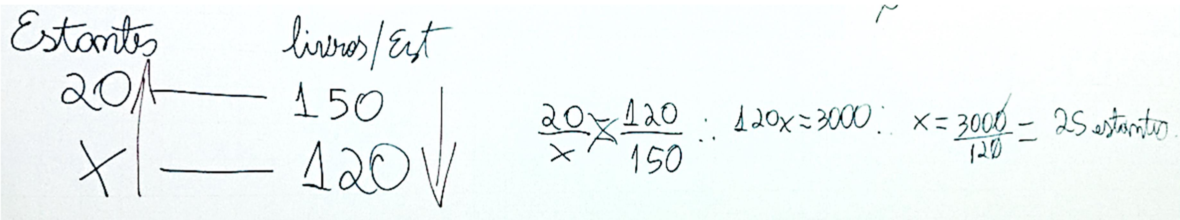
Como formação de uma representação identificável utilizaram algoritmo da multiplicação e, posteriormente, da divisão com o número total de livros e com os livros restantes de cada estante, proporcionalidade, função e equação. Quando o primeiro licenciando foi ao quadro, apresentou duas estratégias de resolução. A primeira será apresentada na seção seguinte, pois simplifica dividendo e divisor e se relaciona diretamente com nossa terceira situação-problema. Em sua segunda exposição, o licenciando utilizou proporcionalidade e, antes de apresentar sua estratégia, fez algumas inferências.

> A letra B, ele pediu para fazer um método diferente, aí a gente pensou, aí, quebramos a cabeça, e tal e fizemos na forma da regra de três. Só que tem um lance. A gente vai ter 20 estantes e 150 livros por estante, aí a gente quer saber quantas estantes serão necessárias para acomodar em grupos de 120 livros. Então, vão ser utilizadas X estantes para 120 livros. Só que aqui tem um porém, se a gente for observar essa regra de três é inversamente proporcional. Você vai diminuir o número de livros por estante, consequentemente, há um aumento de estantes. Então, no caso, ficaria da

> seguinte forma. (e vai realizando a operação e narrando o passo a passo) (Fernando, 30/06/2016).

Embora nosso trabalho tenha sido realizado com uma turma de primeiro período de licenciatura em Matemática, a fala desse licenciando e seus registros de representação (Figura 10) denotam que são organizados de modo a tornar sua exposição mais clara possível para seus colegas. Ele gostava de apresentar sua solução, identificava e organizava da melhor forma, para torná-la compreensível para os demais. Desse modo, em seu relato, Fernando apresenta um saber diferenciado do conteúdo, que vai além de simplesmente resolver o problema proposto, bem como demonstra possuir características do conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986).

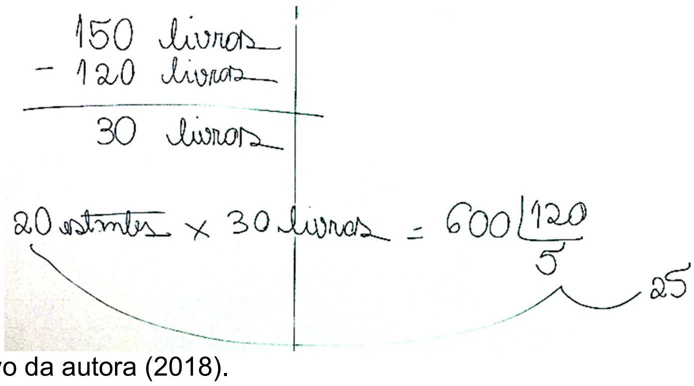
Figura 10 - Resolução da questão 3, do primeiro grupo no primeiro dia da intervenção



Fonte: Acervo da autora (2018).

Diferentemente da proposta de socialização de Fernando, o licenciando João apresentou outro comportamento ao ir ao quadro. Na terceira estratégia apresentada, o grupo relacionou a diferença de capacidade de armazenamento de livros entre as estantes (Figura 11).

Figura 11 - Terceira resolução das questões 2 e 3 do primeiro dia da intervenção



Fonte: Acervo da autora (2018).

O licenciando realizou todos os cálculos no quadro e, ao finalizar, ficou claro que João não iria explicar, então, pedi para ele apresentar sua resolução para a turma.

> A primeira capacidade era 150 livros por estante e a segunda, 120 livros. Significa que em cada estante vai sobrar 30 livros. Multipliquei as 20 estantes por 30 e achei o valor de 600. Eu já tinha 20 estantes, dividido pela nova capacidade (referindo-se a divisão de 600 por 120) deu 5, somei os dois e encontrei e deu 25 (João, 30/06/2016).

Seu relato mostra que ele possui um saber do conteúdo, embora ainda precise de aprimoramentos, pois relacionou dados matemáticos com dados do problema e fez o aproveitamento de representações, como o resultado igual a 600, que é dividido por 120, estabelecendo igualdades que não são válidas. Ao analisar seus registros de representação, alguns alunos poderiam associar erroneamente que 20 estantes, multiplicadas por 30 livros, é igual a 600 dividido por 120. Além disso, o valor de 600 não está especificado se refere aos livros ou às estantes. Embora os participantes da pesquisa tenham entendido a representação do licenciando, se essa solução for apresentada a alunos da educação básica, eles podem reproduzir esses mesmos erros. Diante dessa constatação, poderíamos instigá-lo para ver como ele se posicionaria como professor, fazendo indagações e relacionando as possíveis dúvidas de alunos do ensino fundamental.

Ao comparar a fala dos licenciandos, enquanto o primeiro licenciando conversou com a turma antes de iniciar suas resoluções, este último se preocupou apenas em realizar sua exposição. Ele explicou os procedimentos quando solicitado e fez uma descrição dos passos realizados. Dessa maneira, enquanto João ainda apresenta um saber do conteúdo em formação, podemos afirmar que Fernando tem uma familiaridade maior com o registro de representação semiótica escolhido. Esse tipo de dinâmica em sala de aula, de observar a socialização do colega, pode fazer com que eles se preocupem em encontrar meios de tornar o conteúdo compreensível para o outro e, assim, contribuir, futuramente, para construção do saber pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986).

4.2.1.3 Simplificação do dividendo e divisor

Embora o procedimento de simplificar dividendo e divisor tenha aparecido na socialização da primeira situação-problema, na resolução da licencianda Sara (Figura 5), essa simplificação ocorreu novamente na questão do mobiliário da biblioteca, sendo enfatizado pelo Fernando durante sua exposição. Ao iniciarmos as discussões coletivas quando esse licenciando foi ao quadro, sua fala já nos chamou atenção, pois no 1º dia de intervenção ele destacou uma situação que havíamos programado para discutir no 4º dia, portanto, não problematizada nesse momento inicial.

Com relação ao licenciando Fernando, ele fala de forma concomitante com a resolução de sua estratégia de solução. Ele conversa com a turma sem ler na íntegra o enunciado, mostrando desde o início que fez uma interpretação do que era solicitado e apresenta sua ideia.

> A questão tem que a gente tem 20 estantes e cada estante tem 150 livros. E essa biblioteca vai passar por uma reforma, se não me engano, vão colocar estantes mais ergonômicas e vai tirar essas mais antigas. E vão colocar estantes que só vão caber 120 livros e essas que cabem 150 livros vão sair da biblioteca. Aí, o primeiro passo é saber quantos livros têm na biblioteca. A gente já sabe que na atual biblioteca temos 20 estantes com 150 livros e a gente vai fazer essa multiplicação simples aqui (ele resolve a multiplicação com cada passo a passo e encontra 3.000). Aí, o que a questão está pedindo? Ela está pedindo para a gente estar dizendo, esses 3.000 livros agora, que eram suportados em 20 estantes. Quantas estantes serão necessárias para colocar esses mesmos 3.000 livros em estantes mais modernas de 120 livros (Fernando, 30/06/2016).

Pelo que foi relatado, a resolução foi feita em dois momentos. Primeiramente, com algoritmo da multiplicação para encontrar o total de livros da biblioteca. Posteriormente, utilizando o resultado da multiplicação e dividindo pela capacidade das novas estantes e, utilizando algoritmo da divisão, resolveu o problema (Figura 12).

Figura 12 - Resolução da questão 2, do primeiro grupo no primeiro dia da intervenção

Fonte: Acervo da autora (2018).

O licenciando Fernando continuou sua exposição, enquanto resolvia o algoritmo da divisão:

> Aí, a gente vai fazer a divisão também simples. 3.000 dividido por 120, por que 120? 120 é o grupo por estantes, entendeu? Cada estante tem um grupinho de 120 livros. Aí, eu basicamente não lembrava, Júlio que me falou: você tira esse zero aqui com esse zero (referindo-se aos zeros das unidades do dividendo e divisor) e dá tudo a mesma coisa. Aí. vamos lá, 12 dividindo por 30 (o aluno fala errado, mas estava se referindo à divisão de 30 por 12) dá 2, 24 sobra 6, desce o zero, 60 dividido por 12 dá 5, sobra nada. Então, todos os livros vão se acomodar em 25 estantes. Essa é a resposta da letra A (Fernando, 30/06/2016).

A fala desse licenciando evidencia uma preocupação em esmiuçar a questão proposta, explicando passo a passo e o motivo de cada procedimento ser realizado. Nessa narrativa, contudo, o licenciando apresentou alguns conhecimentos que ainda precisam ser aprimoramos, como, por exemplo, simplificação do dividendo e divisor por 10. Ele realizou o procedimento sem saber a razão de dar certo, acreditando no conhecimento de seu colega, que se restringiu a apenas dizer que dava certo. Apesar desses aprimoramentos que precisam ser realizados, percebe-se nas falas de Fernando um conhecimento do conteúdo e uma preocupação com o que é explicado, o que pode ajudar a construir, futuramente, o conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015). Pode-se, então, afirmar que há uma organização em sua exposição com características de seu posicionamento como professor.

Ao analisarmos as resoluções dos outros grupos nas folhas que foram entregues, dos sete grupos, seis recorreram ao algoritmo da divisão e, desses, cinco grupos simplificaram dividendo e divisor por 10. No momento em que percebemos que os licenciandos utilizaram o recurso da simplificação do dividendo e divisor, a questão proposta para essa discussão fez mais sentido. Essa simplificação também foi realizada em outras situações e, portanto, a discussão sugerida posteriormente foi pertinente para a (re)construção do conhecimento sobre o procedimento adotado.

4.2.1.4 Compreendendo as implicações da simplificação do dividendo e divisor

Quando elaboramos a situação-problema em que dividendo e divisor seriam simplificados, imaginávamos introduzir a discussão por meio das atividades propostas. Mas as situações vivenciadas anteriormente foram importantes para dar significado e identificarmos a (re)construção do conhecimento dos licenciandos.

Entregamos a situação-problema (Quadro 14, p.86) com duas resoluções para serem analisadas. Os licenciandos demoraram mais tempo do que previsto para solucionar as questões e nas folhas respostas eles se limitaram a descrever os procedimentos e não identificaram os motivos das respostas divergirem. Acreditamos que essa descrição ocorreu, pois, ao propormos as questões, não evidenciamos que eles deveriam analisar se resoluções estavam certas ou erradas e não pedimos que identificassem erros conceituais apresentados. Dos sete grupos formados, apenas dois grupos explicaram que simplificar dividendo e divisor também acarreta a simplificação do resto.

Figura 13 - Resolução da questão do Quadro 14

Aluno 1
$148\cancel{0} \;\big\vert\; 36\cancel{0}$ $4 \quad\; 4$ mensalidades   Ela pagou 4 mensalidades e sobrou R$ 4,00.
Aluno 2
$\frac{1480}{360} = \frac{148}{36} = \frac{74}{18} = \frac{37}{9}$ $\quad 37 \;\big\vert\; 9$ $1 \quad 4$ Conseguiu pagar 4 mensalidades e sobrou R$ 1,00.

Fonte: Adaptado pela autora (2018).

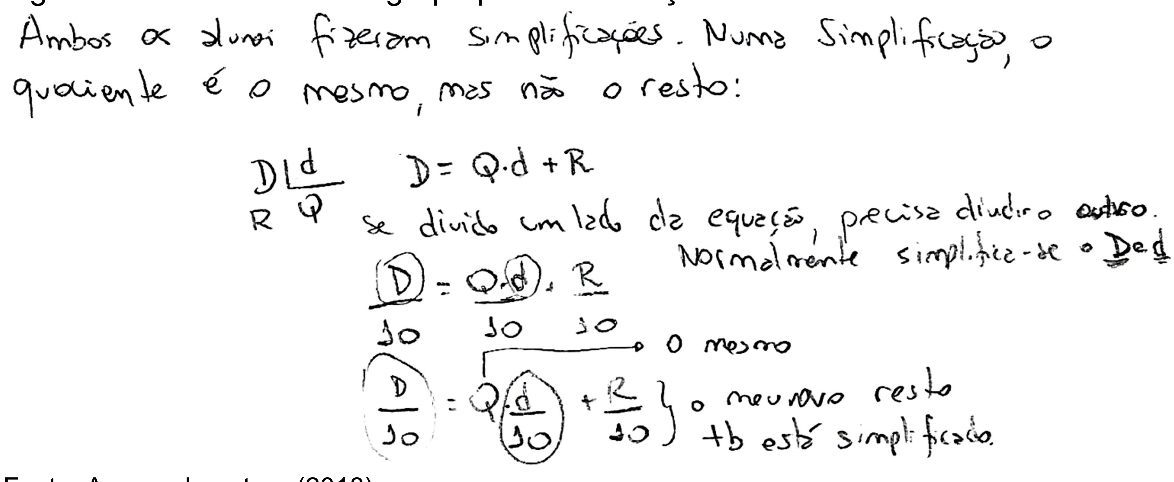
Ao analisar as resoluções dos Alunos 1 e 2 (Figura 13), os demais grupos se limitaram a dizer que os alunos simplificaram a divisão, outros somente perceberam a simplificação na resolução envolvendo frações equivalentes, ao afirmarem que a primeira divisão de simplificação do dividendo e divisor por 10 a divisão estava correta. Um grupo escreveu que, como são quatro mensalidades pagas, que o aluno 2 deveria multiplicar o resto por quatro para saber o valor total, logo, também considerou correta a resolução do aluno 1. Essa afirmativa valida a ideia de que o grupo considerou a resolução do aluno 1 como correta, tanto na determinação do quociente quanto do resto.

Essas descrições revelam que a maioria dos licenciandos ainda não está habituada a analisar as resoluções apresentadas e, de maneira geral não compreendem as consequências da simplificação do dividendo e divisor. E também identificamos, por meio dos registros de representação semiótica das folhas respostas, que alguns licenciandos não consideraram que ocorreu uma simplificação ao “cortar” os zeros. Nesse momento inicial, somente dois grupos apresentaram conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015) necessário para analisar criticamente a resolução de questão proposta e, assim, foi preciso estimular e propor discussões para que os demais licenciandos pudessem (re)construir conhecimentos do conteúdo sobre consequências da simplificação do dividendo e divisor.

Ao ressaltar no enunciado para analisarem a resposta dos alunos como correta ou incorreta, justificando a resposta dada, além dos dois grupos iniciais, mais um explicitou em sua resposta que, ao simplificar dividendo e divisor, o resto também é simplificado. Os demais grupos apenas afirmaram qual seria o valor correto do resto e, para isso, realizaram a divisão de 1480 por 360 sem simplificar dividendo e divisor. Ao planejarmos essa situação, não imaginávamos que as dificuldades seriam tão presentes. Imaginávamos que eles resolveriam rapidamente a questão, mas enquanto acompanhávamos os grupos, percebemos que eles não faziam ideia do porquê dos dois valores de restos distintos.

Diante disso, iniciamos a socialização perguntando se a simplificação apresentada na situação-problema acontece em sala de aula, e eles reagiram concordando. Quando perguntei à turma sobre a questão proposta, quais dificuldades encontraram, o Gabriel disse que o fato de a questão apresentar dois tipos de resoluções diferentes, contribuiu para perceber que alguma coisa estava alterada. Mas, ao analisar as folhas respostas, percebemos que a distinção de valores não auxiliou todos os grupos. Porém, o grupo desse licenciando foi o que apresentou uma justificativa mais completa, desde a primeira resposta fornecida.

Figura 14 - Justificativa do grupo para a resolução incorreta dos alunos


Ambos os alunos fizeram simplificações. Numa Simplificação, o quociente é o mesmo, mas não o resto:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & Q \end{array} \qquad D = Q \cdot d + R$$

Se divido um lado da equação, precisa dividir o outro.

Normalmente simplifica-se o D e d

$$\frac{D}{10} = \frac{Q \cdot d}{10} + \frac{R}{10}$$

o mesmo

$$\frac{D}{10} = Q\left(\frac{d}{10}\right) + \frac{R}{10}$$

o meu novo resto tb está simplificado.

Fonte: Acervo da autora (2018).

Pelo que foi explicitado na resolução desse grupo, percebemos um domínio do conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 2015) e um grau de liberdade para se trabalhar com seus registros de representação semiótica (DUVAL, 2009). Esse grupo, além de apresentar uma justificativa matemática, ainda indicou que, independente da simplificação ou não, o quociente permanece igual.

Ao perguntar se os dois alunos estavam certos ou errados, os licenciandos disseram que estavam errados, mas quando perguntei se esse erro estava evidente, eles disseram que não. Roberto disse que não percebemos esses erros no processo porque sempre nos preocupamos com a resposta, referindo-se ao valor do quociente e não com o resto. Nesse momento retomei a situação ocorrida no primeiro dia de intervenção. Disse que na socialização uma das pessoas que foi ao quadro simplificou dividendo e divisor por dez e ninguém questionou o procedimento realizado. A turma perguntou qual era a questão e Roberto disse que provavelmente, o resto não era necessário. Outro licenciando disse em tom de brincadeira que se sentiu usado.

Perguntei aos licenciandos se eles saberiam identificar o erro e disseram que está na simplificação. Segundo a licencianda Milena, é preciso multiplicar o resto pelo valor utilizado para fazer essa simplificação. No decorrer da discussão, começaram a perceber o que deveria ser feito, mas não sabiam o porquê desses procedimentos. Fomos exercitando e sugerindo discussões para que eles percebessem a influência do divisor com as possibilidades do resto. Optamos por analisar a simplificação de forma genérica, logo, focamos somente na interferência exercida pelo divisor exerce nas possibilidades do resto. A discussão prosseguiu com algumas idas e vindas. Continuei perguntando, a cada progresso, se eles consideravam as resoluções certas ou erradas. E em um determinado momento, Júlio diz que pelo enunciado os dois alunos estão certos, pois se pergunta se lhe sobrou algum dinheiro e não quanto lhe sobrou. Com essa observação, confirmamos que o enunciado permite essa interpretação, e que no produto educacional essa correção será feita, mas se pensarmos em quanto sobrou, os alunos deram uma resposta errada.

Após essas observações, começamos a analisar de forma coletiva e com exemplos genéricos, como os valores do divisor têm relação direta com as possibilidades do resto, independentemente do valor do dividendo apresentado. Assim, foi pedido para eles pensarem em qualquer situação, sem utilizar o valor do dividendo do enunciado, com divisor igual a 360, devendo responder qual seria a variação do resto. Foram sugeridos três intervalos de valores, sendo todos anotados no quadro: de 1 a 40, 1 a 359, 0 a 359. Diante das respostas fornecidas, percebemos que as duas respostas iniciais omitem a possibilidade de resto igual a zero. Essa situação reforça a ideia trazida e mostrada na discussão teórica do algoritmo da divisão, no começo desta dissertação, em que diferentes afirmações em sala de aula reafirmam o esquecimento do zero na divisão.

Após apresentarem essas três opções de intervalos, perguntamos se eles teriam outra sugestão. Como não apareceu outra opção, analisamos o divisor igual a 36 e eles disseram que poderíamos ter restos de 0 a 35, e na situação em que o divisor é 9, disseram que o resto poderia ir de 0 a 8. Com essas novas respostas, observamos que os licenciandos realizaram uma (re)construção do conhecimento do conteúdo acerca das possibilidades do resto de acordo com o divisor apresentado, nesse pouco espaço de tempo. Após analisar as três situações, retomamos a primeira, em que o divisor era 360, e validamos qual das opiniões seria a correta, sendo respondido pelos licenciandos corretamente que seria de 0 a 359.

Em seguida, depois de definir o intervalo de possibilidades do resto, analisamos em cada uma das divisões a relação do divisor com o resto. Quando o divisor é 360, existe 360 possibilidades de resto, que podem variar de 0 a 359; no divisor igual a 36, há 36 possibilidades de resto. E, assim, quando simplificamos o dividendo e divisor por 10, consequentemente também dividimos as possibilidades do resto. De forma semelhante, desenvolve-se o raciocínio quando o divisor é igual a 9.

Após essas problematizações, retomamos a discussão do “cortar” zero do dividendo e divisor. Informei que, no primeiro dia, o resto não era necessário, ou seja, seu valor não interferia na solução do problema, além de a situação-problema envolver uma divisão exata e, portanto, resto igual a zero. Nesse momento da gravação realizada, o licenciando Fernando se reconheceu na situação, apontando para seu colega de grupo e dizendo que ele ensinou errado. Ele perguntou o porquê e disse que, quando simplificamos dividendo e divisor, também limitamos o resto, visto que ele depende diretamente do divisor. Por isso, quando simplifico dividendo e divisor, também simplifico o resto.

Esse mesmo licenciando perguntou por que em alguns momentos o procedimento funciona e em outros não. Para responder, apresentei ao grupo uma possível situação de 200 dividido por 10 e após a simplificação de 20 dividido por 1. Ao fazer a divisão com eles, perguntei se naquele caso o resto importava e se faria diferença, e eles disseram que não porque 0÷10=0. Essa situação deu início ao diálogo para reflexão (Quadro 29).

Quadro 29 - Diálogo sobre as implicações de simplificar o dividendo e divisor 0707/2016

Roberto: Aí que derruba o aluno. Por que se aqui deu certo (referindo-se à situação do resto igual a zero), logo, lá também está certo (referindo-se à situação do resto diferente de zero).
Professor: Mas será que derruba o aluno pelo não pensar do aluno ou pela ação do professor.
Roberto: Por não ter alertado ele desse problema quando foi ensinado.
Professor: De que maneira a ação do professor nesse momento derruba o aluno? Vamos pensar como professor. Lembra aí das suas aulas de matemática...
Roberto: Essa sacada aí tinha que ser falada. Quando o resto importa isso não vai funcionar.
Professor: A pergunta é, não funciona? Será que não funciona ou isso é um artifício que eu posso usar?
O professor retorna ao exemplo de 1480 dividido por 360.
Professor: Será que essa estratégia de 1480 dividido por 360, ok. Cortar o zero, que a gente fala né, corta. Será que não podemos trazer isso ao nosso favor?
Gabriel: Descorta o zero.
Danielly: Se fizesse a discussão assim, eu estou simplificando o meu divisor e o dividendo por dez. Se eu estou dividindo por dez, eu estou limitando o meu intervalo do resto. Então, ele não está totalmente errado, só que não foi apresentado a ele o que essa simplificação acarretaria. Se dissesse que ele simplificou também o resto, no final, ele poderia fazer essa volta.
Roberto: Na verdade, você tem que falar com ele o seguinte, quando você simplifica, você simplifica tudo, menos o quociente.
Danielly: Porque que o quociente não altera?
Licenciandos: Porque é proporcional.
Danielly: Porque eu tenho uma razão entre eles. Então, essa razão não se altera. Se eu fosse continuar a minha divisão, encontrando o quociente aqui, com vírgula. Eu ia encontrar uma mesma resposta?
Licenciandos: Sim.
Danielly: Sim. Porque quando eu divido um pelo outro, essa razão permanece.

Fernando: Agora ficou mais simples a visão desse aí, (referindo-se à resolução de encontrar as frações equivalentes). Dez vezes dois, vinte, vezes dois, quarenta. Danielly: Sim. Porque foi proposital, no segundo aluno, não mostrar por quanto foi dividido. Para não induzir vocês a identificarem. (e compartilho com a turma a observação de Fernando, apresentando para a turma as divisões sucessivas do segundo aluno). Nessas divisões sucessivas, ele dividiu tudo por quanto? Licenciandos: 40. Danielly. Se ele dividiu tudo por quarenta, ele também limitou o resto dele dividindo por quarenta.

Fonte: Acervo da autora (2018).

Esse diálogo foi importante para alertar os licenciandos de que procedimentos de simplificar dividendo e divisor para se trabalhar com números menores podem ser realizados, mas os alunos precisam compreender as consequências desses procedimentos. Posteriormente, o professor regente fez uma proposta de análise utilizando frações equivalentes da resolução do Aluno 2.

$$\frac{1480}{360} = \frac{148}{36} = \frac{74}{18} = \frac{37}{9} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 9 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$$

Com a resolução proposta, o professor estabeleceu essa igualdade inicial e junto aos licenciandos, como uma prova real. Em seguida, multiplicou a igualdade inicial pelas simplificações realizadas, fazendo o caminho inverso até chegar à divisão de origem. O professor escreveu no quadro a igualdade inicial, pediu que os licenciandos multiplicassem a igualdade e, enquanto eles respondiam, anotava a nova igualdade.

> Professor: 37=4x9+1, legal. Multiplica essa divisão por quatro.
> 148=4x4x9+4, posso? (referindo-se a 4x9=36)
> 148=4x36+4. Multiplica agora por 10.
> 1480=4x360+40.

Apesar de terem pulado uma das etapas da simplificação, pois em vez de multiplicar inicialmente por quatro, deveriam multiplicar duas vezes por dois, para corresponder a todas as frações equivalentes estabelecidas pelo Aluno 2, essa estratégia foi importante para perceberem mais uma vez a dependência entre dividendo, divisor e resto. Assim, provavelmente com as discussões ocorridas em nossas intervenções, promovemos possibilidades de (re)construções do conhecimento sobre o conceito de divisão associada às simplificações do dividendo e divisor e suas consequências no resto. As discussões e socializações geradas até o presente relato, envolvendo algoritmo da divisão e simplificação do dividendo e divisor, representam claramente a afirmativa de Shulman (2015) ao considerar que:

> Esta imagem do ensino envolve a troca de ideias. A ideia é captada, testada e compreendida por um professor, que depois tem de ficar com ela na cabeça, examinando todos os seus lados. Depois, a ideia é formatada ou adaptada até poder ser captada pelos alunos. Este captar, porém, não é um ato passivo. Assim como a compreensão do professor requer uma interação vigorosa com as ideias, espera-se que também os alunos lidem ativamente com as ideias. Com efeito, nossos professores exemplares apresentam ideias de forma a provocar os processos construtivos de seus alunos para não os tornar dependentes do professor nem estimular a imitação adulatória (SHULMAN, 2015, p. 215).

Os licenciandos agiram de maneira ativa com o propósito de (re)construírem seu conhecimento acerca do conceito de divisão e especificamente o conhecimento relacionado à simplificação do dividendo e divisor e suas implicações. Assim, os licenciandos conseguiram desenvolver o conhecimento do conteúdo de maneira participativa.

4.2.2 Estratégias de resolução de questões diretas

Nesta seção agrupamos as situações vividas no decorrer da aplicação de três atividades. A primeira atividade trata do zero no quociente e o uso de expressões que reforçam o esquecimento desse número no quociente. A segunda envolve situações em que o número zero é dividendo e/ou divisor e na terceira, discutimos o algoritmo de Euclides. Em ambas as atividades há o predomínio do tratamento dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2009), uma vez que os problemas já são apresentados em registros simbólicos numéricos.

4.2.2.1 Zero no quociente

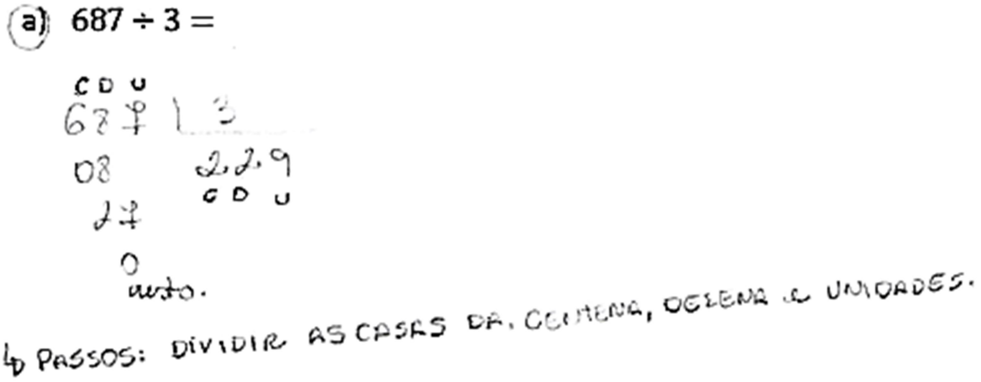
Quando planejamos a atividade do algoritmo da divisão, esperávamos que os grupos explicassem e justificassem, na folha de resolução, cada procedimento realizado. Como havíamos planejado cinco divisões e, provavelmente, o tempo não seria suficiente, organizamos os 25 licenciandos em sete grupos e designamos duas divisões para cada.

Distribuímos as folhas e pedimos que prestassem atenção no enunciado. Posteriormente, informamos que era para utilizar o algoritmo tradicional da divisão determinando dividendo, divisor, quociente e resto. Apesar de informarmos oralmente e o enunciado explicitar que era necessário se posicionar como professores com a frase “Agora você é o professor. Imagine-se em uma turma de 6º ano. Explique a eles as divisões a seguir”, somente um grupo relatou de maneira bem sucinta qual estratégia adotariam. Podemos afirmar que essa postura está diretamente relacionada à afirmação de Pimenta (2008), isto é, os licenciandos sabem como ser professor devido às suas experiências anteriores.

> Sabem, mas não se identificam como professores, na medida em que olham o ser professor e a escola do ponto de vista do ser aluno. O desafio, então, posto aos cursos de formação inicial é o de colaborar no processo de passagem dos alunos de seu *ver o professor como aluno* ao seu *ver-se como professor* (PIMENTA, 2008, p.20).

O grupo que mais se aproximou do objetivo descrito no enunciado, apresentou quais caminhos adotariam para explicar o algoritmo da divisão, mas não descreveram como realizariam tal explicação, conforme Figuras 15 e 16.

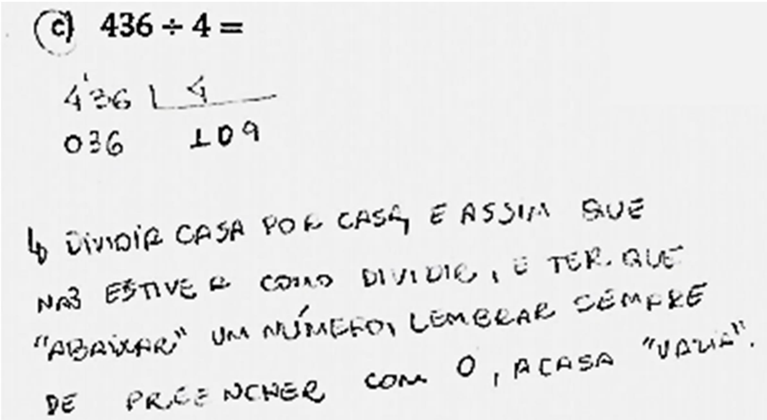
Figura 15 - Divisão e explicação dos procedimentos que seriam realizados na primeira divisão



Fonte: Acervo da autora (2018).

Nessa primeira divisão, o grupo nomeou os algarismos como centena, dezena e unidade do dividendo e quociente e identificou o resto da divisão. Já na segunda divisão, ressaltaram a presença do zero no quociente e, na explicação, percebemos que eles descreveram uma atitude procedimental que, por vezes, é priorizada pelos professores do ensino fundamental.

Figura 16 - Divisão e explicação dos procedimentos que seriam realizados na segunda divisão



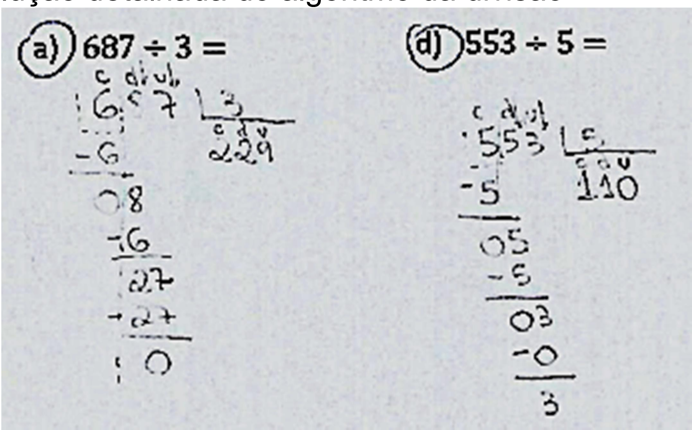
Fonte: Acervo da autora (2018).

Quando o grupo utiliza a frase para explicar o algoritmo da divisão: “Assim que não *estiver* como dividir e ter que ‘abaixar’ um número, lembrar sempre de preencher com 0 a casa vazia”, eles estão reproduzindo como aprenderam a dividir. Se essa fala for repassada para os alunos quando esses licenciandos se tornarem professores, os mesmos erros conceituais aos quais eles foram submetidos continuarão sendo disseminados na educação básica.

Pela descrição, os licenciandos justificam a presença do zero no quociente devido a dois fatores, primeiro, por “não ter como dividir”, mas o zero somente é grafado no quociente quando for “abaixar o próximo número”. Essa é uma visão errada do algoritmo da divisão, portanto, afirmamos que esse grupo não apresentou um conhecimento do conteúdo adequado acerca dos procedimentos do algoritmo da divisão. Os registros de representação semiótica em língua natural produzidos, ao descrever os procedimentos, traduzem essa má interpretação. Por conseguinte, ainda não apresentavam um conhecimento pedagógico do conteúdo, pois também não conseguiram encontrar uma maneira de apresentar o procedimento do algoritmo da divisão, articulando-o de forma elementar com o saber científico (KLEIN, 2009).

Os demais grupos não explicaram os procedimentos, apenas resolveram as divisões e alguns não finalizaram a operação quando esta apresenta resto igual a zero (Figura 16). Nos registros de representação semiótica simbólico numéricos produzidos, percebemos que, para resolver o algoritmo da divisão, alguns grupos optaram por determinar um quociente decimal, outros decompuseram o dividendo e outros identificaram ordens numéricas do dividendo e quociente. De todos os grupos, apenas um detalhou os procedimentos do algoritmo da divisão, de maneira que a cada indicação de algarismo no quociente, houvesse uma subtração equivalente (Figura 17).

Figura 17 - Resolução detalhada do algoritmo da divisão



Fonte: Acervo da autora (2018).

Esse grupo optou pelo algoritmo longo nas duas resoluções e o que mais ficou evidente foi que, mesmo quando o quociente foi igual a zero, o grupo fez uma subtração para determinar o resto da divisão. Assim, esse procedimento é o mais adequado e também proporciona aos alunos uma introdução adequada do algoritmo tradicional da divisão, pois todos os procedimentos são realizados, sem pular nenhuma etapa, o que torna os procedimentos do algoritmo mais compreensíveis ao aluno. Isso porque, além de determinar as ordens numéricas no dividendo e quociente, a cada divisão realizada, ou seja, a cada determinação de um algarismo no quociente, foi realizada uma subtração e o resto foi definido em ambas as divisões.

Embora esse grupo não tenha apresentado uma explicação junto a seus registros simbólicos numéricos de todos os procedimentos realizados, a representação deles mostra que o grupo possui um conhecimento do conteúdo bem construído, que contribuirá, futuramente, para desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 2015). Isso porque há uma organização dos registros de representação semiótica, o passo a passo fica evidente, os procedimentos podem ser justificados e, portanto, é a maneira mais adequada de tornar o algoritmo da divisão compreensível para o outro.

Na socialização da primeira divisão, um dos integrantes desse grupo foi ao quadro. Gabriel optou por nomear os algarismos com U (unidades), D (dezenas) e C (centenas). A cada divisão feita, ele identificava os algarismos do quociente com as letras CDU. Ao dividir 8 dezenas por 3, utilizou a expressão correta, dizendo que o maior número possível no quociente é o 2, pois o 3 já ultrapassa o valor. Pela solução do grupo (Figura 17) e o que foi apresentado pelo licenciando na socialização, afirmamos que ele possui um domínio do conhecimento do conteúdo que, futuramente, será imprescindível para a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015). Seus registros de representação semiótica foram tratados corretamente, visto que ele apresentou uma organização adequada, os passos foram bem justificados e não havia erros conceituais em sua solução escrita e em sua fala (DUVAL, 2009).

Durante a socialização da resposta referente a 325÷4, assim como imaginávamos, evidenciamos uma fala comumente utilizada para explicar esse tipo de questão. O licenciando nomeou algarismos do dividendo com iniciais de CDU (centenas, dezenas e unidades) e iniciou sua explicação.

> Três centenas divididas por 4, **eu não consigo fazer essa divisão**. Então, eu sou obrigado a puxar juntamente com a casa das centenas as dezenas. Quantos números 4 existem dentro do 32? 8x4 é 32, para 32, nada. Descendo a casa das unidades, restam 5 unidades, quantos 4 cabem dentro das 5 unidades? 1, 1x4=4 para 5, resto 1.

Por meio desse exemplo apresentamos aos licenciandos divisões com zero no quociente, seja no início, no meio ou no final da operação. Assim, observamos como ocorrem essas omissões do zero no quociente e as expressões utilizadas na explicação dos procedimentos realizados. Na fala do licenciando, destacamos a expressão "... eu não consigo fazer essa divisão", pois uma divisão somente não é possível quando o divisor é igual a zero. Essa expressão quer dizer que o algarismo 3, presente na casa das centenas, é menor do que o algarismo 4 do divisor. Em uma distribuição em situação concreta, igualitária e com quantidades discretas, ao tentar distribuir três centenas em quatro grupos, eles não receberiam nenhuma centena. Isso quer dizer que a divisão é possível, mas cada grupo ficará com zero centena, portanto, se o licenciando quisesse escrever essa divisão, seria possível.

Ainda durante a socialização de 436÷4, Gabriela foi ao quadro, escreveu as iniciais CDU (Centena, Dezena, Unidade) nos algarismos do dividendo e explicou os procedimentos, chamando atenção para uma situação que ocorre com recorrência nesse tipo de questão.

> O que acontece na maioria das vezes é que o pessoal sempre divide: 4 dividido por 4, vai dar 1, sobra 0. Já pega o 36 direto e divide por 4, vai dar um resultado de? Já colocaria o 9 como resultado. Mas para quem tem uma noção, vai saber que não tem como 19x4 dar 436. A gente vai abaixar uma casa da dezena, só que a gente não pode esquecer que a casa da dezena tem que estar presente aqui também (apontando para o quociente), então, a gente coloca o 0 nas dezenas. Agora sim, podemos abaixar o 6, porque **3 não divide por 4**, e aí a gente tem 9x4=36, menos 36 vai dar 0. E aqui a gente tem a casa da centena, da dezena e da unidade (colocando as siglas CDU sobre os algarismos do quociente).

Na fala da licencianda, percebemos que ela compreende a necessidade do número zero no quociente, mas utilizou a mesma expressão que pode gerar erros conceituais. Dessa maneira, embora Gabriela tenha consciência da presença do zero no quociente, ela precisa desenvolver seu conhecimento do conteúdo, melhorando as expressões que foram ditas para explicar os procedimentos realizados. Dessa forma, poderá se aproximar e desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo sobre os procedimentos que devem ser realizados ao desenvolver o algoritmo da divisão (SHULMAN, 1986).

Após finalizar a exposição, o professor regente perguntou se os outros grupos gostariam de fazer alguma observação. Uma licencianda disse que o maior detalhe dessa questão é entender o porquê de descer o zero, e uma colega a corrigiu, dizendo: “entender o porquê de colocar o zero no quociente”. Infere-se dessas correções, que os participantes da intervenção se encontravam vigilantes e atentos ao que era falado em sala de aula. Nessas ações, eles estão (re)construindo conhecimentos sobre o conceito de divisão e exercendo um papel ativo no próprio aprendizado.

Diante dessa observação, perguntei à turma: Porque em 325÷4 o 3 “não deu para dividir”, pega o 32, deu certo, e em 436÷4, 3 não deu para dividir, se pegar o 6 direto não dá certo? Uma licencianda disse que “É a mesma coisa, só pôr o zero ali”, referindo-se ao zero na centena ao dividir 325 por 3, e finaliza dizendo que “O zero da centena é zero à esquerda”.

Outro licenciando complementou dizendo que: “Na verdade, a pergunta é quantas centenas vezes 4 vai dar 3 (centenas), e aí você tem zero centenas (referindo-se à divisão de 325÷4). E ali, a pergunta é a mesma, (referindo-se à divisão de 436÷4) quantas dezenas vezes 4 vai dar 3 (dezenas), e aí você tem zero”. Nesse trecho também há uma ação ativa na (re)construção do conhecimento que apresentavam no início das socializações. Os licenciandos começaram a se atentar aos termos corretos para explicar um procedimento de cálculo aritmético. Com esse aprendizado vigilante e proativo, ficou evidente que ocorreu um aprimoramento do conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986, 2015) em suas ressignificações, ao articularem o conhecimento científico com uma explicação elementar dos procedimentos do algoritmo da divisão.

Acreditamos que, quando esse rigor nas operações aritméticas mais elementares é omitido pelo professor da educação básica, os alunos podem apresentar uma apreensão incorreta do procedimento, desenvolvendo um aprendizado com erros conceituais. Desse modo, se os licenciandos ingressam em um curso superior com erros conceituais e esses conteúdos mais elementares não são discutidos pelo professor formador, ao se tornarem professores reproduzirão os mesmos erros conceituais a que foram submetidos. Neste estudo percebemos de forma clara como a dupla descontinuidade, destacada por Felix Klein (2009), pode se tornar um ciclo vicioso no ensino.

Em sala de aula também destacamos que um dos possíveis obstáculos para os alunos compreenderem o zero no quociente é o uso da tabuada sempre começando pelo número um. A omissão constante do zero na tabuada, pois todo número multiplicado por zero é igual a zero, pode acarretar o esquecimento desse número no momento de estudar divisão. Nesse dia, uma licencianda comentou sobre o lápis de tabuada. Eu disse que não me lembrava como a tabuada começava, mas que geralmente é ensinada de 1 a 10 e que raramente encontrávamos a tabuada de 0 a 9, o que seria ideal, pois nosso sistema de numeração é decimal e por tanto, é formada por dez algarismos distintos. O professor regente continuou a conversa, reescrevendo as duas divisões que estávamos discutindo, escreveu “não dá” no quadro e conversou com a turma.

Quadro 30- Diálogo sobre a expressão "não dá para dividir"

Professor: Quantas vezes vocês já ouviram essa expressão? (“não dá”)
Licenciandos: Hoje?
Professor: Não dá! Eu brinco que essa expressão mata a vontade do aluno aprender. Porquê? 325÷4, 3 dividido por 4?
Licenciandos: Não dá.
Professor: Não dá, pega o 2. 436÷4, 4 dividido por 4, dá 1, sobra 0. 3 dividido por 4?
Licenciandos: Não dá.
Professor: Não dá! O que eu fiz aqui quando não deu? (apontando para a primeira divisão).
Licenciandos: Pega junto.
Professor: Pega junto. Não deu? (apontando para a segunda divisão). Ah, aqui não pode.
Licenciando: Deu zero.
Professor: [...] Eu nunca sei quando eu uso uma regra ou outra. Então, mais importante do que esse zero à esquerda, se tem valor ou não é: quanto é 3 dividido por 4?
Licenciandos: Zero.
Professor: Dá zero e sobra 3. Porque esse zero que você não coloca é o nó na cabeça.
Licencianda: Então, dá!
Professor: Dá, dá zero. Zero existe, já tem alguns anos, né (em tom de brincadeira).

Fonte: Acervo da autora (2018).

Após esse diálogo, ressaltamos que a proposta não é os alunos resolverem sempre da maneira mais detalhada. Mas, assim como para chegarem ao algoritmo curto eles passam pelo longo, a proposta é que os alunos, principalmente nos primeiros contatos com algoritmo da divisão, compreendam o zero no quociente, grafando-o sempre, mesmo que seja à esquerda. Após o professor ter segurança de que compreenderam o significado do zero no quociente, ele pode permitir omiti-lo quando possível.

Assim, mais do que uma série de passos a ser executada, o algoritmo das operações precisa ser inserido pelo professor de maneira gradual, com o passo a passo justificado e com linguagem adequada. Desse modo, somente entendendo o porquê de cada etapa do procedimento, ou seja, trazendo o conhecimento científico para as explicações e se atentando com as expressões empregadas nesse processo, é que erros conceituais serão sanados ou, ao menos, evitados.

Nas demais socializações, não houve discussões significativas, com os grupos restringindo-se a apresentar o procedimento realizado. Os licenciandos que foram ao quadro após a discussão resolveram corretamente, representaram o resto e não houve erros conceituais no algoritmo da divisão.

4.2.2.2 Zero como dividendo e/ou divisor

Neste momento, propusemos uma discussão com zero como dividendo e/ou divisor para que os licenciandos compreendessem quando a expressão “não dá para dividir” é realmente válida. Antes de efetivar a discussão, inicialmente, foram sugeridas duas divisões, 8÷2 e 0÷2, que foram respondidas pelos grupos na folha de respostas sem dificuldades. Os grupos responderam corretamente, utilizaram como explicação a ideia de quanto cabe, distribuição partitiva, ou apenas resolviam o algoritmo da divisão ou encontravam uma multiplicação em cada um dos casos.

Já nas situações de 2÷0 e 0÷0, as respostas da folha resposta se opunham. Dos sete grupos, apenas dois explicaram corretamente o significado das divisões nas folhas respostas. Os demais grupos limitaram-se a dizer que não havia resposta ou forneciam justificativas incorretas.

Quando o professor regente perguntou à turma quanto era 2÷0 os licenciandos responderam que era “infinito”. Com essa resposta, começamos a exercitar o raciocínio do grupo e, posteriormente, passaram a dizer que não havia número disponível ou que era indeterminado. Como a ideia de quanto cabe não deu certo, pois estávamos lidando com valores de divisor nulos, os licenciandos continuaram a dizer que o 0 cabe dentro do 2 infinitas vezes. Depois tentaram pensar em uma situação de dividir duas balas para ninguém, mas em ambas as tentativas não houve sucesso.

Para esclarecer, solicitei então que o professor regente representasse a divisão pelo algoritmo. Perguntei que número poderia ser no quociente em 2÷0 e os licenciandos tentaram atribuir alguns valores ao quociente. Aos poucos perceberam que nesse caso, a posição do quociente não pode ser ocupada por nenhum número. O professor regente finalizou a discussão dizendo que após algumas tentativas os alunos irão compreender que essa divisão é impossível. Brincou que o primeiro mandamento da matemática é “não dividirás por zero”.

Em seguida, ao perguntar sobre o quociente de 0÷0, Gabriel disse que: “é a mesma coisa, porque, se eu não consigo dividir nenhum número por zero”. Digo que realmente não consigo dividir, mas pergunto se as divisões apresentam mesmo significado e os licenciandos disseram que não. Elton pediu para fazer uma observação dizendo que 2÷0 é impossível e que 0÷0 tem infinitos valores. Enquanto o professor regente atribuía valores para a divisão de 0÷0, mostrando que existem vários valores, o Gabriel disse: “Então, não poderíamos dizer que não podemos dividir por zero”. Ressaltei que, em ambos os casos, a divisão não pode ser realizada, mas que o significado de cada um dos casos é diferente, pois em 2÷0, não se consegue determinar nenhum valor para quociente e, portanto, ela é impossível. Já em 0÷0, como há infinitos valores que tornam aquela igualdade verdadeira, a divisão é indeterminada.

Ficou evidente nessa discussão a constatação tanto de Shulman (1986, 2015) quanto de Duval (2009) ao confirmarem que o professor precisa ter à sua disposição diferentes maneiras de apresentar o conteúdo ao aluno e encontrar formas mais eficazes de torná-lo compreensível. Testamos diferentes meios para que os licenciandos pudessem construir um conhecimento do conteúdo sem perder a cientificidade. No entanto, não é possível afirmar se eles compreenderam as divisões por zero da maneira que gostaríamos.

Em uma análise posterior, percebemos que a maneira mais adequada de justificar a diferença entre 2÷0 e 0÷0 é por meio da multiplicação. Dessa maneira, no primeiro caso de 2÷0, teríamos:

Sendo, $a, b, c \in R$, Se $a/b = c$, significa dizer que $a = b.c$
Na divisão dada, temos que $a = 2$ e $b = 0$. Logo: $2 = 0.c$
Não existe nenhum número no conjunto dos números reais que torne a igualdade verdadeira, pois $2 = 0.c \rightarrow 2 = 0$. Sendo essa igualdade falsa, essa divisão é **impossível**.

Na segunda divisão, de *0÷0*, teríamos:
Sendo, $a, b, c \in R$, Se $a/b = c$, significa dizer que $a = b.c$
Na divisão dada, temos que $a = 0$ e $b = 0$. Logo $0 = 0.\mathrm{c}$
Qualquer número do conjunto dos números reais torna a igualdade verdadeira, pois
$0 = 0.c \rightarrow 0 = 0$. Podemos concluir que essa divisão é **indeterminada**.

4.2.2.3 Algoritmo de Euclides

Ao propor as divisões de 307÷3 e -307÷3 e analisar as respostas apresentadas pelos grupos, percebemos que o tratamento realizado nas folhas respostas, em ambas as questões foi o mesmo, diferenciando-se apenas pela presença do sinal negativo no quociente e no resto (Quadro 31).

Quadro 31 - Resolução do algoritmo da divisão dos grupos

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Resposta da questão 3	307 |3 007 102 1	307 |3 1 102	307|3 00 102 07 1
Resposta da questão 4	-307 |3 -007 -102 -1	-307 |3 -1 -102	-307|3 00 -102 -07 -1

Fonte: Acervo da autora (2018).

Pelas resoluções apresentadas, apesar de todos os grupos optarem por uma mesma formação de uma representação identificável, ou seja, iniciaram com a representação usual do algoritmo da divisão, o tratamento realizado por cada grupo foi diferente (DUVAL, 2009). O primeiro dividiu 30 dezenas por 3 e, em seguida 7 unidades por 3. O segundo grupo relizou apenas uma etapa da divisão, determinando o quociente e o resto diretamente. Por fim, o grupo três realizou os procedimentos do algoritmo passo a passo, dividindo centena, dezena e unidade.

Os resultados apresentados pela turma de ingressantes na licenciatura em Matemática foram os mesmos encontrados pelos mestrandos na disciplina Debates Conceituais e pelos participantes da oficina realizada na Semana de Matemática do Ifes. Nessas três vivências, todos apresentaram uma resposta incorreta para -307÷3, fornecendo um valor de resto negativo.

Assim, ao iniciar a socialização, pedimos que um licenciando fosse ao quadro e apresentasse à turma a resolução de 307÷3. Ao terminar a resolução, perguntei à turma se concordavam ou se tinham algum questionamento, e ninguém se manifestou. Antes de pedir para outro licenciando resolver -307÷3, os questionamentos já começaram. Um licenciando falou como resolveu, encontrando o valor de -102 como quociente e -1 como resto. Com esse relato, escrevi a solução proposta no quadro e, posteriormente, Fernando fez alguns questionamentos.

Quadro 32 - Diálogo para levantamento da dúvida do quociente

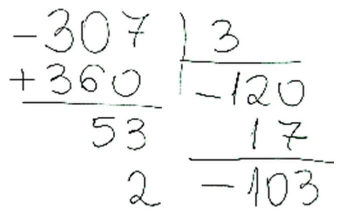
Fernando: Mas, eu tenho uma dúvida.
Danielly: Qual sua dúvida, Fernando?
Fernando: A minha dúvida é: Não poderia ser -103, não?
Licenciandos: Não.
Milena: Aí você está dando outra resposta.
Fernando: Existe resto negativo?
Diego: Existe sim.
E um colega aponta para o quadro e diz: Ali ó.
Márcio: Ele quer colocar -103 para dar um número maior e quer que o resto seja positivo.
Fernando: Isso. Exatamente.
Danielly: Você quer ou acha que é?
Fernando: Resto positivo... Sobrou -1, nunca vi isso! Você almoçou e sobrou -200g de arroz.
A discussão continua, com os licenciandos dando exemplos de conta de bar e Fernando prosseguiu em seus argumentos.
Fernando: Eu quero que alguém me responda, existe?
Professor: Fernando, qual seria sua resposta aqui?
Fernando: Seria essa (se referendo ao quociente -103 e resto 2).

Fonte: Acervo da autora (2018).

Para esclarecer, vou ao quadro e escrevo a resolução proposta por Fernando de quociente igual a -103 e resto igual a 2. Posteriormente, perguntei quem fica com a primeira opção e alguns levantaram a mão; já na segunda opção, somente Fernando se manifestou positivamente. Ele olhou para a câmera e disse que ele acha que é e, posteriormente disse em tom de brincadeira que quer causar discórdia.

Um licenciando, não satisfeito com a nova solução, disse que utilizando a iniciativa de Fernando geraria mais possibilidades de resposta, e sugeriu -120 como quociente. Fui ao quadro, escrevi esse número no quociente, mas ao realizar a subtração, eles perceberam que o resultado 53, que seria o “resto”, poderia ser dividido novamente, encontrando o quociente igual a 17 e o resto igual a 2. Ao somarmos -120+17 encontramos como quociente -103 (Figura 18), Fernando disse: “Ah, chegou no meu -103, só fez o caminho mais difícil, mas chegou”.

Figura 18 - Resolução proposta por Diego



Fonte: Acervo da autora (2018).

Após essa resolução, que conduziu a um quociente de -103 e resto 2, os licenciandos começaram a fazer algumas observações, mas focaram a discussão no valor do resto. Propus uma discussão a partir da divisão de 10 por 4 e discuti priorizando o valor do quociente, porém perguntei porque o valor não pode ser 3, nem 1, mas exatamente 2.

Quadro 33 - Recorte do diálogo para definição do quociente de uma divisão

[...]

Escrevo no quadro a divisão de 10 por 4.

Danielly: 10 dividido por 4?

Licenciandos: Dá 2.

[...]

Danielly: Então, quando a gente procura um quociente, estamos procurando que número?

Fernando: Um resto positivo.

Danielly: Esquece o resto.

Milena, Márcio, Roberto: Menor ou igual ao dividendo.

Danielly: Aqui também é menor do que o dividendo (apontando para o quociente igual a 1). Vocês falaram menor ou igual ao dividendo.

Márcio: Não começa a complicar as coisas, pelo amor de Deus.

Danielly: Quando a gente fala que é o 2, por que é o 2?

Caio: Porque ele é mais próximo?

Milena: A quantidade de vezes que o divisor cabe no dividendo.

Danielly: Aqui a distância entre o 8 e o 12, do 10, é a mesma. Então os dois são próximos. Por que é o 2, não é o 1 e nem o 3?

Milena: Porque o 4 cabe 2 vezes no 10.

Fernando: Exatamente. Porque o 4 cabe 2 vezes no 10.

Fonte: Acervo da autora (2018).

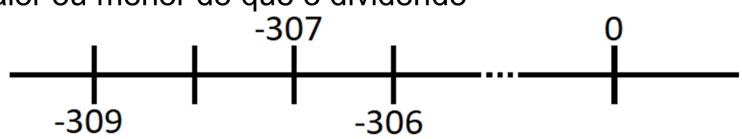
Com as socializações do algoritmo da divisão e esse diálogo, confirmamos que a fala trazida em nossa teoria sobre divisão de procurar um número que ao ser multiplicado seja o dividendo ou o mais próximo possível (Bittar; Freitas, 2005), embora imprecisa, é fortemente utilizada em sala de aula. Mas está incorreta e, por tanto, é preciso trabalhar na construção dessa consciência, ou seja, o que é falado pelos professores pode ser tomado como verdade pelo aluno, pois assim como afirma Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo do professor é a fonte primária do conhecimento dos alunos.

Após esse diálogo, mais cinco licenciandos fizeram comentários, mas não se aproximaram da conclusão pretendia e, almejando esse rigor de definição do produto entre quociente e divisor, conduzi a discussão. Na fala, priorizei a ideia de que na multiplicação entre quociente e divisor, não se deve falar apenas o menor número ou o que mais se aproxima. É preciso buscar um produto que seja igual ou menor e o mais próximo possível do dividendo.

Posteriormente, retomamos a discussão de -307÷3, mas percebemos que os licenciandos não conseguiam focar na ideia completa, pois alguns ainda comentavam que -306 (resultado da multiplicação de $-102x3$) é mais próximo de -307 e que, apesar do -309 (resultado da multiplicação de $-103x3$) ser menor, a resposta deveria ser -306. Nesse momento, observamos que eles ou priorizam o fato de ser menor ou o fato de estar mais próximo e não associam as informações, escolhendo o menor e mais próximo.

Diante desse impasse e exercendo o saber pedagógico do conteúdo de utilizar diferentes alternativas para apresentar uma ideia (SHULMAN, 1986), fui ao quadro e tracei um segmento de reta. Falei: Vocês tinham me falado que a minha multiplicação tem que ser um número igual ou menor que mais se aproxima do dividendo. Localizei o número zero e coloquei o -307 do lado esquerdo. Perguntei ao grupo onde fica o -306, eles disseram que à direita do -307. Em seguida perguntei onde fica o -309 e eles disseram que fica à esquerda de -307.

Figura 19 – Segmento de reta para identificar se o produto entre divisor e quociente é maior ou menor do que o dividendo



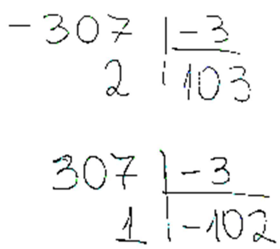
Fonte: Elaborado pela autora (2018).

Terminada essa representação intervi novamente: Vocês me falaram: igual ou menor que mais se aproxima. E alguns licenciandos começaram a perceber a resposta correta dizendo que tinha que ser o número -309. Perguntei a eles: O número -306 satisfaz essa condição aqui exposta? Disseram que não porque é maior do que -307. Posteriormente, o professor regente perguntou qual seria a divisão correta para confirmar a resposta, e eles disseram que deveria ser o quociente -103 com resto igual a 2. O licenciando Diego, que sugeriu o quociente igual a -120, apontou para o Fernando e disse que ele estava correto. Fernando brincou com um colega dele dizendo que ele estava certo e, enquanto eu estava ligando o projetor perguntou: “Então, mais uma vez: qual é o certo?”. Retornei a pergunta: qual é o certo Fernando? E ele disse: não, eu quero ouvir. E a turma soltou uma gargalhada. E perguntei, então, para a turma: O certo é quem, gente?

Somente após essa discussão e (re)construção do conhecimento do conteúdo apresentamos a definição do algoritmo de Euclides. Alguns licenciandos disseram que é estranho encontrar restos positivos quando quantidades negativas são divididas, mas as situações dadas eram sobre dívidas ou empréstimos. Nesses casos, não há resto, pois a divisão ocorre no conjunto dos racionais, além disso, operamos com um número sabendo que ele é negativo, mas ao operarmos, utilizamos sua representação positiva.

Ao apresentar a definição, validamos os valores corretos de quociente e resto encontrados anteriormente, e finalizamos realizando outras duas situações que ainda não havíamos trabalhado (Figura 20).

Figura 20 - Divisões com algoritmo de Euclides



Fonte: Acervo da autora (2018).

Na resolução de $-307 \div (-3)$, os licenciandos haviam sugerido, inicialmente, o número 102 no quociente, mas ao encontrar resto negativo, corrigiram a resposta. Terminamos as discussões analisando a operação de $307 \div (-3)$ e, diante das quatro situações propostas, garantimos que os licenciandos tivessem oportunidade de analisar as quatro possibilidades com relação ao valor positivo e negativo do dividendo e divisor. Antes de finalizar a aula, o professor regente se recordou de uma possível situação no ensino médio em que é possível trabalhar com o algoritmo de Euclides, realizando com os licenciandos dois exemplos de arcos côngruos com $-1200°$ e $-1300°$.

Nesse dia, ficou evidente o progresso das discussões promovidas em nossas intervenções, pois na maior parte do tempo os licenciandos conduziam as discussões, seus colegas analisavam seus argumentos e sugeriam novos pontos de vista. Nessa dinâmica de aprendizagem, corroboramos com Paiva (1999), ao considerar que:

> A atividade de aprender dos alunos se assemelha em grande parte à atividade inicial de um matemático ao atacar um problema novo: elaborar hipóteses, experimentar vários encaminhamentos, equivocar-se, dispor de formas para descobrir se errou, corrigir-se etc. (PAIVA, 1999, p.209).

Além desse papel ativo dos licenciandos, ainda nesse dia percebemos que desempenhamos um papel adequado de mediadores e, enquanto discutíamos, aflorava a (re)construção de seus conhecimentos da maneira que desejávamos, valorizando diferentes estratégias de raciocínio e privilegiando o conhecimento prévio dos licenciandos.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

Como este nosso mestrado é profissional, “seu foco está na aplicação do conhecimento, ou seja, na pesquisa aplicada e no desenvolvimento de produtos e processos educacionais que sejam implementados em condições reais de ensino” (CAPES, 2013, p.23). Dessa maneira, desenvolvemos como produto educacional um material didático que permite discutir processos de ensino e aprendizagem acerca do conceito de divisão em cursos de formação inicial professores de Matemática.

A proposta desse material segue a ideia de possibilitar ações que favoreçam (re)construções de conhecimentos sobre o conceito de divisão. Nele, o formador encontrará diferentes abordagens para o trabalho com a divisão no contexto da licenciatura em Matemática, bem como dará acesso a algumas ideias que envolvem essa operação aritmética. A proposta do material é trabalhar com o conhecimento prévio dos licenciandos de maneira que as atividades propostas atuem como um norteador, mas as discussões em sala de aula dependerão diretamente das contribuições dos participantes e da condução do formador.

Embora o material seja direcionado para cursos de formação de professores de Matemática, as ideias apresentadas no material podem ser adaptadas para estudo do conceito de divisão no ensino fundamental e médio em suas diferentes modalidades ou para pessoas interessadas no estudo do conceito de divisão.

Para evitarmos o rompimento entre a Matemática estudada em cursos de formação e a Matemática estudada nas escolas, durante a elaboração do material, consideramos nosso estudo e conhecimento do assunto, discussões ocorridas em intervenções e problematizações dos licenciandos sobre o tema.

O material compõe-se de pontos que acreditamos que, devam ser discutidos no estudo sobre o conceito de divisão. Neste material apresentamos atividades aplicadas em nossas intervenções, com orientações para desenvolvê-las e cuidados com expressões ao ensinar o conceito de divisão na educação básica.

O livro intitulado “O conceito de divisão na formação inicial do professor” está organizado em cinco capítulos. Primeiramente, há uma breve introdução discorrendo sobre tópicos importantes da formação inicial de professores e a importância de se estudar assuntos considerados mais elementares na licenciatura em Matemática. Do segundo capítulo em diante adentra na discussão matemática considerada relevante para ser estudada. Discutimos no capítulo 2 a divisão partitiva e quotativa por meio da produção e resolução de enunciados pelos licenciandos. O capítulo 3 contém estratégias de divisão não convencionais valorizando as diferentes estratégias de resolução, finalizando a discussão sobre a simplificação do dividendo e divisor e suas consequências no resto. O capítulo 4 aborda Um olhar sobre o algoritmo da divisão, com exemplos de divisões com zero no quociente e alertas sobre expressões utilizadas em sala que podem gerar erros conceituais. O final contém uma proposta de discussão sobre o algoritmo de Euclides.

Esperamos que esse material estimule e possibilite mobilizar espaços na licenciatura para realizar discussões similares à nossa pesquisa, envolvendo conteúdos considerados mais básicos para um curso de licenciatura. Embora o conceito de divisão pareça elementar, essa operação aritmética envolve particularidades que se não forem bem compreendidas, podem resultar em erros conceituais. Ao utilizar esse material, haverá à disposição elementos essenciais para despertar em licenciandos uma consciência de professor preocupado com a aprendizagem dos alunos.

6 CONCLUSÕES

Nesta pesquisa investigamos (re)construção do conhecimento sobre o conceito de divisão por meio de intervenções realizadas no contexto da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I, com licenciandos ingressantes no curso de Matemática no ano de 2016, de uma instituição pública. Este capítulo apresenta nossas conclusões advindas das atividades realizadas durante a intervenção, bem como nossas considerações, recorrentes da pesquisa. Essa avaliação foi realizada analisando os objetivos de cada etapa.

6.1 CONSIDERAÇÕES DO CURSO

Baseados em dois relevantes referenciais, Shulman (1986; 2015) e Duval (2009), consideramos que nossas ações no decorrer do curso foram adequadas para a (re)construção do conhecimento acerca do conceito de divisão. Ambos enfatizam a necessidade de utilizar diferentes maneiras para compreender o conteúdo e também apresentar diversas formas de representá-lo. Houve muitas oportunidades para dialogar e analisar as estratégias que eram apresentadas, além de discutir outras possíveis soluções. Assim, com base no que era apresentado pelos grupos nas atividades práticas durante as socializações e, com essa interação, os licenciandos foram estimulados a refletir sobre o conceito de divisão.

Apresentamos situações envolvendo calculadora, cálculo mental, algoritmo e por estimativas. Discutimos particularidades dos algoritmos da divisão e diferentes resoluções de situações-problema, alertando-os também a respeito de termos recorrentes em sala de aula que podem gerar dificuldades na aprendizagem dos alunos. Foi proposto o estudo do zero na divisão por meio de situações em que ele aparece no quociente da divisão e quando este é o dividendo e/ou divisor. Também reforçamos e salientamos o trabalho com divisões exatas e não exatas, com quantias discretas e contínuas e, ainda, discutimos situações voltadas ao ensino superior, como questões de teoria dos números e algoritmo de Euclides.

As intervenções realizadas objetivaram responder a pergunta proposta por Misukami (2004) “O que o professor precisa saber para ser professor?”. Neste estudo, mais especificamente, o que o professor precisa saber sobre o conceito de divisão. Temos consciência de que a (re)construção dos saberes sobre o conceito de divisão, durante nossas intervenções, não foram suficientes para sanar todas dúvidas e dificuldades que os participantes da pesquisa possam encontrar. Nosso objetivo foi apresentar a eles possibilidades de desenvolver e ensinar esse conteúdo, apesar de sabermos da limitação de nossa pesquisa.

A limitação está diretamente ligada ao fato de não ter sido possível discutir todos os tópicos previstos em nosso planejamento. Como trabalhamos a proposta com base no conhecimento prévio dos licenciandos, nossas aulas foram guiadas pela investigação. Assim, sabíamos de onde partiríamos, mas não tínhamos como prever até onde chegariam as discussões. Muitas ações utilizaram mais tempo do que o previsto e, por isso, algumas discussões foram priorizadas em detrimento de outras, então, para realizar todas as discussões precisaríamos de mais dias de intervenções.

A socialização por meio das resoluções apresentadas no quadro ou dos diálogos promovidos entre os licenciandos ou entre os licenciandos e a pesquisadora e/ou o professor regente foram importantes para a pesquisa, pois como afirma Almouloud (2007, p. 72), “falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão matemática”. Ao socializar as estratégias de resolução dos grupos, identificamos que ainda não têm adequadamente constituído o conhecimento pedagógico do conteúdo. Essa constatação se deve ao fato de serem do primeiro período. Porém, no decorrer da formação, compreendemos que eles vão perceber a importância de desenvolver esse pensamento e que o curso de licenciatura vai contribuir para isso. Desse modo, é um conhecimento que precisa ser priorizado na formação docente durante todo o curso de licenciatura em Matemática e em ações posteriores a ela.

No que se refere aos objetivos das intervenções, consideramos que todos foram atingidos de maneira satisfatória, pois conseguimos identificar conhecimentos prévios pela socialização e pelos diálogos promovidos e, por meio deles, conduzimos a dinâmica em sala de aula. Analisamos de forma coletiva as questões propostas, valorizando diferentes estratégias de solução, promovendo (re)construções do conhecimento acerca do conceito de divisão e, consequentemente, promovendo a interação entre os envolvidos.

6.2 CONSIDERAÇÕES DA PESQUISA

Para o estudo da (re)construção de saberes relacionado ao conceito de divisão, consideramos adequadas as análises estabelecidas com base nas ideias de nossos dois referenciais teóricos, Shulman (1986, 2015) e Duval (2009). Com os tipos de registros de representação semiótica produzidos pelos licenciandos, como a produção de enunciados de situações-problema com a língua natural, e a resolução dos problemas utilizando registros simbólico-numéricos, na socialização de estratégias de solução identificamos o conhecimento do conteúdo. Esses conhecimentos serão fundamentais para construírem no futuro o conhecimento pedagógico do conteúdo. Posteriormente, analisamos as soluções apresentadas nas folhas respostas.

Com relação aos objetivos da intervenção, estes foram alcançados, pois identificamos conhecimentos prévios dos licenciandos que se dispuseram a ir ao quadro, apresentando à turma a solução proposta pelo seu grupo e dos grupos, ao analisarmos as folhas de soluções. De maneira geral, os participantes da pesquisa possuem um conhecimento do conteúdo acerca do conceito de divisão, mas este aparece em muitos casos com erros conceituais decorrentes de um estudo precipitado de experiências vivenciadas no ensino fundamental, médio, ou de experiências que precederam o ingresso na licenciatura em Matemática.

O nosso segundo objetivo foi analisar diferentes registros de representação semiótica utilizados na resolução das atividades. Ao considerar os casos em que os licenciandos trabalharam com registros matemáticos, ou seja, com questões envolvendo situações-problema e questões diretas, percebemos um predomínio do algoritmo da divisão em detrimento de outras maneiras de representar e solucionar um problema matemático. Essa constatação pode ser justificada por Duval (2009, p. 91), quando afirma que “um sujeito no qual a coordenação dos registros é encontrada suficientemente desenvolvida pode muito bem se ater às representações de um só registro”. Desse modo, como os licenciandos já apresentam uma vivência com esse conteúdo e já passaram pelas estratégias de divisão não convencionais e convencionais, acabam priorizando o algoritmo da divisão para encontrar suas soluções. Todavia, quando foi solicitado em uma das atividades que apresentassem mais de um tipo de resolução, eles foram capazes de recorrer a outros registros de representação semiótica simbólico numéricos, diferentes do algoritmo de divisão, para solucionar um problema, como o uso de tabelas, equações, proporcionalidade, entre outras representações.

Nossa proposta de abordar diferentes situações envolvendo o conceito de divisão e solicitar que os grupos apresentassem suas estratégias de solução para a turma permitiu que os licenciandos tivessem acesso a diferentes estratégias de solução e, dessa maneira, conseguissem desenvolver a noesis com base no modelo de conceitualização. Nessa categoria nos aproximamos da segunda hipótese de que, ao considerar que a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação utilizando a linguagem natural e o simbólico numérico e envolvendo funções de tratamento e conversão desenvolve uma compreensão do conteúdo conceitual (DUVAL, 2012a). Essa foi uma oportunidade de eles se constituírem professores e se aproximarem do conhecimento pedagógico do conteúdo, pois futuramente serão responsáveis por pensar em atividades e estratégias de ensino que possibilitarão a seus alunos terem acesso a diferentes possibilidades de registros de representação semiótica.

Nosso terceiro objetivo foi identificar saberes matemáticos que emergem durante discussões e investigações sobre o conceito de divisão. Os saberes matemáticos desenvolvidos de modo mais evidente ocorreram na classificação de divisão partitiva e quotativa e na elaboração de enunciados de divisão, no estudo do algoritmo de Euclides, quando o dividendo apresentou um valor negativo, e na simplificação do dividendo e divisor e consequências no resto. Além disso, lembramos aos licenciandos que o uso de expressões inadequadas, como “não dá para dividir”, “igual ou o mais próximo do dividendo”, “abaixar o número” e ações em salas de aula pode conduzir os alunos a erros conceituais, como utilizar a tabuada omitindo a multiplicação pelo número zero, omitir o zero no quociente da divisão, omitir a determinação do resto da divisão, entre outras ações.

Durante as intervenções, procuramos executar da melhor maneira possível nosso posicionamento como mediadores. Sabemos que esse exercício é constante, e sempre é possível aperfeiçoar a didática em sala de aula, sendo que as análises e reflexões são necessárias para esse aprimoramento. Conforme Shulman (2015) afirma, nota-se a postura confortável quando os professores se sentem à vontade e, quando não se sentem à vontade, essa postura fica mais rígida e os professores não dão oportunidade aos alunos de se posicionarem sobre o assunto discutido. Essa conduta desconfortável surgiu quando propusemos a discussão em que o zero era dividendo e/ou divisor e por eu não me sentir confiante o suficiente para conduzir a discussão, acabei permitindo que professor regente o fizesse sozinho. Mesmo que, por vezes, eu comentasse e fizesse algumas interferências, nessa condução da aula acabamos priorizando a ação e intervenção do professor regente, e a pesquisadora e os licenciandos atuaram quase todo o tempo como ouvintes. Na experiência vivenciada posteriormente, no curso ofertado no município de Cariacica, pude conduzir essa discussão, e essa oportunidade de vivência, reflexão e aprimoramento da minha prática foi fundamental para progredir.

O episódio que consideramos mais bem executado na posição de mediadores ocorreu no último dia de intervenção, principalmente com a discussão sobre o algoritmo de Euclides. Nesse momento, conseguimos assumir com propriedade um papel de condutores do aprendizado, coordenando discussões que privilegiaram as falas dos licenciandos, pois conseguimos dar “[...] atenção a aprendizagem dos alunos, diagnosticando o seu conhecimento prévio, especialmente no que diz respeito a conceitos, termos e representações matemáticas, indispensáveis ao trabalho a realizar" (PONTE, 2014, p. 349), e a partir daí, desenvolvemos nossas ações.

Apesar dos contratempos, consideramos que, no final da pesquisa, todos os objetivos foram alcançados, pois além de promover (re)construção dos saberes relacionado ao conceito de divisão, foi possível elaborar um material com atividades que foram validadas em nosso ambiente de pesquisa. Em algumas propostas realizamos alterações, que identificamos necessárias durante nossas intervenções, para melhoria da qualidade desse material. Algumas das alterações foram identificadas no momento de nossas ações em sala de aula e, após a análise das soluções produzidas pelos licenciandos, conseguimos realizar os ajustes finais para elaborar com mais eficiência e competência o produto educacional.

As diferentes situações propostas em nossas intervenções possibilitaram criar espaços de discussão, de maneira que o aprendizado fosse "[...] enriquecido pelo diálogo com outros alunos e com professores, na confrontação de seus pontos de vista, no intercambio de métodos de resolução, [...]" (PAIVA, 1999, p. 210). Nessa proposta, os licenciandos conseguiram estabelecer articulação entre conhecimento do conteúdo científico e escolar e aproximação do conhecimento pedagógico do conteúdo. Além disso, conseguimos trabalhar conteúdos que possibilitam a articulação entre a matemática escolar e a acadêmica, como o uso de situações hipotéticas, simulando ocorrências em sala de aula. Isso permitiu nos distanciarmos da dupla descontinuidade e esperamos que esses conhecimentos sejam colocados em articulação quando os participantes da pesquisa começarem a exercer a docência.

Ao concluir esta pesquisa, considero relevante falar um pouco sobre meu crescimento ao longo dessa trajetória. Como sou formada em licenciatura em Matemática, mas estive afastada da sala de aula ao assumir um cargo administrativo, sinto falta desse aprendizado constante que vivenciamos como somos regentes. E esta pesquisa foi uma oportunidade de me reaproximar desse cenário. Ao estudar sobre o conceito de divisão consegui realizar um desejo antigo e, assim, ter uma realização pessoal nessa concretização. Os desafios e dificuldades estiveram presentes durante esse período, mas observar nossas constatações, o crescimento dos licenciandos, meu desenvolvimento e aprimoramento como professora e pesquisadora compensaram todo o esforço e tornaram a caminhada gratificante. As possibilidades de disseminar nossa pesquisa ressaltam a importância do estudo que desenvolvemos. Nesse sentido, tivemos oportunidade de realizar no município de Cariacica, coordenado pela Prof.ª Dr.ª Maria Auxiliadora Vilela Paiva, com participação do Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti, uma formação continuada para professores dos anos iniciais do ensino fundamental com a temática do conceito de divisão. Algumas das atividades aplicadas em nossa pesquisa também foram aplicadas nesse curso, com as alterações que consideramos pertinentes para melhorar a aplicabilidade e promover mais discussões. Assim, foi mais uma oportunidade de desenvolvimento pessoal e profissional, confirmando a potencialidade de nossa pesquisa também no cenário da formação continuada.

Esta pesquisa e as demais vivências geradas em torno dessa produção contribuíram para desenvolver um autoconhecimento e me encontrar no campo educacional. As aprendizagens posteriores às intervenções e a formação continuada conduzida no município de Cariacica também geraram reflexões acerca do processo inacabado de uma formação. Assim, para o desenvolvimento de pesquisas futuras, considero pertinente uma discussão sobre a maneira de ensinar o conceito de divisão nos primeiros anos do ensino fundamental, pois, muitas vezes, professores dos anos finais desse ciclo desconhecem como os conteúdos são discutidos na primeira etapa escolarização.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. **Content Knowledge For Teaching: What makes it Special?** Journal of Teacher Education, 2008, Vol.59(5), p.389-407.

BITTAR, M., FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2ª Ed. Campo Grande: Ed. UFMS, 2005.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação**. Resolução CNE/CP1**, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf> Acesso em: 13 set. 2017.

BRASIL, **Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial e a formação continuada**, resolução nº 2 de 1º de julho de 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 4 jul. 2017.

BRASIL, **Escassez de professores no Ensino Médio**: Propostas estruturais e emergenciais. CNE/ CEB. 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/escassez1.pdf>. Acesso em: 1º fev.2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7ª ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

CÔCO, D.; SANTANA, D. F.; MATTIUZZI, R. M. Inserções no Ambiente Escolar e Aprendizagens da Docência por Licenciandos em Matemática. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XV, 2013, Uneb – Campus X. **Anais**. Teixeira de Freitas – BA, 2013.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). Diretoria de Avaliação. **Documento de Área 2013** – Ensino. Brasília: Capes, 2013. Disponível em: <https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Ensino_doc_area_e_comiss%C3%A3o_block.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2017.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**. Pelotas: FaE/PPGE/UFPel, n. 45, p. 57 – 67, 2013.

DINIZ, J. E. **Formação de professores** – pesquisa, representações e poder. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos da aritmética**. Florianópolis: Ed. Da UFSC, 2009.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012a.

DUVAL, R. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? Tradução de Luciana da Costa Oliveira, com revisão técnica de Méricles Thadeu Moretti. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 07, n. 2, p. 305-330, 2012b.

FÁVERO, M. H., NEVES, R. S. P. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. **Zetetiké**: Campinas, v.20, n.37, p. 35-72, jan/jun 2012.

GAIA, S.; CESÁRIO, C., TANCREDI, R. M. S. P. Formação Profissional e Pessoal: A Trajetória de Vida de Shulman e suas Contribuições para o Campo Educacional. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 1, n. 1, set. 2007. Entrevistas. ISSN 1982-7199. Programa de Pós-Graduação em Educação. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/8/8>. Acesso em: fev. 2016.

GAMBOA, S. S. Saberes, conhecimentos e as pedagogias das perguntas e das respostas: atualidade de antigos conflitos. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v.4, n.1, 138 p.9-19, jan./jun. 2009. Disponível em: < http://www.periodicos.uepg.br/>. Acesso em: nov. de 2016.

GATTI, B. A. **Formação de Professores no Brasil**: Características e Problemas. Educ. Soc., Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, out.-dez. 2010.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Est. Aval. Educ**., São Paulo, v. 25, n. 57, p. 24-54, jan./abr. 2014.

JESUS, A. M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 91-111.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior**. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LAUTERT, S.L.; SPINILLO, A. G. **As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão**. In: Psicologia: Teoria e Pesquisa. Brasília, vol. 18, n. 3, p. 237-246.

MEGID, M. A. B. A. O ensino aprendizagem da divisão na formação de professores.**Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos: v.6, p. 175-187, 2012.

MIZUKAMI, M. G. N. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman**. Revista Educação, Santa Maria, v. 29, n. 2, p. 1-11, 2004. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/3838/2204>. Acesso em: 18 ago. 2016.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, vol. 26, n. 44, Rio Claro, dez. 2012.

MORETTI, T. M.; THIEL, A. A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 07, n. 2, p. 379-396, 2012.

NEVES, R. S. P. **A divisão e os números racionais**: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores. 555f. Tese (Instituto de Psicologia) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

PAIVA, M. A. V. **Concepções do ensino de geometria: um estudo a partir da prática docente**. Tese (Doutorado em Matemática). PUC/RJ: Rio de Janeiro, 1999.

PAIVA, M. A. V. O professor de Matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: PAIVA, M. A. V.; NACARATO, A. M. (Org.). **A Formação do professor que ensina Matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p.89-112.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. **Anais** VI CIEM – Congresso Internacional de Ensino de Matemática – ULBRA. Canoas, 2013.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: identidade e saberes da docência. In: PIMENTA, S. G. (Org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 15-34.

PIMENTA, S. G.; LIMA, M. S. L. **Estágio e docência**. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

PONTE, J. P. Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 343-360, 2014.

RANGEL, L. G. **Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico do Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo**. 258 f. Tese (Programa de Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. et al. **Didática da matemática:** reflexões psicológicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996, p. 156-185.

SANTANA, D. F. **Potencialidades e Dificuldades em Matemática de uma Aluna Autista: Algumas Reflexões**. Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, 2014.

SANTANA, D. F.; CÔCO, D. Narrativas e Constituição da Identidade Docente de Licenciandos de Matemática no Estágio Supervisionado. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO E INOVAÇÃO DO IFES, VIII, 2013, Ifes – Campus Serra. **Anais**. Serra – ES, 2013.

SANTANA, D. F.; BRITO, K. L. G.; PAIVA, M. A. V. Estudo piloto sobre os conceitos de divisão de licenciandos em matemática participantes do Pibid. In: 6º ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 2017. **Caderno de resumos**. Organizado por Marger C. V. Viana, Edmilson M. Torisu e Dilhermando F. Campos – Ouro Preto: Editora UFOP, 2017.

SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), Diretrizes Curriculares para o Ensino de **Matemática**: Proposta da Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

SEGADAS, P. C. **A compreensão do teorema da divisão Euclidiana: do conceito à análise do resto**. 332f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2013, Rio de Janeiro.

‘, A. C. V.; BORBA, R. E. de S. R. O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro: o grupo, n. 47, p. 51-72, jul./dez. 2005.

SILVA, S. A. F. **Aprendizagens de professores num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais**. 2009. 364f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação. Vitória, 2009.

SHULMAN, L. Those Who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher. n. 2, vol. 15, Washington, febr. 1986, p. 4-14.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SHULMAN L. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. Tradução de Leda Beck. **CADERNOS CENPEC**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 196-229, jun. 2015. ISSN 2237-9983.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Teoria e prática de matemática: como dois e dois**. Volume único: Livro do professor. 1ª Ed. São Paulo: FTD, 2010.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino de matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014. 322p.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, CPF nº___________________________, estou sendo convidado a participar da pesquisa "ESTUDANDO OS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE DIVISÃO COM ALUNOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA", de responsabilidade da Danielly Fraga Santana, aluna do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, e sob orientação da Profª. Drª. Maria Auxiliadora Vilela Paiva.

Declaro estar ciente que:

i) Esta pesquisa não apresenta nenhum risco à minha pessoa e entendo que traz, não somente para mim, mas para toda a comunidade escolar, como benefício, a possibilidade de melhoria do processo de ensino aprendizagem nos cursos licenciatura em Matemática.

ii) Os dados serão coletados através de atividades escritas, questionários, entrevistas e observações de aula gravadas tanto em áudio quanto em vídeo, bem como por meio de anotações realizadas durante as mesmas. As informações que eu fornecer para o pesquisador serão guardadas em formatos de áudio e vídeo e, posteriormente, transcritas e não serão utilizadas em meu prejuízo ou de outras pessoas, inclusive na forma de danos à estima, prestígio e prejuízo econômico ou financeiro.

iii) Como voluntário, durante ou depois da pesquisa é garantido o anonimato das informações que eu fornecer.

iv) Li ou foi lido para minha pessoa as informações sobre o estudo e estou claramente informado sobre minha participação neste estudo.

v) Fica claro para mim quais são as finalidades do estudo, os riscos e benefícios para minha pessoa, a forma como a pesquisa será aplicada e a garantia de confidencialidade e privacidade de minhas informações.

Concordo em participar voluntariamente deste estudo e, se for de meu desejo, poderei deixar de participar deste estudo em qualquer momento, durante ou após minha participação, sem penalidades, perdas ou prejuízos para minha pessoa ou de qualquer equipamento ou benefício que possa ter adquirido.

Em qualquer etapa do estudo, terei acesso ao pesquisador responsável, Danielly Fraga Santana, pelo e-mail: danielly.fraga@live.com e celular (27) 9 9869-0330.

Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com a pesquisadora responsável e a outra com o senhor (a).

Vitória, ________ de ________________ de 2016.

____

Assinatura do Voluntário Participante

____

Danielly Fraga Santana (Pesquisador)

____

Profª Maria Auxiliadora Vilela Paiva (Pesquisadora Orientadora)

APÊNDICE B – Questionário para caracterização dos participantes de pesquisa

Prezado (a) aluno (a), este questionário faz parte minha pesquisa de mestrado orientada pela Prof.ª Maria Auxiliadora Vilela Paiva, e tem como objetivos caracterizar a turma ingressante no curso de licenciatura em Matemática de 2016 e analisar as estratégias escolhidas para a resolução de quatro atividades propostas neste instrumento. Para isso, o registro dos cálculos é imprescindível.

O pedido para que vocês, licenciandos ingressantes no curso, respondam é para caracterizarmos a turma e definirmos estratégias de intervenções para a disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I, por isto pedimos que respondam com seriedade. Informamos que utilizaremos os dados para a produção da dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, com previsão de defesa para Agosto de 2017.

Informamos que sigilo de sua identidade será mantido, e atribuiremos um nome fictício, garantindo seu anonimato.

Obrigada pela sua colaboração!

Desde já agradeço.

Qualquer dúvida estou a disposição,

Danielly Fraga Santana - danielly.fraga@live.com

1. Nome Completo: ____
2. Sexo

   ( ) Masculino ( ) Feminino
3. Qual a sua idade? _____________
4. Cursou a maior parte do Ensino Fundamental em instituição.

( ) Privada ( ) Pública

5. Cursou a maior parte do Ensino Médio em instituição.

( ) Privada ( ) Pública

6. Em que ano concluiu o Ensino Médio? ___________
7. Possui outra formação? ( )Não ( )Sim
8. Em caso afirmativo, qual?_____________________________
9. A licenciatura em Matemática foi sua primeira opção de curso?

( )Sim ( )Não.

10. Em caso negativo, qual sua primeira opção? ____________________
11. Por que escolheu cursar licenciatura em Matemática?

12. Pretende exercer a profissão de professor de Matemática do Ensino Fundamental e/ou Médio? ( )Não ( )Sim.
13. Já trabalha? ( )Não ( )Sim.
14. Atua como professor? ( )Não ( )Sim.
15. Que nível de ensino? ( )Fundamental ( )Médio
16. Qual modalidade? ( )Regular ( )EJA
17. Pensando na época em que era aluno do Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM), com quais conteúdos matemáticos você mais se identificava?

18. E quais conteúdos matemáticos encontrava mais dificuldades?

19. Em relação aos conteúdos de números e operações, suas dificuldades eram em:

( ) Interpretar o enunciado ( ) Tabuada

( ) Escolher a estratégia de resolução ( ) Utilizar os dados do enunciado

( ) Escolher que tipo de operação utilizar ( ) Operar com decimais
( ) Não saber utilizar o algoritmo
( ) Utilizar outras estratégias diferentes do algoritmo
( ) Nenhuma das anteriores

20. Ao estudar divisão no EF, você utilizou quais estratégias?

( ) Calculadora ( ) Cálculo mental ( ) Algoritmo
( ) Estimativa ( ) Outro ________________

21. Para você, qual a importância de se trabalhar com o conteúdo de divisão numa licenciatura em Matemática?

ATIVIDADES INICIAIS

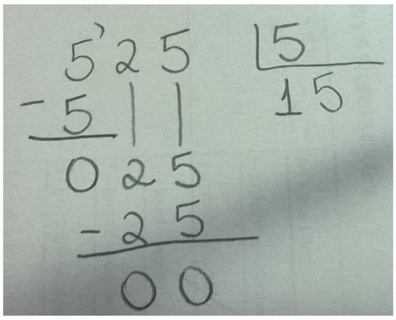
Observe o diálogo abaixo de João (J) e Marcos (M):

J: Marcos, a minha professora pediu que eu fizesse uma conta mentalmente e não consegui resolver. Você poderia me ajudar?
M: E como eu posso te ajudar?
J: Fala para mim como você resolveria mentalmente 130 dividido por 5.
M: Bom, para mim, dividir por 10 é mais fácil. Então eu pensaria em 130 dividido por 10.
J: Correto, nessa divisão o resultado é 13. E depois, o que mais eu faria?
M: A conta é dividido por 5, e não por 10. Então, como 5 é a metade de 10, eu pego o resultado e divido por 2.
J: Muito bom. Então o resultado é 6,5, certo?
M: Isso ai.

1. Apresente sua opinião sobre o desenvolvimento acima.

2. Apresente OUTRA ESTRATÉGIA de cálculo mental para resolver a operação proposta.

Um aluno de 5º ano fez a seguinte operação.



3. Apresente sua opinião sobre o desenvolvimento do algoritmo.

4. Apresente outra estratégia para resolver a operação 525:5.

APÊNDICE C – Atividades planejadas para as intervenções

Ministério da Educação

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 30/06/2016

Grupo:____

____

1) Uma escola com 300 alunos está organizando uma viagem para Domingos Martins e orçou os custos para o aluguel de ônibus com duas empresas de transportes. Nos contratos de ambas as empresas, uma cláusula permitia a inclusão de novos alunos - mesmo após fechar o contrato - desde que os custos com a viagem fossem arcados. A escola estabeleceu que:

- ✓ Todos os alunos pagariam um mesmo valor;
- ✓ O dia 30 de junho seria o último dia para que os alunos confirmassem a sua participação no evento.

O quadro a seguir apresenta os valores praticados por cada uma das empresas.

Empresa	Capacidade de pessoas por ônibus	Custo por ônibus
A	45	R$ 1.000,00
B	30	R$ 700,00

a) No dia 29 de junho, 210 alunos já haviam confirmado que iriam à viagem. A diretora, na tarde desse mesmo dia, fechou o contrato com a empresa que apresentou o menor custo para essa quantidade de alunos. Qual foi essa empresa?

b) No dia 30 de junho, mais 20 alunos também confirmaram que iriam à viagem. Como ainda estavam no prazo, a diretora se viu obrigada a incluí-los. O aumento no número de alunos interessados na viagem representou uma diminuição no valor pago por pessoa? Justifique sua resposta. (Vale lembrar que os custos do transporte serão divididos igualmente entre os alunos)

2) Uma biblioteca escolar possuía 20 estantes, com 150 livros cada. Por ocasião de uma reforma, foram solicitadas estantes menores e mais ergonômicas, com capacidade para 120 livros cada. Calcule a quantidade mínima de novas estantes que deve ser comprada de modo a acomodar todos os livros da biblioteca.

3) Experimente traçar outra estratégia de solução para a questão 2 diferente da utilizada.

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 01/07/2016

Grupo:____

____

1) Elabore uma situação-problema de divisão, próxima da realidade, em que o dividendo seja 5530 e o divisor seja 54.

2) Analise o enunciado que foi produzido e o classifique como divisão partitiva ou quotativa, justificando sua resposta.

3) Agora produza um enunciado, utilizando a mesma ideia do enunciado produzido e o transforme na ideia contrária do que havia produzido anteriormente.

- Escolha duas entre as cinco ideias da divisão (Grupos equivalentes, Comparação multiplicativa, Comparação entre razões (proporção), Representação retangular e Combinatória) e elabore enunciados com Divisão Partitiva (DP) e Divisão Quotativa (DQ).

b) Ideia da divisão: ____

DP: ____

____

____

____

DQ: ____

____

____

____

c) Ideia da divisão: ____

DP: ____

____

____

____

DQ: ____

____

____

____

Ministério
da Educação

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 04/07/2016

Grupo:____

1. Quais resultados lhe parecem absurdo:

	Sim	Não	Por quê?
a)			
b)			
c)			
d)			

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 04/07/2016

Grupo:____

2. Agora você é o professor. Imagine que você está em uma turma de 6º ano e explique a eles as divisões a seguir:

a) $687 \div 3 =$

b) $325 \div 4 =$

c) $436 \div 4 =$

d) $553 \div 5 =$

e) $6141 \div 6 =$

3. Resolva as divisões a seguir, justificando sua resposta:

a) $8 \div 2=$

b) $0 \div 2 =$

c) $2 \div 0 =$

d) $0 \div 0 =$

Ministério da Educação

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 07/07/2016

Grupo:____

1) Um professor propôs a situação a seguir para a sua turma:

Gabriela, todo ano, faz uma poupança para garantir o pagamento das primeiras mensalidades da escola de sua filha do ano seguinte; assim, ela consegue organizar suas finanças para que não tenha que recorrer a nenhum tipo de empréstimo. Sabendo que: - os valores economizados por Gabriela, ao longo de 2015, totalizaram R$1.480,00. - a mensalidade da escola da sua filha, em 2016, é de R$360,00, Determine o número de mensalidades que Gabriela conseguiu pagar, usando apenas os R$ 1480,00, e se lhe sobrou algum dinheiro para a mensalidade seguinte.

Em seguida, apresentou duas soluções lhe chamaram a atenção:

Aluno 1
$1480 \mid 360$ $4 \quad\;\; 4$ mensalidades Ela pagou 4 mensalidades e sobrou R$ 4,00.
Aluno 2
$\frac{1480}{360} = \frac{148}{36} = \frac{74}{18} = \frac{37}{9}$ $\quad 37 \mid 9$ $\quad\quad 1 \quad 4$ Conseguiu pagar 4 mensalidades e sobrou R$ 1,00.

c) Note que os alunos encontraram resultados diferentes. Elabore uma explicação que descreva o que cada um deles fez, na tentativa de responder a questão proposta.

Orientadora da pesquisa: Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Pesquisadora: Danielly Fraga Santana

d) Algum aluno obteve a resposta correta?

- ✓ Se você acha que sim, indique o aluno que a obteve;
- ✓ Se você acha que não, indique o resultado correto para a situação proposta. Não se esqueça de justificar a sua resposta.

2) Imagine a seguinte situação: Você está em um supermercado, com R$250,00, e deseja comprar certo produto que custa R$2,54. Como você está sem celular, sem calculadora e como o supermercado está cheio, você só conseguirá passar uma única vez pelo caixa. Se o seu desejo é comprar o maior número possível de produtos, explique como você calcula o número de produtos que compraria?

3) Você quer dividir 436 por 4 numa calculadora que está com a tecla 6 quebrada. Como você faria para encontrar o resultado dessa divisão?

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 08/07/2016

Grupo:____

____

1) Na divisão de 28 por um número natural, o resto é 8. Determine **todas** as possibilidades do quociente (q) e do divisor (d).

2) Sabendo que você possui uma calculadora com os algarismos de 0 a 9, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e o sinal de igual, responda as questões a seguir:

a) Quais operações você faria para obter o resto da divisão de 12.597 por 368?

b) Tente reduzir o número de operações que você utilizou.

c) Qual o número mínimo de operações necessárias para obter o resto da divisão proposta?

Orientadora da pesquisa: Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Pesquisadora: Danielly Fraga Santana

Ministério da Educação

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: 08/07/2016

Grupo:____

____

3) Obtenha o quociente(q) e o resto (r) da divisão de 307 por 3.

4) Agora obtenha o quociente(q) e o resto (r) da divisão de -307 por 3.

Orientadora da pesquisa: Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Pesquisadora: Danielly Fraga Santana

Ministério da Educação

DISCIPLINA: Fundamentos IPROFESSOR: --- TURMA: 1º Período DATA: / /2016

Grupo:____

____

1) Em grandes eventos, há um considerável esforço para otimizar o deslocamento das pessoas envolvidas. No caso da Olimpíada Rio 2016, suponha que uma Agência de Turismo seja a responsável por providenciar ônibus que possam transportar 5530 pessoas interessadas em fazer um *tour* pela Vila Olímpica. Sabendo que os ônibus possuem capacidade máxima de 54 pessoas e que as 5530 pessoas farão o passeio simultaneamente, calcule o número mínimo de ônibus que devem ser disponibilizados pela Agência.

2) Um posto precisa distribuir, igualmente, 5530 litros de gasolina em 54 tonéis. Qual o volume de gasolina que será colocado em cada tonel?

3) Um grupo de 54 formandos decidiu realizar o seu baile de formatura em um cerimonial que exigia, na assinatura do contrato, o pagamento inicial de R$5.530,00. Sabendo que todos os formandos pagaram uma mesma quantia, e que cada formando pagou o valor que cabia a ele usando o menor número de cédulas e moedas possível, determine o número de moedas recebidas pela empresa, se todos os pagamentos foram efetuados no mesmo momento.

APÊNDICE D – Questionário para avaliação das intervenções

Na disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I foram realizadas cinco intervenções sobre divisão. Para auxiliar em nossos processos de reflexão sobre a condução da disciplina, e em particular, sobre tal assunto, gostaríamos de saber sua opinião sobre as ações que foram propostas. Sua participação é muito importante para o aprimoramento e a continuidade do nosso trabalho. Desde já, o nosso muito obrigado.

Danielly Fraga - Pesquisadora
Maria Auxiliadora Vilela Paiva - Orientadora da pesquisa

Nome completo:

Durante as cinco intervenções, foram propostas atividades que eram resolvidas, ora individualmente, ora em duplas, ou ainda em pequenos grupos. Normalmente, após a realização de cada atividade, tivemos a socialização dos processos de resolução que cada pessoa, dupla ou grupo havia empregado; nesses momentos de socialização, tanto a pesquisadora como o professor da disciplina buscavam manter-se como "ouvintes", interferindo apenas quando fosse estritamente necessário. Qual a sua opinião sobre essa "metodologia de trabalho" adotada? Como você avalia a atuação da pesquisadora e do professor da disciplina no desenvolvimento das intervenções?

Como você analisa o seu conhecimento sobre divisão em dois momentos distintos: antes e depois das intervenções?

Com as intervenções, você percebeu alguma "transformação" nos conhecimentos que você possuía sobre divisão? Se sim, relate o que você julga ter sido "transformado".

As intervenções permitiram a você conhecer algo inédito a divisão? Se sim, relate sobre os novos conhecimentos adquiridos.