

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

TIAGO BISSI

**ÁLGEBRA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE
ENSINO A PARTIR DA MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO**

Vitória

2016

TIAGO BISSI

**ÁLGEBRA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE
ENSINO A PARTIR DA MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Vitória, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lígia Arantes Sad.

Vitória

2016

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

B623a Bissi, Tiago.

Álgebra e história da matemática : análise de uma proposta de ensino a partir da matemática do antigo Egito / Tiago Bissi. – 2016.

149 f. : il. ; 30 cm

Orientadora: Lúcia Arantes Sad.

Dissertação (mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vitória, 2016.

1. Álgebra - Estudo e ensino. 2. Matemática – Historiografia. 3. Matemática - Estudo e ensino. 3. Didática. I. Sad, Lúcia Arantes. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título.

CDD: 512



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TIAGO BISSI

**ÁLGEBRA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE
ENSINO A PARTIR DA MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 19 de Dezembro de 2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Ligia Arantes Sad

Instituto Federal do Espírito Santo

Orientadora

Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Antonio Donizetti Sgarbi

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Autarquia criada pela Lei nº 11.892 de 29 de Dezembro de 2008

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TIAGO BISSI

BISSI, Tiago; SAD, Ligia Arantes. **Álgebra e história da matemática**: análise de uma proposta de ensino a partir da matemática do antigo Egito. Vitória: Ifes, 2016. (Série Guias Didáticos de Matemática,39).

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovado em 19 de Dezembro de 2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Ligia Arantes Sad
Instituto Federal do Espírito Santo
Orientadora

Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Antonio Donizetti Sgarbi
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Declaro, para fins de pesquisa acadêmica, didática e técnico-científica, que este Trabalho de Conclusão de Curso pode ser parcialmente utilizado, desde que se faça referência à fonte e ao autor.

Vitória, 19 de Dezembro de 2016.



Tiago Bissi

À minha família

AGRADECIMENTOS

Eis que para mim é chegado o momento mais importante: o de agradecer. Nesse processo moroso pelo qual passei, há muito a quem agradecer. Luta contínua, cheia de percalços, ânimos e desânimos, longas viagens e incertezas que pairavam constantemente em meus pensamentos. Portanto, agradeço imensamente

... a Deus, por toda sabedoria e força que me proporcionou no decorrer do curso;

... à minha família, por todo o incentivo dado e pela ajuda no decorrer desses anos. Sem eles nada disso seria possível!

... ao programa de mestrado EDUCIMAT, por proporcionarem um curso de excelência dentro da Educação em Ciências e Matemática, em especial aos professores, pela sua excelência e comprometimento;

... à prefeitura de Colatina/ES por em momento algum terem negado a minha proposta de pesquisa. Em especial à escola “Adwalter Ribeiro Soares”, professores e equipe pedagógica. Obrigado pelo apoio;

... aos colegas da turma IV do EDUCIMAT pelos momentos de apoio, descontração e estudo. Com certeza crescemos e amadurecemos muito juntos;

... A FAPES pela oferta da bolsa de estudos;

... aos professores membros da banca de qualificação e banca de defesa pelas contribuições;

... à minha orientadora por toda sua compreensão, paciência e dedicação no seu ofício de orientar este trabalho. Agradeço imensamente por ter me oportunizado o seu conhecimento.

... a todas as pessoas que no decorrer desses anos me deram palavras de apoio.

A todos vocês o meu muito obrigado!

The History of Mathematics should not form a separate subject of education, but be strictly auxiliary and subordinate to Mathematical teaching.

(Fulvia Furinghetti)

Toda ciência, tomada isoladamente, não significa senão um fragmento do universal movimento rumo ao conhecimento.

(Marc Bloch)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CAMPUS VITÓRIA

Avenida Vitória, 1729 – Bairro Jucutuquara – 29040-780 – Vitória – ES

27 3331-2110

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa é o de analisar contribuições da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra. A ação pedagógica ocorreu em uma escola pública municipal localizada na cidade de Colatina/ES. As práticas investigativas em sala de aula foram realizadas à luz dos pressupostos teóricos socioculturais apontados principalmente por Luis Radford e Iran Abreu Mendes. Fomos guiados pelo seguinte problema de pesquisa: Como a História da Matemática, com ênfase na matemática egípcia, pode contribuir em atividades no ensino e aprendizagem da álgebra escolar? Para tanto, investigou-se duas turmas de nono ano do ensino fundamental, dando enfoque, no ensino de Álgebra, às Equações e Funções. Tal abordagem contemplou a Matemática Egípcia do Papiro Rhind (em especial os problemas 24, 25, 26 e 27). Tratou-se de uma pesquisa de cunho qualitativo do tipo estudo de caso educacional, apoiado em entrevistas, ações pedagógicas, registros em diários de aprendizagem e anotações no diário de bordo. Durante a ação pedagógica realizada na escola, notou-se que grande parte dos alunos tem a Matemática como algo acabado e concluso, para a qual parece inexistir uma sucessão de fatores que a fizeram crescer como uma ciência. A análise das ações pedagógicas orientadas ao ensino de equações e funções indicam que para boa parte dos alunos a História da Matemática mostrou-se propulsora de curiosidades; trouxe significação sociocultural; contribuiu na compreensão da Matemática como um processo histórico; colaborou na resolução de problemas matemáticos com apresentação de multiplicidade de métodos; e forneceu contextos que subsidiaram um aprendizado em álgebra com mais significado enaltecendo a construção do pensamento matemático. Os resultados obtidos apontam a importância de uma Educação Matemática abordada por meio de propostas didáticas com enfoque sociocultural aliado a História da Matemática como um dos fundamentos epistemológicos para uma aproximação entre Matemática, Cultura e História.

Palavras-chave: História da Matemática. Educação Matemática. Ensino de Álgebra. Prática Pedagógica.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CAMPUS VITÓRIA

Avenida Vitória, 1729 – Bairro Jucutuquara – 29040-780 – Vitória – ES

27 3331-2110

ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze contributions of the History of Mathematics in the teaching and learning process of Algebra. The pedagogical action occurred in a municipal public school located in the city of Colatina/ES. The research practices in the classroom were carried out in the light of the socio-cultural theoretical assumptions pointed mainly by Luis Radford and Iran Abreu Mendes. We were guided by the following research problem: How can the History of Mathematics contribute to activities in the teaching of school algebra? For that, two classes of ninth year of elementary school were investigated, focusing, in the teaching of Algebra, the Equations and Functions. Such an approach contemplated the Egyptian Mathematics of the Rhind Papyrus (especially problems 24, 25, 26 and 27). It was a qualitative research of the type of educational case study, supported by interviews, pedagogical actions, records in learning diaries and logbook annotations. During the pedagogical action carried out at the school, it was noticed that most of the students have Mathematics as something finished and concluded, for which there seems to be no succession of factors that made it grow as a science. The analysis of the pedagogical actions oriented to the teaching of equations and functions indicate that for a good part of the students the History of Mathematics has shown to be a propeller of curiosities; Brought sociocultural significance; Contributed to the understanding of Mathematics as a historical process; Collaborated in the resolution of mathematical problems with presentation of multiplicity of methods; And provided contexts that subsidized an algebraic learning with more meaning extolling the construction of mathematical thinking. The results obtained point out the importance of a Mathematics Education addressed through didactic proposals with a sociocultural approach allied to the History of Mathematics as one of the epistemological foundations for an approximation between Mathematics, Culture and History.

Keywords: History of Mathematics. Mathematical Education. Teaching Algebra. Pedagogical Practice.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	19
2.1	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE ÁLGEBRA: UMA COMPREENSÃO HISTORIOGRÁFICA E PERCEPÇÃO DE SIGNIFICADOS ...	19
2.1.1	Os estágios da Notação Algébrica	24
2.2	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, ENSINO DE ÁLGEBRA E SALA DE AULA.....	27
2.3	O PENSAR HISTÓRICO EM SALA DE AULA: RUMO À PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL E POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA	31
2.4	ADAPTAÇÕES PEDAGÓGICAS E UM MODELO DE ATIVIDADE DIDÁTICA PAUTADA NAS RELAÇÕES HISTÓRICAS	37
3	FARAÓS, SACERDOTES E ESCRIBAS: O EGITO ANTIGO E A SUA MATEMÁTICA	41
3.1	O EGITO ANTIGO: DELINEAMENTOS GERAIS	42
3.2	A MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO	45
3.2.1	O Papiro Matemático de Rhind.....	48
3.2.2	O sistema de multiplicação egípcio e interpretações anacrônicas para o Problema 24 do Papiro de Rhind	53
3.2.3	Aspecto Histórico dos Números: a concepção egípcia	59
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	67
5	APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA E ANÁLISE DE INFORMAÇÕES	80
5.1	CARACTERIZAÇÕES DAS AÇÕES PEDAGÓGICAS.....	80
5.1.1	Caracterização da primeira ação pedagógica	80
5.1.2	Caracterização da segunda ação pedagógica	84
5.1.3	Caracterização da terceira ação pedagógica	93
5.1.4	Caracterização da quarta ação pedagógica	93
5.2	ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES.....	94

5.2.1	Análise da primeira ação pedagógica	94
5.2.2	Análise da segunda ação pedagógica	99
5.2.3	Análise da terceira ação pedagógica	102
5.2.4	Análise da quarta ação pedagógica	105
5.3	ANÁLISE DAS ENTREVISTAS COM AS PROFESSORAS	109
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	114
	REFERÊNCIAS	118
	APÊNDICES	122
	APÊNDICE A – Plano de Aula 1	123
	APÊNDICE B – Plano de Aula 2	132
	APÊNDICE C – Plano de Aula 3	141
	APÊNDICE D – Plano de Aula 4	143
	APÊNDICE E – Solicitação de autorização para pesquisa de mestrado	144
	APÊNDICE F – Ofício de Aceite	145
	APÊNDICE G – Carta de apresentação à escola	146
	APÊNDICE H – Termo de consentimento livre e esclarecido	147
	APÊNDICE I – Modelo de Diário de Aprendizagem	148
	APÊNDICE J – Roteiro de entrevista com o professor	149

1 INTRODUÇÃO

Uma coisa é escrever como poeta, e outra como historiador; o poeta pode contar as coisas não como foram, mas como deveriam ser, e o historiador há de escrevê-las, não com deviam ser, mas como foram, sem acrescentar nem tirar à verdade a mínima coisa. (CERVANTES, 1978, p. 325)

O que é a Matemática? De maneira simplista e para o iniciante no estudo, a Matemática pode ser entendida como “[...] a ciência das quantidades e dos espaços” (DAVIS; HERSH, 1981, p. 6, tradução nossa). Segundo Davis e Hersh (1981) essa definição neófito, tem bases históricas, podendo servir para algum entendimento, todavia, é esperado que esta visão seja rompida observando as várias “escolas” que, historicamente contribuíram para o desenvolvimento epistemológico da Matemática. Visões demasiadamente unilaterais escamotem a rede de conhecimento pela qual a Matemática está permeada, e a história dessa ciência em especial, traduz com bastante riqueza essa *rede de conhecimento* enaltecendo os pressupostos teóricos, culturais, sociológicos e filosóficos de um determinado povo.

Mas o que Davis e Hersh (1981), com a sua explanação de “O que é Matemática?”, e Cervantes (1978, p. 325), citado em epígrafe, comungam dos pressupostos que serão aqui apresentados? Convidamos o leitor a ler mais alguns parágrafos, para que em seguida possamos estabelecer uma aproximação entre alguns pensamentos relacionados a tal questionamento.

Durante a minha passagem pelo Mestrado e na conclusão das disciplinas obrigatórias e optativas, pude observar a obsolescência de alguns termos utilizados por mim, bem como de alguns referenciais. Na disciplina optativa de *História e Memórias em Educação em Ciências e Matemática*, ministrada pela professora Dr^a. Lúgia Arantes Sad (Orientadora deste trabalho) e pelo professor Dr. Antonio Donizetti Sgarbi (membro desta banca), tive a oportunidade de estender meus horizontes cognitivos acerca das possibilidades de inserção da História no ensino da Matemática. No segundo semestre de 2015, cursei a disciplina de *História e Filosofia da Matemática*, ministrada pela professora Dr^a. Lúgia Arantes Sad. Sem titubear, considero para a minha formação e linha de pesquisa, como sendo a disciplina mais importante do curso. Suas implicações na escrita deste texto estão de modo latente.

Um dos frutos desse processo de ampliação dos meus horizontes epistemológicos são os questionamentos surgidos. Um deles refere-se à seguinte questão: *Qual a importância de utilizar a HM no Ensino? Sem balbuciar expresso a seguir minhas primeiras reflexões a esse respeito: A Matemática é por eminência uma manifestação cultural, e como tal deve ser compreendida em seu contexto histórico e filosófico. Suas potencialidades repousam na importância de mostrar ao aluno que o pensamento matemático não se sucedeu de modo linear, ele foi descrito mediante múltiplos povos que contribuíram para a consolidação dessa ciência como hoje a conhecemos. Além do mais, apresentar aos alunos fatos históricos, relacionando-os com a cultura, fará com que a sala de aula seja certamente, um espaço contemplativo (e não estático e fechado, pautado unicamente em cálculos e reprodução algorítmica) da Matemática como algo vivo, e indissociável das manifestações humanas. Compreender o algoritmo da multiplicação, por exemplo, em sua formulação contemporânea (estática e acabada) é, certamente um método cômodo, porém, é necessário para nós educadores termos o espírito crítico para questionar: “Este método é único?” “Quais as especificidades que o fizeram perpetuar ao longo dos séculos?” “Quais métodos alternativos poderiam ser explorados?” “Que entendimentos epistemológicos o aluno necessita ter a respeito da multiplicação?” Estes e outros questionamentos quando bem compreendidos, podem enriquecer a prática docente. Cabe ressaltar, que não possuímos a visão ufanista de que a HM no ensino será a transformadora das mazelas pelas quais passam a Educação Básica. Considero-a como parte integrante e importante do processo.*

É importante destacar nesta introdução o que eu, como autor, entendo por HM. Mediante pesquisas, leituras, e de um posicionamento pessoal, notei a existência de *histórias da matemática* praticadas em âmbitos culturais específicos e bem delineados. Podemos estudar a HM sob a ótica dos gregos, árabes, europeus, orientais e etc. Certamente, todos esses povos produziram Matemática e em vários casos, estudaram um mesmo ente matemático. Logo, o que existem são modelos epistemológicos pautados em maneiras de refletir acerca da cultura e da produção de conhecimento que permeou cada sociedade. Assim sendo, é possível enxergar a Matemática como algo que foi sendo construído no decorrer dos séculos, com numerosas colaborações, e que, em momentos oportunos, tornaram-se públicas e se aglutinaram, compondo esta ciência bem fundamentada e extremamente importante.

No meu ponto de vista, considero impossível pensar a história (fazendo analogia à Matemática) como uma reta, uma vez que a história possui vários direcionamentos, âmbitos, filosofias e especificidades que interferem na sua constituição. (MIGUEL; MIORIM, 2008).

Quanto a motivação e justificativa para a escrita desse trabalho destaco as de cunho pessoal e científico. As de cunho *pessoal* se esbarram em minha empatia pela HM e por sempre ter gostado da disciplina História. Quando aluno, sentia-me motivado quando – raramente –, o professor mesmo que de maneira simplista, apresentava alguma curiosidade histórica da Matemática. A partir dessas curiosidades, depois do ingresso na graduação com as duas disciplinas de HM, minha admiração se tornou ainda mais latente. A partir dessas admirações, ainda um pouco ingênuo, busquei pressupostos teóricos que pudessem embasar essas ideias ainda infundadas. Paralelamente, sempre tive na Álgebra (tanto na Álgebra pura: Anéis, Corpos, Grupos, Congruência, ..., quanto na Álgebra escolar) uma grande paixão, via nos meus colegas de classe a dificuldade em resolver a Álgebra, e em meus professores, a dificuldade em ensinar. Logo, a “fórmula” (História da Matemática + Álgebra) soaria como algo perfeitamente arranjado para minha prática acadêmica. É possível embasar a minha justificativa de cunho pessoal, em Lins (1992, p.23) ao afirmar que a “álgebra foi vista, há muito tempo, como uma tarefa difícil, embora a área importante de matemática da escola, e como consequência um grande número de estudos foram realizados do assunto” (tradução nossa). Durante meus anos de docência, pude ver na prática a grande dificuldade dos alunos em lidar com a Álgebra, o que me fez tratar com ainda mais veemência este tema que aqui apresento. Além do mais, a História da Álgebra¹ e seus múltiplos desenvolvimentos muito me encanta.

Foi na leitura de textos que concatenam HM e ensino, que trago aqui a minha motivação, que categorizo como sendo *científica*. Nas leituras em EM percebe-se o constante apelo à utilização de novos métodos para o ensino. Métodos que visem a construção do conhecimento de modo pleno, dando ênfase à descoberta, ao raciocínio e a métodos que coloquem o aluno como um ser pensante. De acordo com Machado e Mendes (2013) a HM desempenha um papel fundamental no ensino e aprendizagem da Matemática. Para os autores

¹ A *História da Álgebra* ilustra com riqueza a não-linearidade da HM. Temos manifestações algébricas há cerca de três milênios antes de Cristo, ou ainda uma escrita algébrica com Diofanto no século III. Podemos considerar Viète no século XVII e vários estudiosos contemporâneos.

[...] a história da matemática apresenta um potencial pedagógico muito grande e, mais especificamente, a possibilidade de trabalharmos os afetos envolvidos no ensino e aprendizagem de uma maneira positiva, podendo colaborar para quebrar o ciclo de exclusão em relação à Matemática escolar que encontramos hoje (MACHADO; MENDES, 2013, p. 24).

Tal rejeição e exclusão pela qual a Matemática passa nos dias de hoje, deve-se, em grande parte, a métodos de ensino inadequados e o isolamento dessa disciplina em relação às outras disciplinas curriculares. De acordo com Imenes (1990, p. 23, *apud*, MACHADO; MENDES, 2013, p. 24)

A Matemática apresentada no ensino de Matemática é *a-histórica*. História é coisa dos homens e, como a Matemática escolar se desenvolve em um ambiente exclusivamente matemático, fechado em si mesmo, onde não entram as coisas dos homens, ela se mostra *a-histórica*, não aparece como construção humana, não é parte de nossa cultura, não é gerada num ambiente sociocultural. (grifo nosso).

Percebemos na citação acima, que esta concepção *a-histórica* da Matemática, negligencia aspectos socioculturais inerentes e importantes a esta disciplina. Radford (2011) defende com intensidade a importância de concebermos a Matemática no seu contexto social, cultural, científico e filosófico, contextos estes delimitados pelas especificidades locais e necessidades momentâneas. As discussões de Radford (2011), numa parte, estão baseadas na teoria por ele criada, chamada de *Teoria da Objetificação*. Em síntese, esta teoria prega que os alunos devem se familiarizar gradativamente com os métodos culturais de reflexão. Métodos tradicionais de ensino, ou que ignorem por completo os aspectos socioculturais, darão ênfase a uma Matemática incólume, sem significado, dando certamente, margem a um ostracismo por parte dos alunos.

Para Mendes (2009b, p. 76)

Pode-se considerar, inicialmente, que o uso da história como um recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino aprendizagem da Matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos.

Segundo o autor, este ensino-aprendizagem estaria pautado na investigação e na busca pelo conhecimento. Mendes (2009b) ainda expõe que muitas modalidades do uso da história no ensino da Matemática vêm sendo apresentadas. O autor considera que “[...] há certa conexão entre elas, visto que a maioria tem sempre o objetivo de subsidiar uma aprendizagem significativa da matemática escolar.” (MENDES, 2009b, p. 79). Defendemos a postura da história centrada na investigação, na busca pelo conhecimento construído ao longo do tempo

– não somente o conhecimento matemático, mas também, o conhecimento relacionado às sociedades humanas –. Tal investigação deve estar pautada na valorização do saber histórico imbuído na ação cognitiva dos alunos, pois,

O estabelecimento de um diálogo entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da Matemática por meio da investigação histórica deve ser priorizado nas atividades de ensino aprendizagem, tendo em vista que o mesmo constitui a base para o uso da história em sala de aula (MENDES, 2009b, p. 81).

Trataremos neste trabalho, em particular, do estudo da Álgebra suas concepções para os discentes e metodologias históricas que permitam ao educador trazer à tona artifícios que possam significar esse assunto. Ter-se-á como fundamentos teóricos principais as ideias de Radford (2011) e Mendes (20006a, 2006b, 2009a, 2009b e 2009c). Numerosos entes históricos podem ser contemplados neste âmbito, como por exemplo a Matemática egípcia, que pode ser convertida numa linguagem algébrica capaz de fazer com que o aluno compreenda a história ² como um espaço propício às manifestações culturais.

Quanto a Álgebra, cerne deste trabalho, Lins (1992) aponta que no aprendizado de Matemática ela ocupa um lugar especial pois é uma ferramenta para a resolução de problemas que necessitam ser modelados mediante situações específicas, e também por ser essencial para a aprendizagem de outras partes das Matemática. “O pensamento algébrico é uma maneira de organizar o mundo, modelando situações e manipulando modelos de uma determinada maneira” (LINS, 1992, p 11, tradução nossa). Para o autor, a utilização da Álgebra manifestada historicamente, está arraigada ao desenvolvimento de intenções peculiares.

Lins (1992, p. 65) atribui ao número uma função importante em correlação com a Álgebra

em diferentes culturas matemáticas, vamos encontrar uma variedade de abordagens para o número, fornecendo uma série de ideias sobre como a concepção de número pode afetar a compreensão da álgebra. É possível também encontrar diferentes formas de caracterizar e organizar a atividade matemática, e, mais uma vez uma série de ideias importância à educação matemática são produzidos. (tradução nossa).

² Apropriar-nos-emos da concepção de que o objeto da história é o *homem*, suas características e peculiaridades. A história deseja capturar o homem e a sua essência enquanto ser dotado de razão e de necessidades. A história “[...] é a ciência das sociedades humanas” (BLOCH, 2001, p. 54). Para Bloch (2001) a história é a ciência dos homens em seu tempo. O historiador, para o citado autor, aparece como o gôro da lenda. Ele fareja a carne humana e sabe que ali está a sua caça.

O autor ainda faz esclarecimentos importantes, destacando que as manifestações algébricas estão estritamente relacionadas com o modo de pensar do homem em seu tempo “O conhecimento algébrico que nós identificamos tem de ser entendido no contexto das culturas onde ele foi criado, ou seja, temos de determinar qual é o significado de que o conhecimento tem dentro dessas culturas”. (LINS, 1992, p. 62, tradução nossa).

Assim percebemos que abordagens algébricas com base em nossa formulação contemporânea, podem não subsidiar um ensino de Matemática centrado na investigação e na busca pelo conhecimento histórico tão importante para esta disciplina.

Com base nestes levantamentos teóricos e em alguns questionamentos pessoais, somos levados a apresentar o nosso problema de pesquisa: *Como a História da Matemática, com ênfase na matemática egípcia, pode contribuir em atividades no ensino e aprendizagem da álgebra escolar?* Tal problema, nos leva a pretensão de alcançar os seguintes objetivos.

Objetivo Geral: *Analisar contribuições da História da Matemática no processo de Ensino e Aprendizagem de Álgebra.* A fim de alcançar o objetivo geral, teremos como base os seguintes objetivos específicos:

OE.1 – Identificar se professores de Matemática da escola envolvida utilizam a História da Matemática em seus Recursos Didáticos (livro, vídeos, etc).

OE.2 – Elaborar uma Proposta Didática, para o ensino de Matemática, articulada com a História da Matemática, em especial com elementos da Matemática egípcia, como recurso didático para o ensino de Álgebra.

OE.3 – Trabalhar em conjunto com alunos e professores a Proposta Didática.

OE.4 – Analisar os dados obtidos junto aos professores e alunos sobre as contribuições da História da Matemática.

Pretende-se verificar o alcance de tais objetivos a partir de uma análise qualitativa, com base em Estudo de Caso Educacional, com foco em uma escola pública municipal da cidade de Colatina/ES. As ações pedagógicas ocorreram em três turmas de 9º Ano, sendo que a aplicação da Proposta Didática – Produto Educacional pretendido na forma de Guia Didático – foi realizada em quatro aulas para cada turma, totalizando doze aulas. Tais ações tiveram como foco o estudo da Álgebra – Equações e Função, dentre outros assuntos subjacentes – em

consonância ao pensamento histórico matemático egípcio, em especial, no estudo dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro Rhind.

O leitor atencioso, certamente lembra e quer respostas à colocação feita no início dessa Introdução. Deixo aqui minha percepção: Cervantes (1978) aponta o ofício do historiador como sendo o de “contar” a história tal como foi (ou tal como pregam as obras científicas). A Matemática, sendo a ciência das quantidades e do espaço (DAVIS; HERSH, 1981) pode ser contada pelo professor, de modo estanque e sem conexões. Para fugir disso, é importante desbravar novos métodos para o ensino de Matemática, ser poeta, não no sentido metafísico, mas sim na busca de perspectivas que possam soar como declamação de versos perfeitamente encaixados, com o intuito de se fazer Matemática em sala de aula de maneira mais significativa.

Com as ideias apontadas nesta introdução, organizou-se a estrutura deste trabalho. No capítulo 2 (*História e Educação Matemática: potencialidades para o ensino de Matemática*), apresentamos uma revisão de literatura, nosso suporte teórico e possibilidades para a sala de aula. No capítulo 3 (*Faraós, sacerdotes e escribas: o Egito Antigo e a sua Matemática*) mostramos delineamentos gerais da História do Egito Antigo, dando ênfase na Matemática praticada, com destaque especial para o Papiro Rhind. Neste capítulo é apresentado o sistema de multiplicação egípcio e uma interpretação anacrônica para o problema 24 do Papiro Rhind (tópico importante para a compreensão das atividades propostas). Por fim, apresentamos aspectos históricos ligados aos números na Matemática e no antigo Egito. O capítulo 4 trata da apresentação da proposta metodológica e o capítulo 5 apresenta a ação pedagógica e as informações analisadas mediante a prática. No último capítulo, apresentamos as considerações finais.

2 HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

A História da Matemática não é apenas uma caixa de tintas com que um pode fazer a imagem da Matemática mais colorida, para capturar o interesse dos estudantes em seus diferentes níveis de ensino, é uma parte da imagem em si (HEIEDE, 1996, p. 241)

Os homens se parecem mais com o seu tempo que com seus pais (Provérbio Árabe)

Partindo da afirmação de Heiede (1996), admitimos a História como uma parte integrante da Matemática. A simbiose existente no binômio História e Matemática, e conseqüentemente, seu ensino, estão concatenadas de tal maneira que é impossível desfazer este elo. Se tentássemos compreender a Matemática sem um fundo histórico, contemplando ambições e filosofias de uma época, haveria uma carência total de sentido. Por exemplo, que sentido daríamos para as demonstrações matemáticas mais antigas serem fundamentadas geometricamente e não algebricamente? Todavia, muitos educadores parecem negligenciar esta tendência em EM, ou achá-la inútil, pois História não é Matemática (MIGUEL, 1997).

Neste sentido, na pretensão de elucidar que “a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época” (D’AMBROSIO, 2009, p. 29-30) apresentaremos neste capítulo alguns trabalhos de relevância acadêmica que contemplam esta temática e que vão ao encontro de nossas perspectivas no âmbito da pesquisa em EM.

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE ÁLGEBRA: UMA COMPREENSÃO HISTORIOGRÁFICA E PERCEPÇÃO DE SIGNIFICADOS

Quando nos dispomos a discutir um objeto matemático (no caso a Álgebra) em razão de sua história, devemos nos despir de qualquer visão positivista (evolucionista linear), ou de uma visão setorial pautada em apenas uma civilização ou cultura. Práticas ligadas à Álgebra

podem ser notadas desde as civilizações do oriente (Egito e Mesopotâmia) até as mais sofisticadas demonstrações matemáticas dos séculos XX e XXI, passando pelos árabes e indianos, por exemplo.

Neste sentido a historiografia³ da ciência como um todo, ganha espaço. De modo mais amplo, a História da Matemática é mesclada à História da Ciência, que por sua vez, é tida como “o estudo das formas de elaboração, transformação e transmissão de conhecimentos sobre a natureza, as técnicas e as sociedades, em diferentes épocas e culturas” (BELTRAN; SAITO; TRINDADE, 2014, p. 15), sendo, portanto, objeto da epistemologia em âmbito sociocultural.

Assim sendo, a historiografia tem incorporado, por essência, a história das narrativas e de seus registros. Quando pensamos em abordagens historiográficas que contemplem o universo particular da HM, estaremos sempre em busca da leitura de fontes que dialoguem com a filosofia que a fundamenta. Pois, como afirma D’Ambrosio

Uma vez identificados os objetos do estudo, a relação de fatos, datas e nomes, dependem de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Essas são as chamadas *fontes históricas*. A interpretação das fontes depende de ideologia, na forma de uma filosofia da história, que é um ingrediente central da historiografia. (D’AMBROSIO, 2004, p. 167, grifo do autor)

Na Matemática, uma grande invenção humana ganhou aos poucos destaque específico e identificador: “a escrita”. As fontes matemáticas que vêm acompanhadas por essa poderosa ferramenta histórica são mais eloquentes. A invenção da escrita, em meados do quarto milênio a. C., impulsionou a Matemática. Os escribas – restrita classe que detinham a arte de grafar – foram os primeiros a adquirir conhecimentos sobre os números; a partir destes registros tornou-se possível perpetuar o conhecimento histórico da Matemática (GARBI, 2010).

No tocante do universo historiográfico da HM e suas implicações com o hoje, o professor canadense Luis Radford (2011, p. 75) aponta alguns problemas historiográficos. Para o autor, muitos livros, destacam narrativas episódicas. Isso nos induz a pensar, numa epistemologia apriorista platônica, que os esforços do passado, tinham como único foco “a formulação conceitual encontrada em nossa moderna Matemática”. O autor completa afirmando que, na

³ “Em termos gerais e simplificados, *História* é o conjunto dos acontecimentos humanos ocorridos no passado, e a *Historiografia* é o conjunto dos registros, interpretações e análises desses conhecimentos” (D’AMBROSIO, 2004, p 166, grifo do autor).

HM, qualquer conceito ou teoria sempre será reescrito, uma vez que as concepções matemáticas refletem ambições culturais contemplativas às suas especificidades. Isolar a Matemática da rede de conhecimentos por ela estabelecida no decorrer dos séculos, seria ignorar o seu caráter múltiplo e reflexivo. Para Mendes (2015, p. 27) as questões respondidas dentro da Matemática nos oportunizam uma constante reinvenção na tentativa de formar “[...] uma onda mais volumosa e com mais força de abrangência que a anterior”, isto é, o conhecimento deve ser refletido, aprimorado e repensado. Devemos considerar, ainda que a Matemática não permaneceu a mesma ao longo dos tempos e contextos socioculturais, cada mudança em seus aspectos mais essenciais a transforma, constantemente, em um corpo organizado e em uma linguagem. No âmbito das sociedades humanas

[...] a busca de respostas a problemas surgidos no contexto de cada sociedade e da cultura originaram as matemáticas, cujas verdades se aperfeiçoam a cada momento em que essas respostas são reavaliadas e interrogadas no decorrer da história, de modo a mostrar que *nada permanece inalterado até o fim*. (MENDES, 2015, p. 84, grifo do autor).

Os registros do passado, nas suas mais diversas formas de representação dialética simbólica ou de escrita (que também tem seu viés simbólico), são fatores convergentes para uma apropriação das “Histórias da Matemática”. É importante enaltecer este múltiplo convívio entre história/historiografia e Matemática, pois, é na confluência destes três elementos que o professor apropriar-se-á de informações e produzirá significados a serem compartilhados em suas aulas, tornando-as um espaço celebrativo entre a Matemática e a sua história. Desse modo, o professor pode contemplar aspectos tão fundamentais e pertinentes para a compreensão de significados matemáticos, e não apenas trabalhar com a história como ornamento, que ora funciona como curiosidade e ora funciona apenas para dizer que “foi tal matemático” que *criou* “tal fórmula”⁴.

Logo, consideramos pertinente que o professor tenha conhecimento de tais abordagens historiográficas, não necessariamente por fontes primárias (o que seria algo praticamente inacessível e inviável, haja vista a pouca quantidade de material que dispomos), mas, na consulta inicial aos textos mais clássicos em HM, a fim de que ele possa a partir de uma postura crítica e reflexiva, colher as informações fidedignas, e, se for o caso, conduzir à busca de aprofundamentos. Todavia, este senso crítico pode ser precário se em sua formação

⁴ Assuntos como esse na História da Matemática são de grande densidade, e não serão explorados neste trabalho. Apenas para exemplificar podemos citar a Fórmula de Bháskara, que não foi “descoberta” por esse único matemático. De acordo com Miguel e Miorim (2008) esta é uma nomenclatura utilizada somente no Brasil.

acadêmica inicial a ênfase na HM foi pouca, dando a essa disciplina um caráter secundário ou desimportante. Ou ainda pior, pode estar ausente da sua formação (VALDÉS, 2006).

No que se reporta à construção dos significados em Álgebra, compreensões históricas e historiográficas podem estar concatenadas de tal maneira que o pesquisador possa ver nelas terrenos fecundos para a apropriação de significados algébricos. Para Lins e Gimenez (1997) a Álgebra, assim como a Geometria e a Aritmética, devem ser vistos como conteúdos não pautados em sua própria existência, mas sim, como instrumentos que participem da “organização da atividade humana” (p. 28). Para os autores, não existe um consenso acerca do que seria pensar algebricamente. O que há de fato é um certo consenso sobre as “coisas” da Álgebra – “equações, cálculo literal, funções, ...” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 89). O pensar algébrico, como apontam os autores, está muito mais imbricado no pensamento daquele que raciocina do que a Matemática pode apontar. A Álgebra não pode ser apontada como a Matemática das letras, isso seria reduzi-la a uma parcela pífia de sua amplitude. Pensar algebricamente é utilizar modelos que possam resultar em significados matemáticos, sejam estes “numéricos”, “literais” ou “numérico-literais”. Devemos, portanto, conceber a linguagem algébrica como algo que emergiu de ferramentas técnicas (comércio, transações financeiras,...) e que posteriormente, desenvolveu-se de maneira cultural, a ser considerado um objeto matemático como conhecemos hoje, tendo diversas aplicações.

Lins e Gimenez (1997, p. 90-91) apontam, subsídios históricos para endossar a tese de que atividade algébrica sempre esteve de certa maneira arraigada no pensamento matemático, nas maneiras de calcular e se apropriar dela. Nessa abordagem historiográfica do pensamento, pensar algebricamente, implicaria não somente em utilizar letras (como veremos na subseção 2.1.1, de maneira sucinta a representação do pensamento algébrico) mas sim, em trazer abordagens eloquentes para resolver problemas específicos, onde o raciocínio abstrato estaria intrínseco no pensamento nestes modos de caminhar com a Matemática, seguindo um percurso (o que os autores chamam de *linha*).

De forma bastante breve, essa linha seria a seguinte: começamos com os babilônios e os egípcios (cerca de 1700 a. C), que desenvolveram regras eficientes para cálculos vários e para a resolução de problemas, *embora não tenham desenvolvido notação alguma* para apresentar essas regras de forma geral. Dali, salta-se quase 2 mil anos, direto para o grego Diofanto (por volta do ano 250); sua grande criação é vista como sendo a introdução de um sinal especial para a incógnita [...] O próximo salto é de “apenas” 1400 anos, menor do que o anterior, mas, em muitos sentidos, bastante mais radical: vamos direto até o francês Vieta (cerca de 1550), o primeiro a sistematizar o uso de letras para representar também os dados

(valores desconhecidos) em uma expressão algébrica; para os que seguem essa linha de pensamento, o que Vieta introduz é um cálculo com letras (que representam quantidades ou grandezas geométricas), cálculo esse que tem suas regras próprias [...] O próximo – e supostamente último – passo, seria a gênese da noção de estrutura algébrica, primeiro com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829), de forma “implícita”, até chegarmos a Bourbaki (a partir de 1940), e aí entramos no domínio próprio do “cálculo com letras”, mas num sentido bem mais sofisticado. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 91, grifo nosso).

Na concepção de Bourbaki⁵ a Álgebra passaria a ter uma sintaxe própria. Ou seja, diferentemente do ocorrido nas civilizações orientais, o cálculo com letras assumiria uma função abstrata. As letras, ali representadas, não teriam *links* com o pensamento numérico, sendo recursos estilísticos para uma escrita, enaltecendo a sintaxe, regras próprias e um sistema particular de operações.

Lins e Gimenez (1997) apontam para o erro de uma quase “universalização” de que a atividade algébrica seria apenas um cálculo literal. Os autores exemplificam o caso das equações, e evidenciam que não necessariamente, elas necessitam serem resolvidas por métodos algébricos (os egípcios as resolviam sem esse recurso). Todavia ratificam que o pensar algébrico aparece de maneira simbiótica no pensamento. A questão dessa quase “universalização”, endossa Radford (2011, p. 17), aparece nos cursos de formação de professores “para eles [os professores] a Álgebra sem os símbolos simplesmente não existe”.

Em síntese, apropriar-nos-emos da simplificação proposta por Lins e Gimenez (1997) de que “A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 137). Desta forma, o pensar algébrico converge para práticas matemáticas na busca de soluções, para quantidades, que ora podem e ora não podem ser generalizadas. Não negligenciamos aqui, de maneira alguma, a importância da Álgebra Pura para a construção de conceitos matemáticos, no entanto, queremos ampliar essa visão, que parece ser o maior engodo das práticas educativas atuais, e mostrar que a Álgebra pode produzir um recorte do mundo que nos daria um certo significado.

Em particular na Álgebra, a formulação contemporânea para o ensino dá ênfase exacerbada ao simbolismo. A Álgebra fica reduzida apenas a um domínio simbólico, no “adestramento” de

⁵ Nome escolhido por um grupo de matemáticos franceses, do século XX (aproximadamente 1940). O trabalho deste grupo foi, em especial, na base de estruturas axiomáticas para a Matemática. (ROQUE, 2012)

uma linguagem, até que os alunos se tornem competentes em seu domínio. ‘Historicamente, entretanto, o ‘simbolismo’ (em seu sentido moderno, aquele que encontramos nos livros didáticos atuais) só se tornou a força motriz do desenvolvimento algébrico no período da Renascença’’. (RADFORD, 2011, p. 16-17)

Lins e Gimenez (1997) apontam que é necessário investigar os significados produzidos no interior de uma atividade algébrica. Neste sentido, elencam os termos: conhecimento, crença-afirmação, justificações e núcleos. No conhecimento produzido a crença-afirmação corresponde ao novo e a justificção corresponde ao que é dado. As justificções estabelecem vínculos com crenças-afirmações e núcleos. Os núcleos são o conjunto de objetos pré-estabelecidos que pretendem dar significado ao que está sendo produzido – diagramas, desenhos, balanças, axiomas e etc. É na relação objeto matemático e núcleo que haverá a produção de significados.

No contexto de relações cognitivas e de fundamentação da Álgebra, Radford (2011, p. 19) faz uma afirmação de fundamental eloquência para este texto. Segundo o autor “a estrutura cognitiva do pensamento matemático, em geral – e do *pensamento algébrico*, em particular – tem que ser esmiuçada, em seu ambiente social e intelectual e não pode ser verdadeiramente compreendida exceto através da fusão de fatores cognitivos e sociais’’. (grifo nosso)

É nesta percepção de pensamento, que delineamos nossa prática tendo nos *núcleos* relações estabelecidas com as formas de pensar e agir matematicamente.

Vejamos agora, de modo a situar o leitor nas discussões referentes ao simbolismo algébrico, um breve resumo acerca desse tema.

2.1.1 Os estágios da Notação Algébrica

A depender dos povos e de suas manipulações com a Matemática, as notações divergiam. A *nostros olhos* elas podem parecer mais *simples* ou mais *complexas*. Não devemos julgar um tipo de notação afirmando ser melhor ou pior do que outra; o conceito de evolução em Matemática pode ser capcioso, uma vez que lidamos com culturas, que a sua maneira, desenvolveram suas técnicas julgadas adequadas, não sendo uma melhor do que a outra. São

apenas modos distintos de se representar a Matemática. O nosso simbolismo algébrico, certamente, deve muito ao que foi desenvolvido no decorrer dos séculos.

Antes de apresentar os estágios da notação algébrica devemos ter claro que o simbolismo algébrico “é uma forma semiótica de refletir sobre o mundo, uma maneira que se tornou imaginável no contexto de um mundo” (RADFORD, 2011, p. 197). Devemos levar em consideração a linguagem matemática e toda a sua *morfologia* (estudo da formação e estrutura das palavras – na linguagem matemática os símbolos podem substituir palavras) e *sintaxe* (estudo da disposição lógica das palavras nas frases – na linguagem matemática, as frases podem ser construídas com base em palavras e por símbolos matemáticos). É a partir delas – *morfologia* e *sintaxe* – que se torna possível a comunicação com eficiência, entendendo as mensagens representadas pelo simbolismo. (MORAIS FILHO, 2012). É importante destacar ainda, que

A *linguagem matemática* consiste da língua materna e da *linguagem simbólica*, que usa símbolos matemáticos. Na linguagem matemática, a língua materna e a linguagem simbólica interagem para comunicar as mensagens. Várias ciências também usam símbolos, mas, talvez, nenhuma a faça com tanta frequência quanto a Matemática. (MORAIS FILHO, 2012, p. 1-2, grifo do autor).

Notamos que a linguagem matemática, construída e adaptada mediante os séculos, serve como ancoragem para a compreensão de diversas abordagens. A escrita algébrica preza pela precisão e economia de tempo.

Para Heath (1964) é possível distinguir três estágios históricos do desenvolvimento da Álgebra.⁶

Primeiro Estágio: Álgebra Retórica — O que marca esta fase é “a absoluta ausência de todos os símbolos; a totalidade do cálculo é exercida por meio de expressões com sentido completo, formando uma escrita lógica” (HEATH, 1964, p. 49, tradução nossa). Exemplo: os egípcios, mesopotâmicos, árabes. Todas as suas soluções eram dadas por palavras que expressavam um sentido completo. Vejamos um exemplo da Matemática árabe de Al-Khwarismi para resolver

⁶ Defendendo o nosso parecer sociocultural, devemos ter parcimônia ao tratar tão enfaticamente estas “etapas” ou “estágios” que, como aponta o texto, não se sucederam. “A álgebra sincopada não foi um estágio intermediário de maturação no qual o conhecimento tirou uma espécie de descanso em seu caminhar em direção ao simbolismo. Ao invés disso, foi uma mera estratégia técnica imposta pelas limitações da escrita e pela falta da imprensa em tempos passados impuseram aos diligentes escribas que tinham que copiar os manuscritos à mão.” (RADFORD, 2011, p. 77).

uma equação do tipo $x^2 + 10x = 39$ (Em nossa notação: $ax^2 + bx = c$). Al-Khwarismi chamava, o que para nós é hoje o termo independente c de *Adad*, a quantidade desconhecida, b , de *jidhr* e o quadrado da quantidade desconhecida, a , de *Mal*. E para este caso específico, ele com a sua retórica, enunciava a solução: “Tome a metade da quantidade de *jidhr* (que é 5); multiplique essa quantidade por si mesma ($5^2 = 25$); Some no resultado os *Adad* ($25 + 39 = 64$); Extraia a raiz quadrada do resultado (obtemos 8); Subtraia desse resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução ($8 - 5 = 3$). Podemos obter uma generalização matemática para este fato, que corresponde aos mesmos procedimentos enunciados por Al-Khwarismi:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}. \text{ Procedimentos retóricos como esses são comuns na HM, e enunciam soluções}$$

que perduram até os dias de hoje. A fórmula resolutive para Equação de Segundo Grau remete, em seus primórdios, à retórica.

Segundo Estágio: Álgebra Sincopada — Caracteriza-se por ser uma fase também retórica, todavia, há a presença de alguns símbolos, que na verdade, funcionam como abreviações. Um exemplo é Diofanto que usava algumas abreviações para os seus tratados de Matemática. Ao que tudo indica essa foi a primeira ocorrência de notação simbólica que caracteriza nossa Álgebra (ROQUE, 2012). O método de abreviação representava a palavra usada para designar certas quantidades por sua primeira ou última letra, de acordo com o alfabeto grego. Vejamos:

ζ - Última letra do da palavra *arithmos*, representava a quantidade desconhecida (número incógnito);

Δ^y - Primeiras letras de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida;

K^y - Primeiras letras de *kybos*, o cubo;

$\Delta^y \Delta$ - o quadrado-quadrado, a quarta potência;

ΔK^y - o quadrado-cubo, quinta potência;

$K^y K$ - o cubo-cubo, sexta potência.

Não há sinais especiais para a multiplicação e divisão e a adição é indicada por justaposição; logo $2x^2 + 3x + 4$, era escrito da seguinte maneira: $\Delta^y \beta \zeta \gamma \delta$. Os números eram representados por letras do alfabeto grego ($\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $\delta = 4, \dots$). Lintz (2007) enuncia outras simbologias como as frações, subtrações e etc. Foi desta maneira que a Álgebra até então retórica se tornou sincopada.

Terceiro Estágio — Álgebra Simbólica: “utiliza um sistema completo de notação” (HEATH, 1964, p. 50, tradução nossa). Neste estágio é possível encontrar uma solução para uma equação sem usar uma única palavra. Os europeus a partir da metade do século XVII em diante, que foram os primeiros a usar formas simbólicas de Álgebra. A fase simbólica tem início “com os trabalhos de François Viète (1540-1603), que em 1591 introduziu a notação algébrica nos estudos de Geometria e sistematizou a utilização de sinais e operações” (BRANDEMBERG, 2009, p. 10).

Feitos esses breves comentários, passamos agora às implicações pedagógicas da História da Matemática em sala de aula, com particular interesse na Álgebra.

2.2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, ENSINO DE ÁLGEBRA E SALA DE AULA

A História da Álgebra se constitui a meu ver, como um dos terrenos mais fascinantes da HM. Nele, o professor pode explorar com vigor, muitas temáticas que vão ao encontro de perspectivas socioculturais, como a defendida por Radford (2011), que delineia as suas práticas com base no pensamento histórico-cultural de Vygotsky e da epistemologia, enaltecendo o princípio da alteridade. Neste sentido, é importante citar algumas produções científicas que corroborem a estas perspectivas.

Roque (2012) em sua dissertação de mestrado contemplou a HM em atividades didáticas para alunos do 7º ano para o conteúdo de Números Inteiros, tendo como objetivo geral identificar as potencialidades pedagógicas da HM que se tornaram mais evidentes em uma situação real em sala de aula. A autora desenvolveu atividades e uma observação participante que durou três meses. Utilizou como referencial teórico Miguel e Miorim, Mendes, Miguel, Vianna, Tzanakis, Katz, Silva, Fauvel, dentre outros. Para a suas análises ela coletou fala dos alunos mediante entrevistas e vídeos. Em suas considerações a autora escreveu que a HM funcionou como uma fonte de motivação, entendimento da natureza matemática, desmistificação da matemática como uma ciência alienada, bem como, mobilizou os alunos na busca do conhecimento por ser algo antes não explorado por eles.

Aliadas às considerações de Roque (2012) cabe evocar Jankvist (2009). O autor afirma que a história funciona também como uma motivação, ajudando a manter o interesse e o entusiasmo

e “dá a matemática uma perspectiva mais humana, e talvez menos assustadora. As incertezas e erros dos matemáticos do passado estarão presentes para que os alunos observem” (JANKVIST, 2009, p. 237, tradução nossa).

Sad (2013) faz referência à HM como uma aliada para a prática do professor de Matemática. Em seu trabalho descreve dois episódios onde a HM comparece como fator preponderante nas aulas de alguns professores⁷. Na primeira atividade relatada que o jogo Sudoku foi o objeto suscitador, responsável pela ligação imediata entre História e Matemática. Na segunda atividade narra uma experiência em um sétimo ano no estudo de equações e da importância do sinal de igualdade. Neste âmbito foi explorada a importância dos árabes para a consolidação da Álgebra em diversas atividades. Nas suas considerações a autora expõe que

[...] o ensino e aprendizagem envolvendo a utilização da história da matemática pode contribuir para desenvolver a habilidade de orientar as práticas, no sentido de encontrar um caminho em meio ao ir e vir dialético das mudanças temporais. Um caminho penetrado pela riqueza dos múltiplos rastros culturais históricos, que requerem mais que um conhecimento do passado, pois, fomentam um processo de mudança na consciência histórica em suas variadas dimensões (sociológica, cultural, epistemológica, filosófica, etc) (SAD, 2013, p. 11).

Diante das considerações da autora percebemos o quão importante podem ser simples atividades no contexto da EM. O ir e vir dialético, se metaforizado na concepção filosófica platônica, será tido como discussões de teses que se contrapõem e que vão se depurando para chegar numa resposta mais “perfeita” possível (MENEGETTI, 2010). Esses contrapontos são de grande riqueza para discussões em sala de aula, mostrando que a Matemática, como ciência, é algo dinâmico, rico, plural, cuja elaboração é não estática. Diante disto a autora propõe a refletir sobre como e porque utilizar a HM em sala de aula. A esse respeito, também evocamos Jankvist (2009) para suscitar outros esclarecimentos.

Inicialmente, Jankvist (2009) aponta que a HM serviria como uma tomada de decisão, por parte do professor, como uma maneira de apresentar um assunto. O autor elenca alguns “porquês” e “como” utilizar a HM. Os porquês, seriam, de maneira sucinta: a HM é um potencializador do ensino da Matemática, da natureza da Matemática e da atividade matemática (a Matemática como algo humano); a HM provê uma apresentação menos assustadora e mais afetiva da matemática e a valorização da matemática como uma conquista/esforço cultural. E como utilizar? Jankvist faz alguns apontamentos: aprender temas

⁷ Tais professores foram seus orientandos de Mestrado.

matemáticos seguindo uma abordagem diretamente ligada à sua história e no desenvolvimento de uma consciência mais profunda, tanto de si mesmo e do contexto social, como de contextos culturais em que a Matemática foi se desenvolvendo. Observamos que pensamentos convergentes ao de Jankvist (2011) são encontrados em D'Ambrosio (1999) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

Conforme percebemos, esta ancoragem teórica apresentada por Jankvist (2009) e que dialoga com os pressupostos teóricos de autores brasileiros, nos encoraja ainda mais, a não somente apreciar a HM como uma prática esporádica, mas que tenha nas práticas do professor de Matemática, objetivos bem definidos e uma metodologia delineada, que possa fazer com que os alunos considerem a Matemática como algo humano e envolvente, não como um corpo de saberes hermeticamente fechado e atemporal. Logo é “importante que professores realizem mais experiências com a utilização da história da matemática, mesmo que em dosagem menores, em momentos julgados propícios” (SAD, 2013, p. 12). Desta maneira, como expõe a autora, ele terá subsídios para enriquecer a sua prática docente e, conjuntamente, a formação matemática dos educandos.

Machado (2011) discorreu, em sua dissertação de mestrado, acerca do uso de vídeo-aulas de HM para alunos do ensino fundamental e médio, o objetivo de sua dissertação foi “investigar as possibilidades didáticas do uso de vídeo-aulas baseadas em informações históricas acerca do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática” (MACHADO, 2011, p. 17). Ele utilizou tecnologias educacionais e a HM. Teve como suporte teórico José Manuel Moran, Mendes e Fossa, Borba e Penteadó, Fauvel, Radford, entre outros. Em sua pesquisa concluiu que a utilização de vídeo-aulas feitas por ele mesmo “pode contribuir para uma aula mais eficaz e prazerosa para o aluno” (MACHADO, 2011, p. 124). Para o autor é viável a elaboração de vídeo-aulas que contemplem a HM sobre vários assuntos específicos da matemática, de modo a possibilitar maiores esclarecimentos aos alunos no que se refere ao desenvolvimento histórico-epistemológico.

Machado e Mendes (2013) consideram que a HM possibilita que os alunos não vejam a Matemática como algo pré-fabricado, pronto, ou seja, “eles [os alunos] podem ver que a matemática está sempre em uma constante e crescente mudança no seu corpo de conhecimentos” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 25). Apresentar esse corpo de conhecimentos em constante mudança para os alunos é evidenciar também que a Matemática

passou por períodos de incertezas e dúvidas, tentativas e erros. O currículo, por vezes imposto a nós professores, pode preconizar este aspecto (de algo pronto e acabado) e quando transposto didaticamente de uma maneira inadequada (hermética, sem alguma analogia com o espaço e tempo) pode se mostrar insignificante e enfadonha para os alunos.

Costa (2013) na sua dissertação de mestrado, contemplou a HM e suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da disciplina de Desenho Geométrico para alunos do Ensino Fundamental (8º e 9º anos). O autor teve como objetivo principal “levantar algumas possíveis potencialidades pedagógicas que a utilização da HM pode trazer para o ensino da disciplina Desenho Geométrico” (COSTA, 2013, p. 21). A HM como recurso metodológico, apareceu nas ações pedagógicas no modo de histórias e curiosidades apresentadas como situações detonadoras para o ensino de algum assunto relacionado ao Desenho Geométrico. Nas suas considerações finais, o autor apontou que a sua pesquisa contribuiu para a elaboração de uma teoria emergente, denominada por ele de “Potencializando o Ensino e a Aprendizagem do Desenho Geométrico por meio da HM”. O resultado da pesquisa feita por Costa (2013) permitiu verificar a existência de oito potencialidades pedagógicas relacionadas com a HM e o ensino e aprendizagem do Desenho Geométrico.

Assim sendo percebemos várias maneiras de utilizar a HM na sala de aula. Todas essas perspectivas tendem para um mesmo propósito: o de tornar as aulas de Matemática um espaço rico, enaltecendo o fazer matemático como algo importante para o desenvolvimento cultural e científico dos alunos.

Por fim, achamos pertinente o que afirma Panasuk e Horton (2013) que a HM serve para “proporcionar condições para a obtenção de uma experiência rica e compreensão do seu desenvolvimento e inter-relações” (p.37, tradução nossa). Percebemos a questão importante da integração dos conhecimentos e de como eles podem implicar diretamente no ensino com consequência na aprendizagem. Para os citados autores, esse total isolamento da história empobrece o aprendizado da Matemática e priva o aluno de conhecer as transformações culturais ocorridas com a aprendizagem humana dessa ciência durante séculos de existência.

Na próxima seção faremos algumas reflexões sobre os marcos teóricos que convergem para o nosso modo de pensar no trinômio História-Matemática-Educação Matemática.

2.3 O PENSAR HISTÓRICO EM SALA DE AULA: RUMO À PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL E POTENCIALIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Como proceder em sala de aula de maneira que abordagens históricas tenham significado? É essa pergunta, dentre tantas outras inquietações no tocante da História na EM, que pretendemos trazer alguns esclarecimentos, que ora enaltecem perspectivas voltadas para o pensar do autor, e ora se imbricam com perspectivas teóricas que são convergentes para o nosso pensar enquanto professores de Matemática.

De fato, o que não queremos é impor algo, mas sim, suscitar discussões relevantes e que possam agregar no fazer Matemática em sala de aula, com pensamentos ligados à HM.

Antes, porém, de apresentarmos nossos argumentos teóricos e reflexivos a respeito da utilização da História nas aulas de Matemática, vejamos, apoiados em Sad e Silva (2008), alguns diferentes tipos de investigação em História da Matemática.

1. *Investigação sobre a vida de matemáticos ou educadores.* Diz respeito a busca de informações biográficas e de conquistas de alguns nomes conhecidos, como Malba Tahan, Carl Friedrich Gauss, Bento de Jesus Caraça, dentre outros. Esta investigação está presente em alguns livros didáticos;
2. *Investigação acerca de alguma evolução ou teoria.* Exemplos: teoria dos grupos, derivadas, conceito de convergência. Tais aspectos estão presentes em livros didáticos e de História da Matemática;
3. *Investigação sobre uma área do conhecimento.* Exemplo: Álgebra, Geometria, Lógica.
4. *Investigação sobre instituições.* Exemplo: Escola Politécnica de São Paulo, Colégio Pedro II. Essas abordagens costumam evidenciar também a história na Educação Matemática;
5. *Investigação sobre o contexto cultural.* Exemplo: Contexto cultural da criação do cálculo diferencial e integral, o contexto cultural da Matemática no Brasil. Tais práticas estão correlacionadas à concepção sociocultural, que será descrita nos parágrafos seguintes;

6. *Investigação sobre uma época determinada.* A Matemática no Renascimento, na Idade Média, e etc. Essa investigação aborda aspectos setoriais da história e as suas diversas manifestações com as áreas de conhecimento da Matemática;
7. *Investigação sobre um grupo específico.* Exemplo: Matemática e mulheres, os matemáticos de Göttingen.
8. *Investigação sobre Matemática e outras áreas do conhecimento.* Exemplo: Matemática e música, arte;
9. *Investigações sobre as aplicações da História da Matemática.* Exemplo: Seu uso em sala de aula.

Muitas outras categorias de investigações poderiam ser elaboradas (Investigação sobre livros didáticos, investigação sobre o desenvolvimento de produções sobre a História da Matemática, ...), cabe a nós professores, destacarmos aquela investigação necessária para o nosso fazer docente. Podemos abstrair em nossas práticas educativas um pouco de cada uma dessas nove investigações, porém, a investigação 9 – *Investigações sobre as aplicações da História da Matemática* – nos possibilita imergir numa atitude reflexiva quanto a importância dos conteúdos históricos em sala de aula.

De acordo com Miguel e Miorim (2008) a utilização da história no ensino da Matemática é algo relativamente novo no campo da EM. Muitos autores defendem o seu uso e incorporação em sala de aula, afirmando que ela pode agregar significados à Matemática, tirando essa visão estática e unilateral da disciplina.

Para Miguel e Miorim é possível buscar na HM apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levam a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias, dentre outros tantos benefícios que são citados no decorrer da obra.

Pensar a HM em sala de aula é, segundo Radford (2011), pensar esta disciplina numa rede de conhecimentos que expande um ou outro assunto, mas que ganha uma dimensão por eminência *cultural*. Algumas abordagens historiográficas podem escamotear esta concepção,

contudo, o pensamento matemático, inclusive o algébrico (foco desta pesquisa), emerge de práticas culturais que ganham força no pensar e agir mediante especificidades culturais e factuais com base no necessário para uma determinada época.⁸ (MIGUEL; MIORIM, 2008)

Radford (2011) embasa a teoria da objetificação do conhecimento, que tem como objetivo principal a reflexão das ações matemáticas a partir de manifestações culturais. Tal pensamento de Radford (2011) vai ao encontro do apresentado por Miguel e Miorim (2008).

Nesta teoria [da objetificação], o problema da aprendizagem é formulado de modo a evitar visões racionalistas ou individualistas da cognição e interação social. A teoria da objetificação do conhecimento, na verdade, postula o problema da aprendizagem como um processo social por meio do qual os alunos se tornam progressivamente familiarizados com as formas culturais de reflexão (RADFORD, 2011, p. 311).

É nesta *familiarização com as formas culturais de reflexão* que queremos embasar, em parte, nossas discussões. Observar as formas de refletir acerca do pensamento algébrico e da Matemática no seu percurso histórico é não delinear-la a algo pronto, mas sim, que foi sendo construída mediante especificidades. As formas culturais de manifestação, quando adaptadas pedagogicamente em sala de aula ganham força, mostrando a Matemática como algo vivo e por eminência humano.

A teoria da objetificação é uma teoria de ensino-aprendizagem, onde o conceito de aprendizagem é fundamental. Assim, para Radford (2011) o pensamento deve ser visto entrelaçado, uma relação direta com a cultura. Desta maneira, é necessário ao professor fornecer subsídios para a reflexão da ação cultural na Matemática. O professor, para Radford (2011, p. 314) “tem de incentivar e destacar o tipo de raciocínio e os métodos valorizados pela comunidade dos matemáticos”.

Neste aspecto, Mendes (2009a) coloca a HM como um fator preponderante e de fundamental eloquência para os ensinamentos do professor, e dá fundamentação a uma percepção convergente à objetificação proposta por Radford (2011). No decorrer da obra, Mendes (2009a) afirma que o uso da história como um recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da Matemática que busque dar uma

⁸ Devemos nos abster da concepção Evolucionista Linear (Positivista), em que existe um “progresso” na Matemática. Fazendo uma analogia, nesta perspectiva, parece haver uma inclusão de conjuntos (tais conjuntos seriam as “épocas” de um determinado pensamento, povo), onde o primeiro seria “menor” inclusive com menor valor na comunidade científica, o que de fato não ocorre e não deve prevalecer em nossas concepções.

ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, é possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esse modo de conceber o ensino da Matemática pode constituir-se em um dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de Matemática.

Mendes (2009a) contempla que a percepção sociocultural inerente à Matemática é potencializada com o recurso da história. Desta maneira, artefatos e mentefatos são mais bem compreendidos e concebidos como um movimento interno da Matemática, enaltecendo essa ciência como algo dinâmico. Compreender essa ciência na sua epistemologia se faz necessário. Todavia, se esta compreensão não for possível, é necessário que o Educador Matemático faça reflexões, ainda que incipientes, da HM, pois, ela coloca a Matemática como algo humano e envolvente, além de fornecer contextos internos e problemas históricos que podem ser trabalhados no ensino da Matemática. Mendes (2009a, p. 91) afirma que

A viabilidade de uso pedagógico das informações históricas baseia-se em um ensino de Matemática centrado na investigação; o que conduz o professor e o aluno à compreensão do movimento cognitivo estabelecido pela espécie humana no seu contexto sócio-cultural e histórico, na busca de respostas às questões ligadas ao campo da matemática como uma das formas de explicar e compreender os fenômenos na natureza e da cultura.

Desta maneira, o pensamento se tornaria uma reflexão, um movimento dialético entre a realidade histórica e o indivíduo que a retrata. “Uma das funções da cultura é sugerir modos de perceber a realidade e seus fenômenos para os alunos” (RADFORD, 2011, p. 317). Para o autor a dimensão antropológica do pensamento depende do que ele chama de *superestruturas simbólicas* (ou sistemas semióticos de significação cultural). Estas superestruturas, na dimensão antropológica, incluem todas as concepções culturais que circundam os objetos matemáticos bem como os padrões sociais e de produção do significado. Estas superestruturas permitem identificar modos ou problemas interessantes, assim como métodos, raciocínio e outros argumentos que sejam culturalmente questionáveis para a sala de aula e o aprendizado em matemática. Radford (2011, p. 318-319) exemplifica os sistemas semióticos de significação cultural da seguinte maneira:

A diferença entre o pensamento de um escriba da Babilônia e o de um geômetra grego não pode ser reduzida apenas aos tipos de problemas com que se ocuparam, respectivamente, ou aos artefatos que eles usaram para pensar matematicamente. A diferença entre seus modos de pensar não pode ser reduzida ao fato de que o escriba da Babilônia estava refletindo sobre um contexto atrelado à administração política e econômica, enquanto o

geômetra grego estava pensando dentro de um contexto aristocrático e filosófico. *A diferença entre o pensamento do matemático babilônico e o do grego tem a ver com o fato de cada uma dessas formas de pensar era fundamentada em uma superestrutura simbólica particular* (grifo nosso).

Tal afirmação nos leva a crer numa *episteme* relacionada ao modo de ver e observar os objetos, em suas dimensões políticas, filosóficas e até mesmo pessoais. Tudo o que ocorria matematicamente, por detrás das epistemologias, estava emoldurado por uma percepção cultural de mundo, envolvido por especificidades que delinearão a maneira de se fazer Matemática.

Para Mendes (2009a) a viabilidade do uso pedagógico das informações históricas baseia-se em um ensino de Matemática centrado na investigação. Isto direciona o professor e o aluno à compreensão do movimento cognitivo estabelecido pela espécie humana com base no contexto sociocultural e histórico.

Tomadas as considerações, Radford (2011, p. 8) tem a aprendizagem como a tomada de “um processo cultural e histórico no qual saber e estar sejam mutuamente constitutivos e conduzam a uma concepção não-utilitarista e não-instrumentalista da sala de aula e da educação”.

Além de tecer informações úteis à construção do conhecimento com bases epistemológicas fundamentadas na objetivação, Radford (2011) enfatiza o papel da HM na formação do professor. Assim sendo, o autor usa de parcimônia para afirmar que o conteúdo matemático ensinado, na maioria das vezes, decorre da *formulação matemática contemporânea* do conteúdo. Todavia cabe ressaltar, que tal formulação é resultado de um longo processo de mudança. “A *formulação contemporânea* é o resultado de um longo processo de mudanças e transformações conceituais e não necessariamente é o melhor ponto de partida para os alunos” (RADFORD, 2011, p. 16). Entretanto, a *formulação contemporânea* parece ser uma amarra para o ensino da Matemática, induzindo a práticas obsoletas. É deste ponto de vista que corroboramos: o de uma Matemática que emerge de situações humanas, não necessariamente de práticas cotidianas, mas sim de inquietações que a fizeram consolidar como uma ciência presente do nosso mundo de hoje.

Mendes (2009b) contempla que o recurso à HM fornece ao educando práticas exploratórias que enaltecem a Matemática como algo intrinsecamente ligado às manifestações culturais e que, compreender esta cultura, é compreender a Matemática como algo proveniente de manifestações humanísticas. Assim sendo, o educador deve se apropriar disso para elencar fatos coerentes com os objetivos a serem atingidos em uma aula, a fim de que esta contextualização⁹ forneça subsídios para uma localização do aluno perante o que é a Matemática.

Isso fica evidente ao observar os métodos de Álgebra medieval italiana com os mestres do ábaco. O mestre do Ábaco era, acima de tudo, um indivíduo muito prático, não corroborava de perspectivas filosóficas ou mesmos humanísticas. Ele estava fadado a fazer contas. A sua álgebra correspondia não somente a atividades práticas, mas também a pensamentos abstratos e amplamente utilizados em aplicações comerciais emergentes.

A compreensão cultural da Matemática nos direciona para práticas de organização da investigação científica e mostra

O tipo de argumentos que serão socialmente aceitos, o tipo de evidência e o tipo de explicações que serão consideradas válidas. Na verdade, a concepção cultural da Matemática determina não apenas a função social do conhecimento matemático, mas também – a um nível mais abstrato – a concepção dos próprios objetos matemáticos. (RADFORD, 2011, p. 82).

É neste âmbito de relações que evidenciamos a Matemática, seus artefatos e mentefatos, construídos ao longo do tempo, como algo humano e abstrato, passível de questionamentos, evidenciando (dentro da perspectiva sociocultural) os efeitos da cultura e da sociedade. Logo, podemos considerar sem titubear, que cada cultura teve os seus interesses científicos, que satisfiziam as suas necessidades, uma vez que “ se quisermos entender as ideias matemáticas de certo período histórico, precisamos entender seus desenvolvimentos socioculturais abrangentes no mais amplo sentido” (RADFORD, 2011, p. 194).

Pensando no ponto de vista psicológico e fazendo algumas ações reflexivas, é possível como afirma Radford (2011, p. 288), observar que a refletividade do pensamento “Reside no fato que, de um ponto de vista filogenético, os indivíduos produzem seus objetos de

⁹ Mesmo já sendo explícito no decorrer do trabalho, cabe aqui salientar que não compreendemos a História da Matemática (em *Educação Matemática*) apenas como uma fomentadora de contextos, isso seria reduzir essa tendência a uma parcela pequena de sua importância.

conhecimento. Ao mesmo tempo, de um ponto de vista ontogenético, o pensamento de qualquer indivíduo concreto é orientado pelos conceitos gerais de sua cultura”.

Desta maneira, o pensamento se torna uma relação dialética entre a realidade historicamente construída e um indivíduo que se reflete nela, modificando-se mediante algumas especificidades e de acordo com interpretações pessoais a partir da sua leitura de mundo.

Assim configuramos o nosso suporte teórico. Contudo, a fim de fornecer ao leitor uma percepção mais precisa acerca da HM no ensino, apresentamos a última seção desse capítulo que versa sobre as adaptações pedagógicas da HM para o ensino, e uma sugestão de modelo teórico de atividades históricas no ensino da Matemática para a apropriação das adaptações pedagógicas.

2.4 ADAPTAÇÕES PEDAGÓGICAS E UM MODELO DE ATIVIDADE DIDÁTICA PAUTADA NAS RELAÇÕES HISTÓRICAS

Quando nós professores nos propomos a utilizar a História no ensino da Matemática, devemos ter a preocupação e também a sensibilidade, de analisar a maneira como queremos que a história permeie aquela aula. Seria mais eloquente para o aluno conhecer a HM no seu “rigor”, exatamente como foi desenvolvida e registrada, ou seria necessário que essa história fosse adaptada com fins explicitamente pedagógicos? Limitar-nos-emos à segunda opção. O conhecimento “científico” da HM, seus avanços e complexidades são importantes para o professor embasar as suas adaptações para a sala de aula, no entanto, admitimos não serem fatores preponderantes para uma aula de Matemática em nível básico que conecte o trinômio História-Matemática-Educação Matemática.

Mendes (2006a) aponta para a necessidade de se adaptar o objeto histórico em consonância ao conteúdo matemático e aos objetivos previamente estipulados. As adaptações podem ser traduzidas em atividades que estimulem o pensar matemático tendo a história como viés principal. Assim, “Tais informações históricas devem certamente passar por *adaptações pedagógicas* que, conforme os objetivos almejados, devem se configurar em atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ou fora dela (extra-classe)” (MENDES, 2009c, p. 109, grifo nosso).

Podemos aliar a importância das *adaptações pedagógicas* propostas por Mendes (2006a, 2009c) com o que aponta Radford (2011, p. 94)

O modo pelo qual uma ideia antiga foi forjada pode nos ajudar a encontrar significados antigos que, através de um *trabalho didático adaptativo* provavelmente pode ser redesenhado e tornado compatível com currículos modernos no contexto da elaboração de sequências de ensino. (grifo nosso)

Radford (2011) chama as *adaptações pedagógicas*, propostas por Mendes (2006a, 2009c), de *trabalho didático adaptativo* e reafirma a importância de termos na História bases culturais para compreender a Matemática de hoje, redesenhando evidentemente alguns percursos, a fim de que o aluno possa conhecer os contextos e a Matemática imbuídos nas aulas que contemplem o *trabalho didático adaptativo*.

Neste quadro, do trabalho com atividades que tenham na HM o principal eixo de reflexão, Fossa (2012, p.89-90) aponta que “O resultado de trabalhar com atividades construídas à luz da história, portanto, seria o de proporcionar ao aluno a experiência de participar na pesquisa sobre a matemática real e não somente a matemática das escolas”. Para o autor, a Matemática da escola, assume muitas vezes, uma postura acabada e sem consequência.

Fossa (2012, p.90) reforça a importância das *adaptações pedagógicas* sugeridas por Mendes (2006a, 2009c) e do *trabalho didático adaptativo* sugerido por Radford (2011) ao apontar que

Na construção das atividades [atividades históricas] não é necessário insistir em fidelidade histórica, nem cortar as asas de um aluno que, porventura, tratar de um problema com métodos não apropriados ao período em que o problema proposto se originou. O propósito, afinal, é desenvolver as habilidades matemáticas do aluno [...] Assim, será frequente e necessário simplificar certos aspectos de problemas históricos para adequá-los às capacidades do aluno.

Percebemos na afirmação de Fossa (2012) a importância de adequar os problemas históricos para uma melhor compreensão do aluno. Não é necessário, como aponta o autor, evitar anacronismos ou enxergar este fato como algo ruim, pois, além de fornecer uma base conceitual e cultural, a HM, também se aplica às questões por eminência de cunho matemático.

Percebemos, portanto, que o viés pedagógico que permeia a História na EM, é de fato importante; negligenciar este aspecto seria algo inapropriado, uma vez que o conhecimento histórico, por si só, pode não fornecer subsídios para uma aula que tenha por base

pressupostos construtivistas. As *adaptações pedagógicas* para a História na EM emergem neste contexto, como fomentadoras de discussão e de conhecimento matemático, importantes para o ensino.

É objetivo desta seção, além de apresentar a importância das adaptações pedagógicas, sugerir um modelo teórico de atividades proposto por Mendes (2009a, 2009c).

Poderíamos contemplar um esquema com as seguintes etapas:¹⁰

- i)* O nome de cada atividade;
- ii)* Os objetivos das atividades;
- iii)* O conteúdo histórico;
- iv)* O material a ser utilizado nas atividades;
- v)* A operacionalização das atividades;
- vi)* Os desafios propostos nas atividades.

Em *(i)* é necessário destacar o tema, a fim de que os alunos possam ter uma noção geral do objeto histórico e matemático a ser considerado, além de uma noção breve sobre o que tratará a aula. O tema, por sua vez, deve evidenciar os objetivos da aula. A etapa *(ii)* deve deixar bem clara, no plano de ensino do professor, a finalidade da atividade, sem interpretações dúbias. É a partir dos objetivos que o professor pressupõe o que ele pretende ensinar e alcançar naquela aula (tanto no que diz respeito ao conteúdo matemático quanto ao objeto histórico). O item *(iii)* “É um elemento motivador e gerador da matemática escolar por esclarecer os porquês matemáticos” (MENDES, 2009a, p. 97). É o momento onde o professor deve instigar o aluno, construir e reconstruir o pensamento e refletir acerca das suas implicações na Matemática. A etapa *(iv)* supõe a escolha de materiais para as atividades. O professor, como coloca Mendes (2009c) deve ser ousado e criativo, superando as dificuldades existentes no ambiente escolar, inovando e trazendo para a sala materiais que possam elucidar a criatividade e uma imersão, por parte dos alunos, na história de tal assunto, “caso contrário, as condições econômicas dos estudantes, da escola e do professor serão apontadas como fatores de inviabilização da proposta” (MENDES, 2009a, p. 97). A etapa *(v)* supõe a realização das atividades. As diretrizes devem ser claras, e é por base nas orientações metodológicas propostas pelo professor que os estudantes poderão vivenciar as diversas fases da atividade (manipulação,

¹⁰ A proposta de ação pedagógica elaborada neste texto, seguiu em parte, esse modelo.

verbalização, simbolização, abstração e etc). Já em (vi) a tônica será dada na reflexão, com ênfase em habilidades investigativas nas atividades. Obviamente, nem todas as atividades históricas serão passíveis de desafios, no entanto, àquelas que forem, é interessante que o professor se aproprie dessas potencialidades para enriquecer as atividades propostas. “O mais importante de um desafio proposto nesse tipo de atividade é desenvolver nos estudantes um espírito explorador, indagador e ao mesmo tempo de análise e síntese” (MENDES, 2009a, p. 98). É por meio desta percepção que os alunos construirão o seu conhecimento intelectual de maneira mais significativa.

Decerto, esta proposta é altamente flexível, sendo possível ao professor adaptá-la mediante suas especificidades, sem no entanto, perder a sua essência. Podem ser acrescentadas atividades de cunho matemático e outras atividades que enriqueçam a prática do professor em sala de aula.

Deste modo, encerramos esse capítulo após análise de algumas perspectivas historiográficas sobre a Álgebra, seu ensino e interpretação para o século XXI e a apresentação de algumas pesquisas que relacionam História e EM, mesmo na certeza de que uma imensidão de assuntos adjacentes poderiam ser contemplados para enriquecer esta parte.

No capítulo a seguir, situaremos o leitor numa perspectiva histórica do conhecimento matemático produzido no Antigo Egito. Mostraremos também, algumas interpretações anacrônicas para problemas matemáticos, importantes para a compreensão deste trabalho.

3 FARAÓS, SACERDOTES E ESCRIBAS: O EGITO ANTIGO E A SUA MATEMÁTICA

Cálculo preciso. A entrada para o conhecimento de todas as coisas existentes e de todos os segredos obscuros
(Introdução do Papiro Rhind. KATZ, 2010, p. 3)

Neste capítulo, temos o objetivo de rememorar uma história ainda que simplista, do Egito Antigo, e a sua cultura matemática, pela pretensão da abordagem histórica enfatizada neste trabalho.

É importante destacar que a História da Matemática emerge em contextos paralelos aos da História da Ciência. O homem, sendo um ser natural – que faz parte integrante da natureza – a todo o momento produz tecnologias necessárias à sua sobrevivência. Tal conhecimento corresponde às ambições e necessidades de um povo. “Não se pode, portanto, conceber o homem sem a natureza e a natureza sem o homem” (ANDERY *et al*, 2014). Na busca de condições para a sua sobrevivência, o ser humano atua na natureza, e é mediante essa atuação que ele satisfaz as suas necessidades. Assim, a História da Ciência ganha espaço como um âmbito formador de “condições para a sobrevivência” analisando competências e especificidades para um dado período histórico, uma vez que

Como uma das formas de conhecimento produzido pelo homem no decorrer de sua história, a ciência é determinada pelas necessidades materiais do homem em cada momento histórico, ao mesmo tempo em que nelas interfere. A produção de conhecimento científico não é, pois, prerrogativa do homem contemporâneo. Quer nas primeiras formas de organização social, quer nas sociedades atuais, é possível identificar a constante tentativa do homem de compreender o mundo e a si mesmo [...] (ANDERY *et al*, 2014, p. 13)

Os modos de pensar da sociedade egípcia, por exemplo, os levaram a perceber a Matemática pelo o seu modo: ora mais prática, ora mais abstrata. A Ciência produzida pelos egípcios perpassa várias áreas do conhecimento. É interesse destacar que segundo Andery *et al* (2014) os métodos científicos mudam no decorrer do tempo. Em tais momentos coexistem diferentes concepções de homem, de natureza, e conseqüentemente diferentes métodos.

Mendes (2015) ao abordar os contextos socioculturais na construção do conhecimento humano aponta que atividades investigatórias no âmbito da educação matemática contribuirão

para que a Matemática seja percebida como ciência, linguagem, arte, dentre outros. Além disso, a história da ciência nos mostra que “[...] a matemática é formulada na análise da sucessão de dificuldades encontradas nos diversos contextos humanos, ocasionando o surgimento de questões que provocam o aparecimento de noções, conceitos, definições e propriedades matemáticas” (MENDES, 2015, p. 102). Desta maneira encontramos prodigiosos laços entre História da Ciência e História da Matemática e percebemos uma relação intrínseca entre problemas encontrados nas sociedades, a busca de soluções e o conhecimento científico – em especial a o conhecimento matemático –.

Passemos agora a um delineamento histórico do Antigo Egito, com vistas a situar o leitor no contexto histórico contemplado neste trabalho.

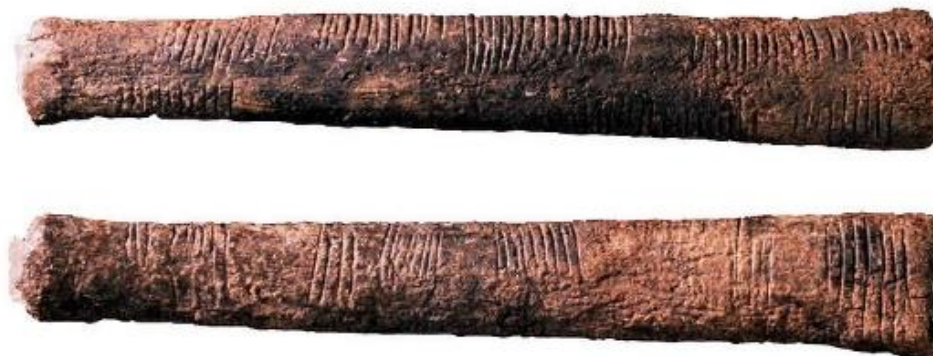
3.1. O EGITO ANTIGO: DELINEAMENTOS GERAIS

Em seus exercícios de escrita dos livros de HM, geralmente os autores costumam expor suas inquietações a respeito do ponto de por onde começar. Para Katz (2010) o ponto de partida de sua escrita da história é que a Matemática sempre se fez presente nas manifestações humanas, contudo, o terreno mais sólido aparece a partir do advento da escrita, no qual as fontes históricas, de certa maneira, narram o passado a fim de nos possibilitar interpretações no presente.

Para diversos historiadores tudo o que aparece antes da escrita, na Matemática, são apenas conjecturas¹¹. Um exemplo é o osso de Ishango (fig. 1), com alguns entalhes. Conjectura-se que tais entalhes poderiam representar números, ou alguma associação biunívoca, mas nada disso é provado. (ALMEIDA, 2011)

¹¹ “Uma *conjectura matemática* (ou conjetura matemática) é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade, ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida” (MORAIS FILHO, p. 191, grifo do autor)

Figura 1 – Osso de Ishango

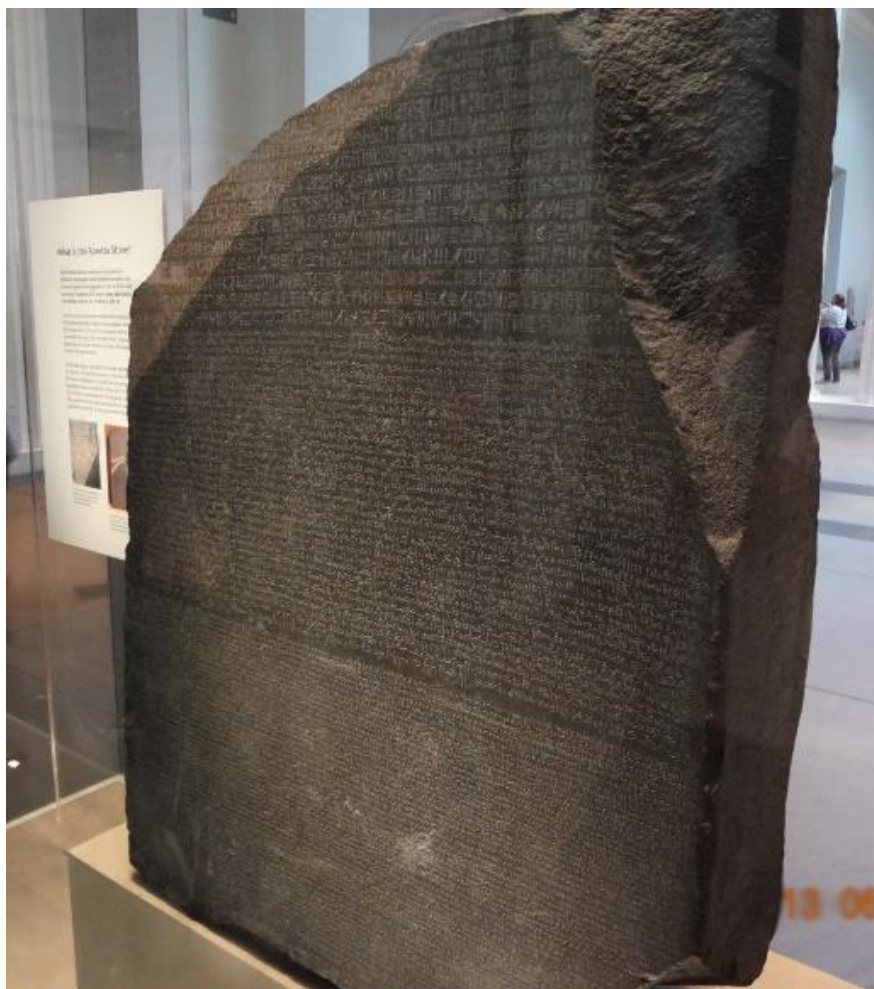


Fonte: ossodeishango-cta.blogspot.com.br/

Tais conjecturas incitam nossa subjetividade de acreditar em uma ou outra hipótese. Autores como Almeida (2011) e Galvão (2008) abordam que tais representações pictóricas contemplam um âmbito sociocultural, na qual a Matemática emerge como uma ferramenta para a sobrevivência. Para Almeida (2011) na Matemática paleolítica, por exemplo, era bastante presente a correspondência um a um entre dois conjuntos, utilizando a técnica de entalhes.

Para a História do Antigo Egito, como um todo, existem fontes documentais – em especial os Papiros – que nos contam um pouco da história desse povo. A primeira grande questão que se impõe é: Como foi possível obter a tradução de hieróglifos? Num primeiro ponto, devemos lembrar que a egiptologia é algo relativamente novo. Muitas traduções de papiros foram apresentadas ainda na primeira metade do século XX.

Em 1799, durante uma expedição de Napoleão no Egito, engenheiros franceses que escavavam o solo para a fundação de um forte, próximo ao delta do Rio Nilo, encontraram um fragmento basáltico. Essa pedra (dimensão: 1,14m X 72 cm X 27 cm) (fig 2), denominada de Pedra de Roseta (196a. C) continha um mesmo texto escrito em hieróglifos egípcios (escrita sagrada), demótico (uma simplificação da anterior) e em grego arcaico. Tomando o grego como chave foi possível, com o estudo de Jean François Champollin (1790-1832), decifrar a escrita e iniciar os percursos histórico como conhecemos hoje. (KATZ, 2010)

Figura 2 – Pedra de Roseta

Fonte: Museu Britânico

As cheias periódicas do Rio Nilo, permitiram surgir naquele meio geográfico, uma das mais importantes civilizações antigas. As cheias começam no final de junho e atingem seu volume máximo em setembro. Em seguida o rio começa a abaixar, voltando ao seu leito normal em dezembro. As cheias permitiam a formação de uma espécie de húmus, o que tornava as terras muito férteis e eram altamente propícias para o crescimento da planta da qual era feito o papiro.

De acordo com Eves (2011), por volta do quarto milênio antes de Cristo existiam no vale do Nilo pequenas comunidades (que com o tempo se repartiram em dois reinos) chamadas *nomas*, lideradas pelos *nomarcas*. Por volta de 3200 a. C, Menés, soberano do Alto Egito, impôs a unificação dos reinos. A partir da unificação dos Reinos (Alto Egito e Baixo Egito), pode-se dividir a história do Egito Antigo em quatro longos períodos, nos quais os faraós

detinham a soberania: Antigo Império (3200-2000a.C); Médio Império (2000-1580a.C); Novo Império (1580-1085a.C) e Renascimento Saíta (663-525a.C).

Todo o poder estava centrado na mão do faraó, que era considerado um deus, daí o governo ser chamado de *teocrático*. Os sacerdotes formavam uma categoria poderosa e influente em razão da importância da religião. A administração complexa e centralizada, exigia uma enorme quantidade de funcionários. Por essa razão, surge a figura do escriba – aqueles que aprendiam a lidar com números e a manejar a complicada escrita egípcia. Uma parte da população era composta por artesãos e a maior parte era constituída por camponeses. (DIVALTE, 2003)

A religiosidade era um traço marcante da sociedade egípcia. Eles eram politeístas, e seus deuses correspondiam às forças naturais, como o deus Rá (o sol) e Osíris (o Nilo). A crença de que a alma existiria enquanto o corpo se fizesse presente fisicamente, fez com que os egípcios criassem uma técnica complexa para embalsamar os mortos – a *mumificação*. A preocupação com os mortos levou os egípcios à construção de túmulos duradouros como as pirâmides, mastabas e hipogeus.

Este delineamento histórico nos coloca frente a algumas manifestações egípcias importantes para a contextualização deste trabalho.

Vejamos a seguir algumas características da Matemática praticada pelos egípcios.

3.2 A MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO

Os monumentos faraônicos e sua apoteose nos levam a crer, mesmo que de maneira indutiva, que a Matemática praticada por essa sociedade, era por eminência prática: construção de pirâmides, monumentos mortuários (como as mastabas) ou, em divisões simples de pães, por exemplo. Conforme aborda Roque (2012) o pensamento abstrato já era presente no antigo Egito. Os escritos dos papiros matemáticos funcionavam como uma espécie de manual didático, com interpretações e “receitas” para a resolução de problemas nem um pouco práticos.

Há de se considerar, com expõe Katz (2010), que tanto a Matemática praticada no antigo Egito quanto na Mesopotâmia – Antiguidade oriental –, são isentas de aspectos formalistas de rigor, como demonstrações.¹² A Matemática praticada é por eminência retórica, e apresenta-se como uma receita, ou como tabelas, elencando passos a serem seguidos pelo leitor.¹³

Garbi (2010, p. 10) categoriza a Matemática egípcia e suméria como um “*aprendizado indutivo (ou empírico)*” (grifo do autor). A partir da observação de padrões que se repetiam, tentativas, erros e experimentações que, sem dúvida, aconteciam, egípcios e sumérios delinearam a sua Matemática como algo indutivo, pautado na observação e obediências aos padrões ligados a pressupostos empíricos. De acordo com Garbi (2010, p. 10)

Qualquer pessoa que, por exemplo, some duplas de números ímpares, verificará que os resultados são sempre números pares e não terá dúvida em afirmar que a soma de dois ímpares é sempre par, mesmo sem saber prová-lo. *Foi assim, por experimentação, indução e algum raciocínio, que a Matemática começou* (grifo do autor).

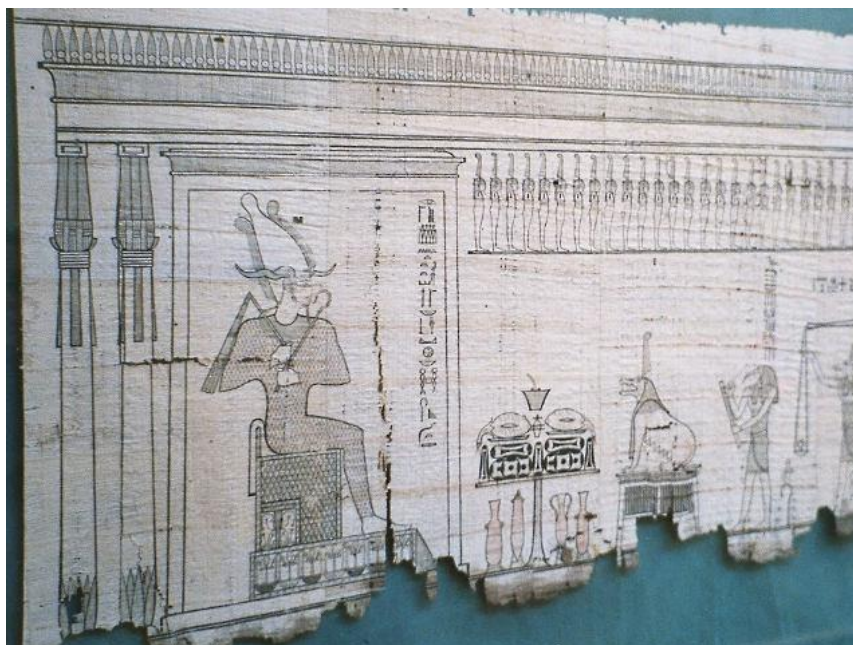
A escrita do período faraônico apresentava-se em dois formatos: hieróglifos e hierático¹⁴. A escrita hieroglífica, como afirma Roque (2012) era mais usado em inscrições sagradas e monumentais, como nas câmaras mortuárias dos faraós ou em registros escritos sagrados colocados dentro das múmias (livros dos mortos, fig. 3) (ARRUDA; PILETTI, 2002). O hierático era uma escrita mais simples, cursiva “empregada nos papiros e vasos relacionados a funções do dia a dia” (ROQUE, 2012, p. 38). Os textos matemáticos egípcios foram todos escritos em hierático e datam da primeira metade, aproximadamente do segundo milênio antes da era comum, mesmo havendo registros mais antigos.

¹² Tal insuficiência leva alguns pesquisadores a afirmarem que a Matemática tem início, de fato, com os gregos. Mas neste trabalho, consideramos que a Matemática praticada no antigo Egito já era uma manifestação cultural convergente para aspectos que hoje consideramos algébricos.

¹³ Devemos nos despir da tendência de observar a Matemática num aspecto evolutivo no sentido de que, fatos passados (principalmente os da antiguidade) não são importantes. Eles foram, certamente, importantes para uma época, e isso não a faz ser melhor ou pior do que qualquer outra cultura. É uma representação sociocultural, como aponta Radford (2011).

¹⁴ “Os documentos matemáticos importantes do Egito antigo a que temos acesso hoje foram escritos em papiros, e neles é usado o sistema hierático de numerais”. (GUNDLACH, 1992, p. 24)

Figura 3 – Seção do livro dos mortos com uma representação do deus Osíris



Fonte: Museu do Cairo

Apesar de o conhecimento matemático produzido no antigo Egito ser totalmente ausente de demonstrações, carecer de uma fundamentação axiomática e ser pautado, unicamente, pela indução e observação, grande parte dos escritores gregos são unânimes ao atribuir aos egípcios a prioridade da invenção das ciências matemáticas (CAJORI, 207, p. 33).

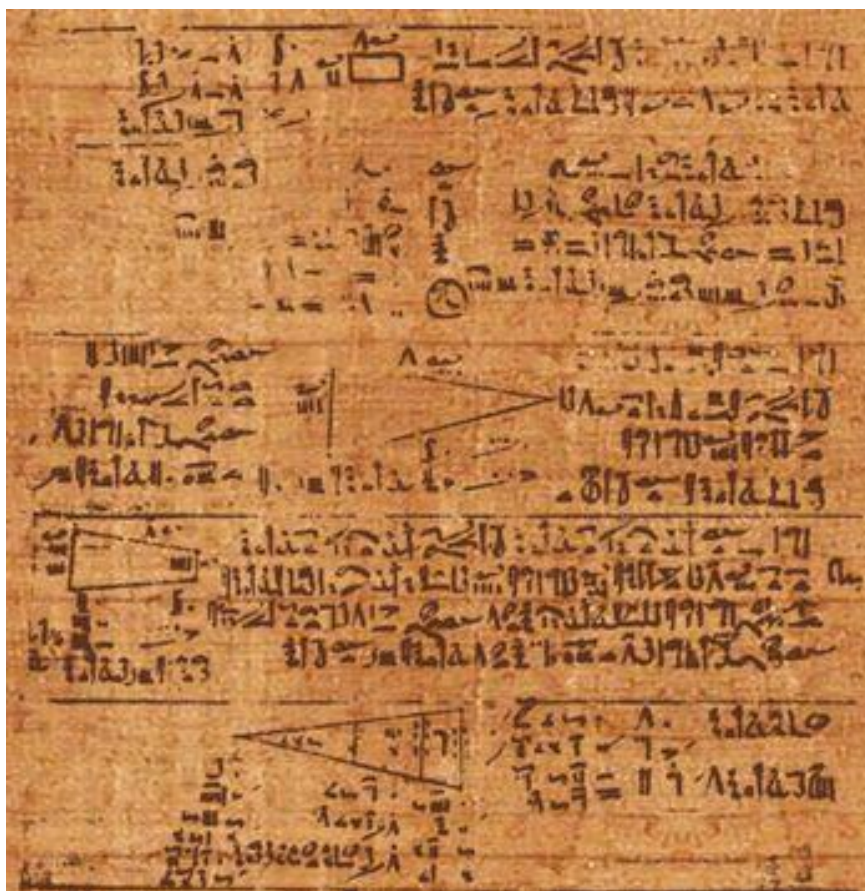
Platão, em Fredo, diz: “Na cidade egípcia de Naucrates havia um famoso e velho deus cujo nome era Teuto; o pássaro que é chamado Íbis era sagrado para ele, e foi inventor de muitas artes, como a aritmética, o cálculo, a geometria e a astronomia. [...]”. Aristóteles diz que a matemática teve o seu nascimento no Egito, porque lá a classe sacerdotal dispunha de toda a ociosidade para o seu estudo. A geometria, em particular, segundo Heródoto, Diódoro, Diógenes, Laércio, Jâmblico, e outros escritores antigos, originou-se no Egito. Em Heródoto encontramos isto: “Eles disseram também que este rei (Sésotris) dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a doar a cada pessoa um quadrângulo de mesmo tamanho, e para extrair disto dividendos pela imposição de uma taxa anual de impostos. Mas cada um dos que o rio tirou algum pedaço de Terra foi até ele e notificou o que acontecia; ele então mandou observadores, os quais tinham que resolver o quanto ficou menor cada parte e, assim, estipular o que cada um devia proporcionalmente ao que sobrara de suas terras, levando em conta a taxa anual estabelecida. Desse modo, me parece, originou-se a geometria, que então passou para Helas.

Todos os registros, tanto no que diz respeito à Matemática, ou a qualquer outra área do conhecimento, eram feitos em papiros. Sem dúvida, o mais importante desses papiros, no âmbito da Matemática, é o Papiro Rhind, que dada a sua importância para essa pesquisa será tratado de modo mais específico na subseção a seguir.

3.2.1 O Papiro Matemático de Rhind

O Papiro de Rhind (1650 a. C), encontrado nas ruínas de Tebas, é o documento matemático mais completo do período faraônico. Possui 85 problemas e mede aproximadamente 30 cm de largura e 512 cm de comprimento e se encontra do museu britânico. (CHACE, 1927). A seguir apresentamos a imagem de um fragmento do Papiro.

Figura 4 – Fragmento do Papiro Rhind



Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049>

Para Roque (2012), é possível afirmar que os registros do papiro Rhind foram copiados de um manuscrito ainda mais antigo. O Papiro é conhecido como Papiro Rhind, em homenagem ao egiptólogo escocês Henry Rhind, que o comprou em Luxor no Egito, por volta de 1850. Este documento também é conhecido como Papiro Ahmes, o escriba egípcio que o copiou.

De acordo com Garbi (2010, p. 13), Ahmes começa apresentando o seu texto (o Papiro de Rhind) “[...] como uma *‘regra para chegar-se ao conhecimento de todas as coisas obscuras, de todos os segredos que as coisas contêm’*” (grifo do autor). Garbi (2010) argumenta que em

seus 85 problemas, o escriba mostra, sem justificção, como resolvê-los. Partindo dessa análise o papiro está longe de ser um “conhecimento de todas as coisas obscuras”. Porém, completa Garbi (2010) “[...] Ahmes merece nosso maior respeito porque, além de ter sido o primeiro autor cujo nome a História registrou, ele é a primeira pessoa de quem temos notícia, a demonstrar encantamento com aquilo que aprendeu na Matemática”.

O conteúdo do Papiro foi publicado pela comunidade científica em 1927 (EVES,2011). De acordo com o autor, quando esta fonte histórica chegou no Museu Britânico ele era menor. Possuía apenas duas partes e lhe faltava a porção central. Foi por volta de 1854 que o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito aquilo que ele pensou ser um papiro médico. Smith doou este fragmento à Sociedade histórica de Nova Iorque em 1932. Historiadores e egiptólogos americanos descobriram que aquele texto compreendia o que faltava no Papiro Ahmes. “A sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes” (EVES, 2011, p. 70).

Este Papiro ganha destaque por ser um documento completo da Matemática do Antigo Egito. Evidente que, outros Papiros também possuem importância considerável, como o Papiro de Moscou e o Papiro de Rollin que mostra a utilização de números grandes naquela época.

Segundo Mendes (2006b) os conhecimentos que hoje temos sobre a matemática egípcia antiga são extraídos, em sua maioria, de manuscritos em papiros ou pergaminhos. “Se os compararmos [os papiros] quantitativamente com os documentos babilônicos, as fontes egípcias são muito mais raras” (MENDES, 2006b, p.56). O autor destaca dois importantes Papiros matemáticos bem fragmentários do Médio Império – Papiros de Kahun e de Berlin (1900-1800 a.C), para a Matemática, além, do Papiro de Rhind e de Moscou.

Roque (2012) destaca que a maneira como os cálculos eram realizados dependiam de modo intrínseco com a natureza de seus sistemas de numeração. A partir dessa premissa, a autora lança argumentos para ressaltar que a Matemática envolvida no antigo Egito não satisfazia, tão somente, as necessidades cotidianas.

[...] cálculos considerados difíceis em um sistema podem ser considerados mais fáceis em outros. Isso mostra que as noções de “fácil” e de “difícil” não são absolutas e dependem das técnicas empregadas. Logo, a referência às necessidades práticas de cada um desses povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, com regras próprias. É preciso relativizar, portanto, a interpretação frequente de que a matemática nessa época

se constituía somente de procedimentos de cálculos voltados para a resolução de problemas cotidianos (ROQUE, 2012, p. 38-39).

Roque (2012) sustenta a sua opinião de que “a matemática antiga não era puramente empírica”. Nota-se, que o aprimoramento das técnicas permitiu que cada sociedade solucionasse aquelas questões que ela possui meios para resolver. As técnicas, nesse contexto, estão relacionadas ao desenvolvimento da Matemática.

Nota-se que o Papiro de Rhind discorre acerca de alguns problemas mais “abstratos”, onde os métodos de resolução já eram previamente conhecidos. Essas atividades trazem à discussão os modos como a Matemática era realizada naquela cultura, instituindo as especificidades do pensar matemático naquele contexto e período histórico. Em seu conteúdo, o papiro trazia desde problemas simples do dia a dia, aritméticos, geométricos e também trigonométricos. (BOYER, 2002)

O que isso tem a ver com Álgebra (cerne desse nosso trabalho)? Basta lembrar que a simbolização, o representar de quantidades desconhecidas em problemas antigos pode desencadear uma reflexão necessária e integrante ao desenvolvimento do pensar algébrico. Além de que, vários problemas egípcios práticos conduziam a resolução de equações (WUSSING, 1998).

As afirmações de Roque (2012) e Eves (2011) convergem para o que enuncia Katz (2010) ao asseverar que “Grande parte do nosso conhecimento da matemática do antigo Egito não é, contudo, proveniente dos hieróglifos dos templos, mas de dois papiros contendo compilações de problemas matemáticos com as suas soluções: Papiro Matemático de Rhind [...] e Papiro de Moscou” (KATZ, 2010, p. 5). O autor afirma que o Papiro de Rhind foi copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a. C.¹⁵. Vejamos alguns problemas tratados nos papiros:

Problemas do Papiro Rhind extraídos de Eves (2011, p. 84

- i) Uma quantidade, seus $\frac{2}{3}$, seu $\frac{1}{2}$ e seu $\frac{1}{7}$, somados, valem 33. Qual é a quantidade?

¹⁵ Segundo Cajori (2007) o Papiro foi escrito por Ahmes em alguma época antes de 1700 a.C., embora o seu conteúdo tenha sido descoberto em outra fonte, remotamente datada, por volta de 3400 a.C.

- ii)* Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual a soma das duas menores.

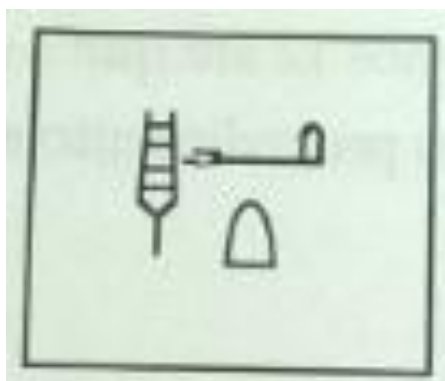
No problema (*i*) vemos o apelo às frações, principalmente as unitárias (de numerador 1). A fração $\frac{2}{3}$ é a única exceção. Tal enunciado, perpassado por linguagem algébrica moderna, pode ser facilmente resolvida por uma equação simples de primeiro grau. No entanto, os métodos egípcios elucidavam o uso da falsa posição, que será melhor abordado em itens posteriores.

No problema (*ii*) é trazido à tona a divisão dos pães. Na resolução egípcia, a divisão deve aparecer em frações unitárias. Vejamos, agora, um problema do papiro de Moscou encontrados em Eves (2011, p. 85)

- iii)* A área de um retângulo é 12 e a altura é $\frac{3}{4}$ da base. Quais são as dimensões?

Neste problema (*iii*), verificamos um envolvimento geométrico, bastante presente nos papiros matemáticos. Porém, nem sempre, os outros problemas são notadamente de cunho algébrico. Neste sentido, destaca-se os problemas 24, 25, 26 e 27, conhecidos como problemas de *aha* (fig. 5). Podemos considerar o *aha*, que é traduzido como “número” ou “quantidade” (ROQUE, 2012), como sendo uma representação escrita hieroglífica da quantidade desconhecida.

Figura 5 – Representação de *aha*



Fonte: Roque (2012, p.80)

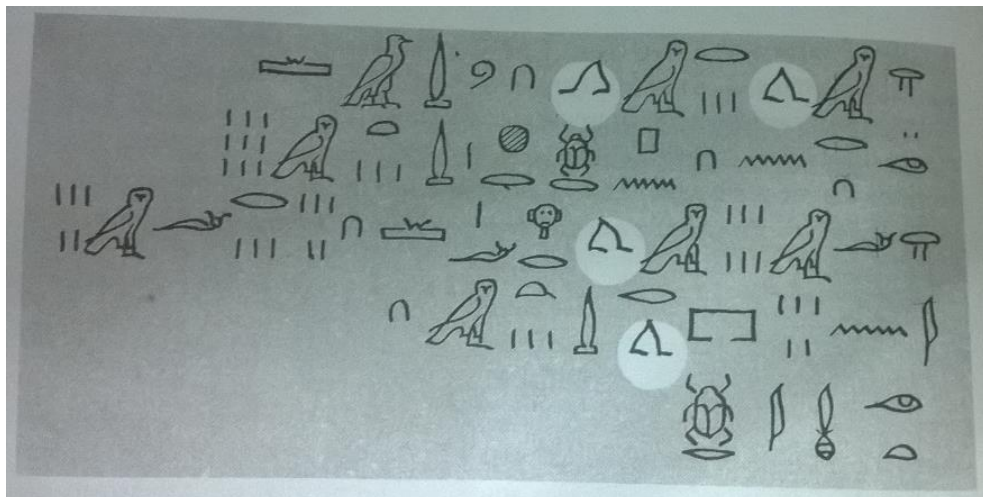
Tais problemas, serão a ênfase da ação pedagógica proposta nesta dissertação. Os problemas são:

- *Problema 24:* Aha e seu $1/7$ somados fazem 19. Qual a quantidade?
- *Problema 25:* Aha e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?
- *Problema 26:* Aha e seu $1/4$ somados fazem 15. Qual a quantidade?
- *Problema 27:* Aha e seu $1/5$ somados fazem 21. Qual a quantidade?

Como percebemos, em nenhum desses problemas faz-se apelo a grandezas como volumes, quantidade de grãos e etc. Todos os quatro envolvem quantidades representadas por números abstratos. Nota-se que, “o escriba parece ter desejado indicar, por meio de uma lista de problemas similares, um procedimento geral de resolução” (ROQUE, 2012, p. 82). Usando a nossa linguagem simbólica da Matemática, podemos escrever essa generalidade da seguinte maneira: $x + \frac{x}{n} = c$. O método usado por nós enaltece a linguagem algébrica. Cabe salientar que nem todos os problemas de *aha* eram resolvidos pela “falsa posição”. No Papiro Rhind há diferentes grupos de problemas e cada um com uma estratégia específica para resolução.

Quanto a simbologia matemática, é possível encontrar no Papiro de Rhind símbolos para as operações de soma e subtração: “A soma era representada por duas perninhas caminhando na direção da escrita e a subtração por perninhas no sentido oposto” (GARBI, 2010, p. 14). Vejamos:

Figura 6 – Símbolos para a soma e a subtração no Papiro de Rhind (1650 a. C)



Fonte: GARBI (2010)

Depreende-se, então, que esta fonte histórica matemática é sem dúvida, uma das mais ricas e representativas do pensamento matemático egípcio. Isso evidencia que, no começo do segundo milênio a.C., o nível de conhecimento matemático dos egípcios era bastante elevado e satisfatório para as suas necessidades.

A seguir, mostraremos algumas concepções matemáticas do Antigo Egito. Tais concepções se configuram como eixo central da ação didática.

3.2.2 O sistema de multiplicação egípcio e interpretações anacrônicas para o Problema 24 do Papiro de Rhind

Neste tópico apresentaremos a multiplicação egípcia, e ilustraremos alguns métodos anacrônicos para a resolução de um dos problemas de *aha* – Problema 24.

Os egípcios desenvolveram um método bastante interessante para a multiplicação de dois números quaisquer, por intermédio de duplicações sucessivas. Por exemplo: Considerando o produto ab calculemos $19 \cdot 17$ ($a = 19$ e $b = 17$).

Segundo Katz (2010, p. 13)

O algoritmo egípcio para a multiplicação baseava-se num processo de duplicação sucessiva. Para multiplicar dois números a e b o escriba registraria primeiro o par $1, b$. Depois duplicaria sucessivamente cada número do par, até que a duplicação seguinte levasse o primeiro elemento a exceder a . Posteriormente, tendo determinado as potências de 2 que somadas são iguais a a , o escriba adicionaria os múltiplos correspondentes de b para obter a resposta.

Para o nosso caso, $19 \cdot 17 = 323$, teríamos:

19	17
1	17
2	34
4	68
8	136
16	272

Em seguida, verificam-se quais os números que na primeira coluna, quando somados, dão o número do topo (19). A indicação é feita pelo símbolo “\”

<i>19</i>	<i>17</i>
\ 1	17
\ 2	34
4	68
8	136
\ 16	272

Nota-se que $1 + 2 + 16 = 19$. Somando os seus correspondentes ($17 + 34 + 272 = 323$) obteremos o produto $19 \cdot 17 = 323$.

Justifica-se o método observando que 19 foi decomposto em potências de base 2 ($2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^4 = 16$ e $2^0 + 2^1 + 2^4 = 19$). A eficácia do método é assegurada também pela distributividade. Observe:

$$19 \cdot 17 = (2^0 + 2^1 + 2^4) 17 = (2^0) \cdot 17 + (2^1) \cdot 17 + (2^4) \cdot 17 = 323.$$

Como já dito anteriormente, e reforçado no que diz Katz (2010, p. 13) “não existia registro [explicativo] de como o escriba fazia a duplicação. As respostas eram apenas escritas”. Para o autor, existem registros de que a duplicação era um método de cálculo standardizado em áreas da África até o sul do Egito. Portanto, conjectura-se que os egípcios tenham “aprendido” com seus amigos do sul a realizarem tal procedimento.

Voltando ao problema 24 do Papiro de Rhind (Uma quantidade e seu $1/7$ somados fazem 19. Qual a quantidade?). Resolvendo este problema por intermédio da álgebra moderna teríamos:

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Rightarrow 7x + x = 133 \Rightarrow x = \frac{133}{8}$$

Ora, mas pelo que tudo indica os egípcios não utilizavam as frações unitárias? ¹⁶ E $\frac{133}{8}$ está longe de ser uma fração deste tipo. Logo, esta resolução mostra-se anacrônica ao período abordado, no entanto, necessária para a compreensão de alguns aspectos. Com um pouco de cálculo, é possível representar $\frac{133}{8}$ por $x = 16 + \frac{5}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

O método utilizado pelos egípcios para a resolução de problemas desse tipo era o da falsa posição. Neste método é dado um “chute” inicial, o mais conveniente possível, para se obter uma solução falsa. Tanto o valor falso quanto a solução falsa será importante para resolver o problema. Para o problema 24, o valor conveniente é 7, donde chegamos na resposta falsa 8 ($7 + (7/7) = 8$). Após essa etapa, deve-se operar com o 8 (resultado falso) para obter 19 (resultado do problema). Utilizando o modelo de multiplicação, temos:

<i>I</i>	8
1	8
\ 2	16
½	4
\ ¼	2
\ 1/8	1
Total: 2 1/4 1/8	19

Assim, operando com o 8 obtemos o resultado parcial: 2 1/4 1/8. O resultado final será obtido multiplicando o valor escolhido, 7, por 2 1/4 1/8, ou seja, ¹⁷

$$7 \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 14 + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} =$$

¹⁶ “No sistema egípcio, os números fracionários eram representados com símbolos diferentes dos usados para os inteiros [...] Havia dois tipos de fração. As frações comuns eram representadas por símbolos próprios escritos em hierático e hieróglifo.” (ROQUE, 2012, p. 74). Existiam hieróglifos próprios para as frações 1/2, 2/3, 1/3 e 1/4. As demais eram escritas colocando um marcador de formato oval em cima dos hieróglifos correspondentes ao que hoje seria o denominador. Cabe ressaltar, como afirma Roque (2012) que o símbolo oval colocado em cima dos hieróglifos, não possui o sentido de numerador. As frações egípcias não tinham numerador. O símbolo oval indica que em uma distribuição de n partes iguais, tomamos a n -ésima parte, a que conclui a subdivisão em n partes. É como se você fizesse uma divisão de algo por n pessoas e $1/n$ seria o quanto cada uma iria ganhar. Para a autora há um “abuso de linguagem” ao dizer que as frações egípcias tinham numerador 1. Seria mais adequado dizer que tais frações representam o inverso dos números.

¹⁷ Foram obtidas frações unitárias para as frações 7/4 e 7/8, fazendo algumas manipulações aritméticas.

$$\begin{aligned}
 &= 14 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \\
 &= 16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } x = 16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3}$$

Mas será que este método da falsa posição será sempre válido, existe alguma inconsistência em sua abordagem? Vejamos.

Em nossa linguagem algébrica atual é possível fazer as seguintes manipulações: Para uma equação $ax = b$, consideremos x_o como o valor falso para x , a fim de calcular $ax_o = b_o$. Partindo da compreensão egípcia, devemos saber por qual número devemos multiplicar b_o para encontrar b , concluímos que tal número deve ser $\frac{b}{b_o}$, donde chegamos em

$$\begin{aligned}
 ax_o &= b_o \Rightarrow \\
 ax_o \left(\frac{b}{b_o} \right) &= \left(\frac{b}{b_o} \right) b_o \Rightarrow \\
 a \left(\frac{b}{b_o} x_o \right) &= \frac{b}{b_o} b_o = b \Rightarrow a \left(\frac{b}{b_o} x_o \right) = b
 \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } ax = b, \text{ e } a \left(\frac{b}{b_o} x_o \right) = b, \text{ logo, } ax = a \left(\frac{b}{b_o} x_o \right) \Rightarrow x = \frac{b}{b_o} \cdot x_o.$$

Chegamos então a um resultado representado pelo modelo matemático simbólico relacionado ao desenvolvimento do período egípcio $\left(x = \frac{b}{b_o} \cdot x_o \right)$, porém, em consonância, às etapas propostas pelos mesmos, o que fizemos foi apenas adaptar ao momento histórico da Matemática vivenciado por nós, que traz mais conforto e familiaridade na hora de lidar com os cálculos. No entanto, imergir no contexto da HM é compreender métodos e técnicas específicos que caracterizaram uma sociedade. Fazer analogias com o nosso contexto algébrico estruturado, faz-se necessário para uma melhor compreensão dos fatos.

Analisando o método egípcio da falsa posição, fica evidente que desde o período faraônico, eles já detinham uma noção de proporcionalidade. Diante desta perspectiva, é possível

apresentar o método da falsa posição por intermédio de uma regra de três simples, relacionando os números falsos e verdadeiros com as suas respectivas soluções.

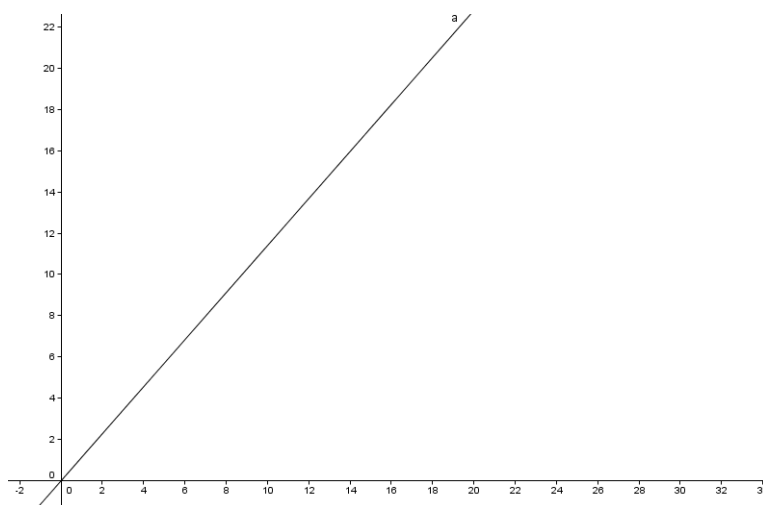
	<i>Número</i>	<i>Resultado</i>
<i>Falso</i>	7	8
<i>Verdadeiro</i>	x	19
	$8x = 19 \cdot 7$	
	$x = \frac{19}{8} \cdot 7 \quad (1)$	

Na equação (1) verificamos exatamente o que foi feito no método da falsa posição: Operamos com o 8 para obter 19 (19/8) e multiplicamos o resultado por 7, obtendo $x = \frac{133}{8}$ (por se tratar de um anacronismo, não escreverei a fração como soma de número natural e frações unitárias).

Uma última analogia para o problema em questão pode ser feita valendo-se dos conceitos de Geometria e Função. Situações do tipo que estamos analisando, podem ser traduzidas em equações da forma $ax = b$, e conseqüentemente, numa função $y = f(x) = ax$. A nossa finalidade é descobrir para qual valor de x , teremos $Im(f) = \{b\}$. Mas neste caso, devemos considerar ainda x_0 e b_0 que podemos denominar vulgarmente de “domínio e imagem falsos, respectivamente” sendo $f(x_0) = b_0$ tal que $x_0 \in \mathbb{R}$ e $b_0 \in Im(f)$.

Iremos trabalhar agora a função real $f(x) = x + \frac{1}{7}x$. Construindo o seu gráfico ¹⁸ obteremos:

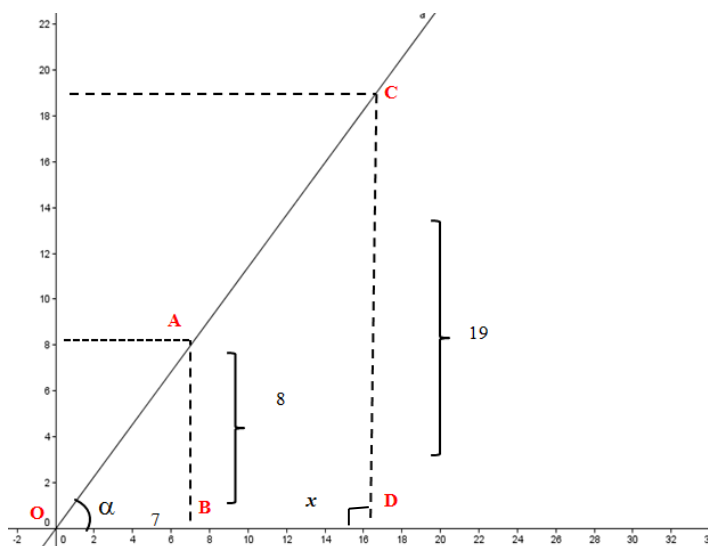
¹⁸ A fim de concatenar a História da Matemática com outras tendências em educação matemática, consideramos adequado que o educador dispusesse de *softwares* de geometria dinâmica para plotar os gráficos. Utilizamos aqui o software GeoGebra, que está disponível livremente na internet.

Figura 7 – Gráfico da função $f(x)$ 

Fonte: Do pesquisador, feito no GeoGebra

Por se tratar de uma função linear ($y = ax$, sendo a real e diferente de zero), teremos para essa função uma reta passando pela origem $O(0,0)$.

Agora, marcando os pontos $(x_0, y_0) = (7,8)$ e $(x, y) = (x, 19)$, temos:

Figura 8 – Gráfico mostrando a semelhança entre os triângulos

Fonte: Feito no GeoGebra

É possível verificar que $\Delta AOB \sim \Delta COD$ (O que nos assegura é o caso de semelhança que diz “se dois triângulos possuem dois ângulos, ordenadamente congruentes, no caso α , então eles são semelhantes”). A partir desta hipótese inicial, temos:

$$\frac{7}{x} = \frac{8}{19}$$

$$8x = 19 \cdot 7 \Rightarrow x = \frac{19}{8} \cdot 7$$

$$\therefore x = \frac{133}{8} = 16,625$$

Essas quatro formas de resolver uma equação linear com base no processo histórico, incluindo as características próprias do processo, evidenciam o caráter múltiplo da Matemática. Ampliar o seu estudo é romper com abordagens únicas, mostrando que a sua história fomenta discussões e pode contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos básicos no ensino atual.

Com o intuito de endossar a visão do leitor acerca da Matemática egípcia, apresentamos a seguir algumas reflexões acerca do aspecto histórico dos números e seu desenvolvimento, com ênfase nos numerais egípcios.

3.2.3 Aspecto Histórico dos Números: a concepção egípcia

Talvez, a necessidade de contar e fazer correspondências biunívocas possam ser considerados os processos cognitivos mais antigos que se pode chamar de pensar matemático. Cada civilização, embasada em perspectivas culturais, utilizou com métodos próprios uma escrita numérica que contemplasse seus anseios. É certo que, como afirma Boyer (2002) os matemáticos do século XXI desempenham uma atividade altamente intelectual e sofisticada, e, boa parte do que hoje chamamos de Matemática derivam de ideias centradas nos conceitos de número, grandeza e forma¹⁹.

Neste sentido surge inevitavelmente a contagem, que “De um modo simplista, podemos afirmar que contar é recitar nomes de números em uma dada ordem, ou computar quantos itens há em grupo” (ALMEIDA, 2011, p. 195).

¹⁹ Como já mencionado anteriormente, alguns registros em ossos, como o osso de Ishango de mais de 8000 anos, nos induzem a pensar em registros sistemáticos da Matemática. No entanto, suspendemos neste trabalho tais conjecturas e pretendemos ir adiante, num terreno mais fértil e firme da História da Matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós (Egito e Mesopotâmia).

É possível, segundo Almeida (2011) encarar o percurso histórico da contagem em três estágios, a saber:

- i) Contagem sem números;
- ii) Contagem Concreta;
- iii) Contagem Abstrata.

A *contagem sem números* seria o estabelecimento de correspondência um-a-um entre um grupo de objetos quaisquer e um contador. Almeida (2011) cita o exemplo dos Veddas, do Sri Lanka, coletores que tem apenas algumas palavras gerais para lidar com números, como: um único, um par, um outro, muitos. Por exemplo: Para cada quantidade de cocos os Veddas empilham seixos. Para cada coco adicional, contam um outro mais um seixo. Quando terminam, olham para a pilha de cocos e dizem: “Aqueles muitos”. Outro exemplo é a contagem corporal, onde a correspondência um-a-um é feita entre partes do corpo e os objetos. Obviamente esse processo de contagem só tem fundamento para quantidades pequenas. A técnica de entalhe em ossos, presentes no paleolítico, também são uma forma de contagem sem a presença de um registro simbólico posicional ou não.

Outros povos *contavam concretamente*. Nesse tipo de contagem, são dados diferentes nomes para contar diferentes coisas que corroboram de características específicas. Ou seja, havia uma relação concreta entre o objeto (coisa) e o nome dado a ele (número), uma nomenclatura que o caracterizaria individualmente. Ilustremos a contagem concreta com Almeida (2011, p. 196)

Este tipo de contagem é muito comum entre os povos caçador-coletores. Os Gilyaks, da Rússia, possuem vinte e quatro conjuntos disjuntos de números. Para contarem coisas compridas, como árvores, varas e lápis, usam a palavra *mex* para o número dois. Quando contam folhas, panos e outros itens chatos, empregarão *met* para dois. Para bolas, frutas e outras coisas redondas, utilizarão *mik* para dois. Suas sequências para números dificilmente ultrapassam vinte (grifo do autor).

Os números concretos são similares aos nossos termos duo, trio, quarteto empregados para denotar participantes de um grupo musical, e gêmeos, trigêmeos, quadrigêmeos para designar o número de crianças de um mesmo nascimento. Portanto, na contagem concreta há uma relação simbiótica entre número e coisa que está sendo contada.

Na *contagem abstrata*, a ideia de número: um, dois, três... é abstraída na natureza, ou seja, das coisas que são contadas. Desta forma, destaca-se a conveniência desta contagem, por poder

contar qualquer coisa. “Cada número abstrato é expresso por uma palavra que permanece a mesma, não importa a natureza do que está sendo contado; os números abstratos são infinitos” (ALMEIDA, 2011, p. 198). É neste sentido, de compreender os números como entes abstratos que

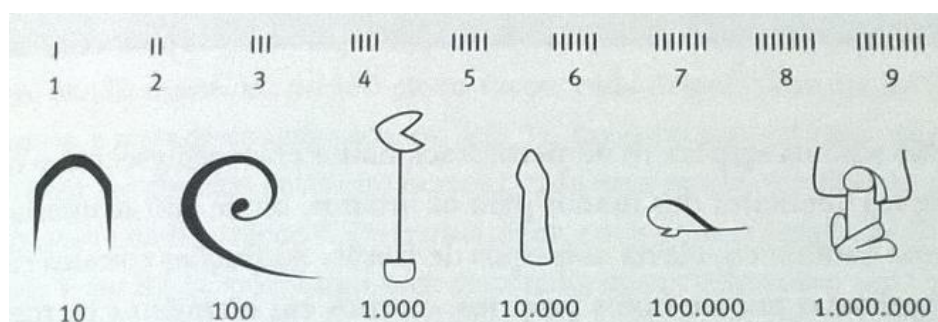
o procedimento de contagem dá origem a um ‘número’ que designa a quantidade de seres em uma determinada coleção. Assim, a noção de que número traduz o fato de que, dadas duas coleções com o mesmo número de seres, pode se chamar a quantidade de elementos pelo nome: 2, 10 etc. (ROQUE, 2012, p. 87)

Logo, a definição de número, assim como ocorria no Antigo Egito, pressupõe uma abstração entre objetos diferentes e uma mesma representação (representação genérica), para que possamos considerar apenas a *quantidade*. Cabe ressaltar que chamar um número de abstrato não pressupõe a ideia de ele ser representado por um símbolo. “O número assim obtido é abstrato porque expressa uma propriedade que foi abstraída, que foi separada da natureza dos objetos contados” (ROQUE, 2012, p. 89).

É importante destacar que “os números tem uma humanidade, porque são parte da configuração cultural, porque são fragmentos do capital cultural das objetividades da imaginação humana” (MENDES, 2006b, p. vi). Assim, devemos compreender os números como uma grafia do estoque mais amplo de experiências acumuladas.

Desta maneira, conseguimos compreender os números a partir de uma holística e de quão fundamental é a sua importância para a Matemática. Vejamos a seguir a representação de número no Antigo Egito.

Os numerais hieróglifos egípcios (fig 9), não fornecem pistas se houve de fato, um estágio de contagem concreta antes da invenção de sua escrita (ALMEIDA, 2011).

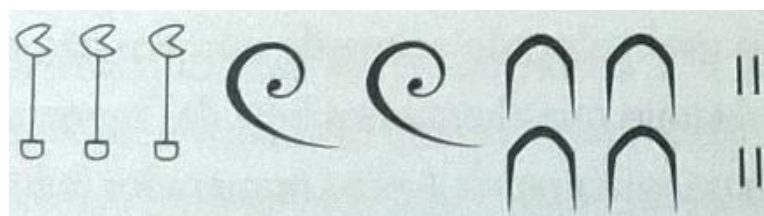
Figura 9 – Numerais hieróglifos no Antigo Egito

Fonte: ROQUE (2012, p. 73)

O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta de 3000 a. C, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós. Conforme mostra a (fig 9) o número 1 era representado por uma barra na vertical. Cada símbolo poderia ser repetido por até nove vezes. Logo, para se escrever o 8, deveriam ser escritos oito barras verticais. Percebe-se, que, os números restantes são múltiplos de dez, daí o sistema ser chamado de decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1000 a flor de lótus; 10 000 um dedo; 100 000 um girino ou passarinho e 1 000 000 um deus com os braços erguidos. (ROQUE, 2012), (MENDES, 2006b).

De acordo com Roque (2012, p. 73) “A convenção para escrever e ler os números é simples: os números maiores vêm escritos na frente, e se há mais de uma linha de números, devemos começar de cima [...] a soma dará o número desejado”.

Vejamos o exemplo da figura 10, a seguir.

Figura 10 – Exemplo de escrita em hieróglifo

Fonte: ROQUE (2012, p. 73)

Como é um sistema aditivo, basta escrever: $1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3244$.

Como observamos este sistema abstrato não é adequado para representar números muito grandes. Por exemplo. Para escrever no sistema egípcio 10^{255} , precisaríamos de 10^{249} deuses (um deus é 10^6 , logo $\frac{10^{255}}{10^6} = 10^{249}$). “Obviamente, cada cultura produz o sistema mais conveniente para atender às suas necessidades, e o uso do sistema aditivo pode indicar que os egípcios não precisavam lidar com números muito grandes” (ROQUE, 2012, p. 74). Portanto, não devemos negligenciar a importância desse sistema de numeração, tampouco ignorá-lo no ensino da Matemática, pois, como apontam estudos referentes à HM, as práticas sociais estão intrinsicamente ligadas às manifestações matemáticas (RADFORD, 2011), sendo este sistema útil para as necessidades do povo do Egito. Neste sentido, testifica Mendes, (2006b, p. 8) “a noção de número se constrói de acordo com as manifestações socioculturais nas quais estão imersas as sociedades”.

Almeida (2011) descreve o que seria uma espécie de numerais hieroglíficos arcaicos, cuja representação está marcada na tumba do faraó Escorpião I. Neste caso o número 10 foi representado por dez barras na vertical, e não com uma alça. Segundo o autor, o número 10 que aparece na tumba representa um número abstrato. O mesmo ocorre com o número 12 (Representado na tumba por doze barras na vertical).

A notação adotada pelos egípcios dispensava a indicação de ausência de unidades. O zero, portanto, não era representado nesse sistema. No entanto, é comum encontrar representações numéricas com espaços vazios indicando essa ausência.

É interessante destacar que a barra vertical, a alça, a espiral, a flor de lótus, o dedo, o girino e o deus com os braços erguidos representam hieróglifos, usados para escrever nas paredes dos templos ou gravar nas colunas sagradas. Mas para a escrita em papiros, os escribas utilizavam uma escrita cursiva e menos rebuscada – o hierático.

No hierático os números eram escritos de modo cifrado²⁰. Assim, cada número de 1 a 9 tinha um símbolo, assim como cada múltiplo de 10 a 90, cada múltiplo de 100 a 900 e etc. Por

²⁰ “Num sistema de numeração cifrado, depois de escolher uma base b , adotam-se símbolos para 1, 2, ..., $b - 1$; $b, 2b, \dots, (b - 1)b$; $b^2, 2b^2, \dots, (b - 1)b^2$; e assim por diante” (EVES, 2011, p. 34). Neste sistema de numeração devem-se decorar muitos símbolos. O sistema de numeração grego é um exemplo. Ele é decimal e emprega 27 caracteres – 24 letras do alfabeto mais outras três obsoletas (*digamma, koppa e sampi*). São também cifrados os sistemas de numeração egípcio (hierático e demótico), hebreu, sírio e arábico antigo.

exemplo: Para escrever 37 temos em hierático que $30 = \text{𓂏}$ e $7 = \text{𓂑}$, logo, 37 seria representado por 𓂏𓂑 . Analogamente, se $3 = \text{𓂑}$, $40 = \text{𓂑}$ e $200 = \text{𓂑}$, temos que o símbolo para 243 era 𓂑𓂑𓂑 . (KATZ, 2010). Embora não fosse necessário o zero na linguagem cifrada, os egípcios possuíam uma representação para ele. “Apesar de não aparecer nos papiros matemáticos, [o zero] nos papiros relacionados à arquitetura, era contudo usado para denotar a linha inferior de nivelamento na construção de uma pirâmide e na contabilidade” (KATZ, 2010, p. 9). Na figura a seguir, extraída de Gundlach (1992), visualizamos numerais escritos em hieróglifos e hierático.

Figura 11 – Numerais Egípcios

	Hiero- glíficos	Hierá- ticos		Hiero- glíficos	Hierá- ticos		Hiero- glíficos	Hierá- ticos		Hiero- glíficos	Hierá- ticos
1...	I	I	10...	𓂏	𓂏	100...	𓂏	𓂏	1 000...	𓂏	𓂏
2...	II	𓂑	20...	𓂏𓂏	𓂏𓂏	200...	𓂏𓂏	𓂏𓂏	2 000...	𓂏𓂏	𓂏𓂏
3...	III	𓂑𓂑	30...	𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏	300...	𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏	3 000...	𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏
4...	IIII	𓂑𓂑𓂑	40...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	400...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	4 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏
5...	𓂑	𓂑	50...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	500...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	5 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏
6...	𓂑𓂑	𓂑𓂑	60...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	600...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	6 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏
7...	𓂑𓂑𓂑	𓂑𓂑𓂑	70...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	700...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	7 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏
8...	𓂑𓂑𓂑𓂑	𓂑𓂑𓂑𓂑	80...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	800...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	8 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏
9...	𓂑𓂑𓂑𓂑𓂑	𓂑𓂑𓂑𓂑𓂑	90...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	900...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏	9 000...	𓂏𓂏𓂏𓂏	𓂏𓂏𓂏𓂏




Fonte: GUNDLACH (1992, p. 23)

É importante ressaltar, como coloca Gundlach (1992, p. 23) que “[...] havia, naturalmente, algumas variações nos símbolos de um escriba para o outro”. O sistema demótico (uma “simplificação” do hierático) não representava grande mudança em relação ao hierático, exceto por uma simplicidade maior na forma dos símbolos.

Mendes (2006b) chama a atenção para um fato curioso que mostra a emergência e expressa a criatividade da cultura egípcia. Historiadores descobriram representações pictóricas de alguns números em certos templos egípcios (que divergem dos hieróglifos e da escrita hierática), como veremos no quadro:

Quadro 1 – Representação Pictórica de algumas escritas numéricas do Egito

Nº	Hieróglifo	Explicação dos jogos gráficos
1	 Arpão	Jogou-se com a homofonia do nome do número 1 (wa') com o do arpão (wa').
	 Sol	Por causa de sua unicidade.
	 Lua	Por causa de sua unicidade.
2		Repetição do sinal do arpão empregado como representação da unidade.
		Combinação dos sinais do sol e da lua empregados como representação da unidade.
3		Repetição do sinal do arpão empregado como representação da unidade.
4	 (Pavilhão de festas jubilares)	Jogo gráfico de que ignoramos ainda a razão.
5	 (Estrela com cinco ramos)	Razão evidente.
6		Combinação do traço clássico (=1) e da estrela (=5).
7	 (Cabeça humana)	Sem dúvida por causa dos sete orifícios da cabeça (os dois olhos, duas narinas, aboca e as duas orelhas).
		Combinação de dois traços clássicos (=2) e da estrela (=5).
8	 Íbis	O Íbis, pássaro sagrado do Egito, encarnava o deus Thot, principal divindade da cidade de Hermópolis, que levava outrora o nome de “a cidade dos oito”, em homenagem ao Ogdoade (grupo de oito deuses iniciais que, segundo a teologia hermopolitana, teriam precedido à criação do mundo e assim personificado o caos).
		Grafia singular do algarismo 8. Trata-se de um decalque hieroglífico do sinal hierático.
		Combinação de três traços clássicos (=3) e da estrela (=5)
		Combinação do sinal do sol (=1) e da cabeça humana empregada como representação de 7.
		Combinação do traço clássico e da cabeça humana empregada como representação de 7.

9	 Brilhar	Jogou-se com a homofonia do nome do número 9 (psd) com o do verbo “brilhar” (psd).
	 Foice	Trata-se de um decalque hieroglífico do sinal hierático da foice.
10	 Falcão	Segundo a teologia de Heliópolis, o deus-falcão Hórus foi a primeira divindade acrescentada à Grande Enéade para formar o “Colégio divino aumentado (a 10).

Fonte: Mendes (2006b, p. 60-61)

Mesmo mediante as limitações das fontes históricas do antigo Egito, dada sua fragilidade, as que restaram conseguiram de certa maneira, fazer um resgate da cultura daquele povo.

Percebemos que o Sistema de Numeração hieroglífico do Antigo Egito era posicional e de base 10. Ao que indicam as fontes, tais números tinham uma relação abstrata, pois relacionavam quantidades com objetos quaisquer, não se importando com a natureza do que se contava.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Outrora, no castelo real de Elsinore, o jovem príncipe dinamarquês ponderava uma questão de vida ou morte. Atualmente, nos castelos acadêmicos do Verde-Amarelo, os jovens príncipes matemáticos cogitam, com a mesma seriedade, uma questão um tanto menos vital. Eis a questão: ensinar a História da Matemática ou não ensinar a História da Matemática? Ou para ser mais preciso, como é de costume dos referidos príncipes, devemos ou não usar a História da matemática como recurso pedagógico no ensino da Matemática? (FOSSA, 2012)

Com esta epígrafe, retirada de Fossa (2012, p. 61), deparamo-nos com uma questão que permeia este trabalho: o de utilizar a HM em sala de aula, em especial, pautamos nossas discussões no “como utilizar” de modo que as abordagens não sejam rasas e sem um propósito.

Neste capítulo descrevemos o método de pesquisa desenvolvida com vistas a elaboração e análise de uma proposta de trabalho para a sala de aula.

Em um primeiro momento foi feita uma pesquisa bibliográfica sobre o tema. De acordo com Lakatos e Marconi (2010) a pesquisa bibliográfica exige organização e foco naquilo a ser pesquisado. Para os autores a pesquisa bibliográfica trata-se do levantamento de informações, seleção e documentação do que for relevante ao assunto. Esse tipo de pesquisa tem por objetivo colocar o autor frente às obras mais importantes a fim de estudá-las, traduzindo-as em respostas e questionamentos relevantes à investigação pretendida.

A pesquisa bibliográfica resultou na escrita dos capítulos 2 e 3, especificados e organizados no quadro a seguir:

Quadro 2 – Organização Conceitual da pesquisa bibliográfica

<i>Capítulo</i>	<i>Assuntos abordados</i>	<i>Referencial Teórico</i>	<i>Objetivos de cada item</i>
2 – História e Educação Matemática: Potencialidades para o ensino da Matemática	2.1 Compreensão historiográfica da Álgebra, percepção de significados e perspectivas.	Lins e Gimenez (1997). Radford (2011).	-Conhecer a historiografia presente na História da Matemática e suas constantes correlações com a Álgebra; -Estudar perspectivas e percepções acerca da Álgebra e seu ensino.
	2.2 Estágios da Notação Algébrica.	Radford (2011). Heath (1964). Roque (2012).	- Localizar o leitor perante as manifestações culturais e epistemológicas do simbolismo algébrico.
	2.3 Aproximações entre HM, ensino de Álgebra e sala de aula (pautado em revisão de literatura).	Roque (2012). Sad (2013). Jankvist (2009). Machado (2011). Machado e Mendes (2013).	-Fazer revisão de literatura de pesquisas acadêmicas relevantes e atuais que contemplem a história e ensino de Matemática.
	2.4 Perspectiva sociocultural para o ensino de Matemática e potencialidades para o ensino de Matemática.	Miguel e Miorim (2008). Radford (2011). Mendes (2009a, 2009b). Jankvist (2009).	-Apresentar a teoria da objetificação do conhecimento e a perspectiva sociocultural para o ensino de Matemática; -Estabelecer conexões teóricas entre a História da Matemática e Ensino.
	2.5 As adaptações pedagógicas para a concatenação entre História e ensino de Matemática e um modelo de atividade histórica.	Mendes (2006a, 2009a, 2009c). Radford (2011). Fossa (2012)	-Apresentar ao leitor a importância de adaptar pedagogicamente o objeto histórico; -Sugerir um modelo teórico de atividades com base na História da Matemática.
	3.1 O Egito Antigo e um	Katz (2010).	-Conhecer as principais

3 – Faraós, Sacerdotes e escribas: o Egito antigo e a sua Matemática	(breve) arcabouço histórico holístico.	Eves (2011). Divalte (2009).	manifestações históricas do antigo Egito.
	3.2 A Matemática praticada no antigo Egito com base em fontes históricas documentais.	Katz (2010). Roque (2012).	-Conhecer, de modo geral, a gênese do pensamento matemático do período faraônico.
	3.3 Aspecto histórico dos números.	Boyer (2002). Almeida (2011). Mendes (2006b).	-Apresentar a percepção numérica em suas diferentes manifestações bem como os tipos de contagem (sem número, concreta e abstrata); -Conhecer o sistema de numeração egípcio e suas singularidades.
	3.4 O Papiro Matemático de Rhind (sua história e a Matemática nele presente).	Chace (1927). Roque (2012). Eves (2011). Mendes (2006b). Boyer (2002).	-Conhecer a Matemática presente no Papiro Rhind (principal objeto histórico/matemático da pesquisa). -Apresentar a sua história e importância para a comunidade matemática.
	3.5 O sistema de multiplicação egípcio e métodos anacrônicos para a resolução de problemas do Papiro Rhind.	Katz (2010). Roque (2012). Sá (2010).	-Apresentar ao leitor o sistema de multiplicação egípcio; -Prepara o leitor para a compreensão das ações pedagógicas propostas.

Fonte: Organizado pelo autor

Após essa pesquisa bibliográfica, especificada no Quadro 2, com seus assuntos e objetivos, partimos para a ação pedagógica em sala de aula. Cabe, antes, retomar ao leitor o problema de pesquisa, bem como os objetivos com seus respectivos procedimentos e instrumentos utilizados para alcançá-los.

Retomando o problema de pesquisa, buscamos suscitar esclarecimentos para a seguinte questão: *Como a História da Matemática, com ênfase na matemática egípcia, pode contribuir em atividades no ensino e aprendizagem da álgebra escolar?* Tal problema, nos leva a pretensão de alcançar os seguintes objetivos que estão articulados com os procedimentos adotados e com os instrumentos de coleta de informações. Observemos:

Quadro 3 – Encadeamento entre os objetivos da pesquisa, procedimentos e instrumentos

Objetivo Geral: Analisar as contribuições da História da Matemática no processo de Ensino e Aprendizagem de Álgebra		
Objetivos	Procedimentos	Instrumentos
(i) Identificar se professores de Matemática da escola envolvida utilizam em seus Recursos Didáticos (livro, vídeos, etc) a História da Matemática.	(i) Inserção na escola-campo (Adwalter Ribeiro Soares – Colatina/ES); (ii) Conversa com os três profissionais de Matemática que atuam no período matutino (turno onde procedeu a ação pedagógica); (iii) Diário de Bordo. (iv) Elaboração das entrevistas.	(i) Observação do planejamento; (ii) Entrevistas semiestruturadas com as docentes da escola; (iii) Anotação no Diário de Bordo.
(ii) Elaborar uma Proposta Didática, para o ensino de Matemática, articulada com a História da Matemática, em especial com elementos da Matemática egípcia, como recurso didático para o ensino de Álgebra.	(i) Seleção de materiais para a elaboração da proposta; (ii) Leituras acerca da Matemática egípcia e de suas possibilidades para a sala de aula; (iii) Elaboração da sequência de quatro aulas seguindo o modelo de atividade histórica (flexível) exposto na seção 2.4; (iv) Elaboração das atividades. (v) Elaboração dos diários de aprendizagem.	(i) Proposta Didática; (ii) Livros técnicos e científicos.
(iii) Trabalhar em conjunto com alunos e professores a Proposta Didática	(i) Ida à escola-campo a fim de delinear conteúdos e possibilidades de aulas, bem como, para um conhecimento prévio das turmas, suas limitações e etc. Entrega do termo de Consentimento livre e esclarecido e da carta de apresentação; (ii) Ação pedagógica em sala	(i) Projetor; (ii) Atividades; (iii) Materiais Manipulativos.

	de aula.	
(iv) Analisar os dados obtidos junto aos professores e alunos sobre as contribuições da História da Matemática.	(i) Elaboração dos diários de aprendizagem; (ii) Entrevistas com professores; (iii) Diálogo permanente com alunos e professores; (iv) Ação pedagógica em sala de aula; (v) Diário de Bordo.	(i) Diários de Aprendizagem; (ii) Entrevistas semiestruturadas; (iii) Diálogo; (iv) Proposta Didática. (v) Registros no Diário de Bordo.

Fonte: Organizado pelo autor.

A pesquisa teve início, ainda que de modo informal, no segundo semestre de 2014, no meu recém ingresso no Mestrado. Neste período (2014/2) era professor regente do Ensino Fundamental na Escola Municipal de Ensino Fundamental “Adwalter Ribeiro Soares²¹” (não leciono atualmente na referida instituição), e em conversas com a diretora, ela sempre se mostrou receptiva e aberta à proposta de ação pedagógica (que viria a acontecer em 2015/2 em três turmas de nono ano).

Quanto à escola (EMEF “Adwalter Ribeiro Soares”), esta é uma instituição pública municipal, localizada no Bairro Santa Terezinha, Colatina/ES. Em sua maioria, atende alunos oriundos do próprio bairro e adjacências. Além de uma clientela proveniente do interior, do centro da cidade e de alguns outros bairros próximos. De um modo geral, a instituição é conhecida pela sua competência e pelos bons resultados em provas e avaliações, além de o corpo docente e pedagógico serem comprometidos e organizados em suas tarefas.

Grande parte dos estudantes são comprometidos com o estudo. A família se faz presente, e, quando solicitados na grande maioria das vezes comparecem. Em contrapartida, muitos alunos mostram total desinteresse e a família é ausente no processo. A escola promove feiras científicas, gincanas e projetos a fim de que os alunos fiquem mais “conectados” com a escola e professor. A relação professor-aluno, num geral, é boa, salva algumas exceções.

A EMEF “Adwalter Ribeiro Soares”, também é conhecida como escola Polivalente. A sua estrutura física consegue atender a clientela de modo a proporcionar ambientes diversificados

²¹ A utilização livre do nome da instituição está explícita no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, lido e assinado pela diretora da Unidade Escolar, que consta em apêndice.

para trabalhos, com salas de aula amplas e ambientes bem organizados. Atende alunos desde o primeiro período até o nono ano. A escola também é conhecida por atender diversos alunos com necessidades especiais, pois, possui um núcleo de atendimento muito bem equipado²² com profissionais capacitados para a sua função.

No ano corrente da ação pedagógica (2015), a escola atendia no período matutino: três turmas de sétimo ano, quatro oitavos e três nonos, perfazendo 291 alunos. As salas possuem, em média, 30 alunos. Para este quantitativo, o espaço físico (sala de aula) se mostra um pouco insuficiente. Algumas salas ficam ociosas, e o professor tem a seu dispor uma sala de vídeo, laboratório de informática com profissional capacitado, biblioteca e uma sala exclusiva para o projetor.

Figura 12 – Escola Adwalter Ribeiro Soares



Fonte: colatina.es.gov.br

A equipe docente é formada por profissionais, em sua maioria habilitados na área, e com preocupações com o ensino. A escola, em especial a coordenação, preza pela disciplina e ordem.

²² Cabe salientar que nos três nonos anos, não havia a presença de nenhum aluno com necessidade especial, logo, não houve a necessidade de adaptar as atividades propostas.

Em suma, a instituição possui um ambiente bastante agradável (arborizado) um espaço amplo, uma quadra para a prática da Educação Física e pátios onde os alunos circulam livremente no recreio e nos minutos que antecedem a entrada.

A inserção na escola ocorreu inicialmente em 2014, como mencionado, na condição de professor temporário da instituição. Formalmente, para fins de pesquisa, o aceite aconteceu no dia 25/08, onde ocorreu a visita à escola e a liberação para aplicação do projeto. Também no dia 25/08 conversei com a professora regente dos nonos anos (sujeitos da pesquisa) – conversa acerca de assuntos mais gerais. Cabe ressaltar que fui muito bem atendido e a escola, como um todo, se mostrou bastante receptiva à aplicação da proposta.

A segunda ida à escola foi no dia 16/09, numa conversa exclusiva com a professora regente dos nonos anos. Elaboramos um calendário de ação, fizemos o agendamento do projetor e fizemos as adaptações dos conteúdos. A professora tomou ciência de todo o projeto e de tudo o que nele incluiria (fotos, depoimentos, entrevistas, anotações) bem como da ética envolvida no processo. A professora comentou acerca das turmas e de suas peculiaridades. Ocorreu uma conversa rápida com a diretora onde a mesma também comentou a respeito das turmas. Num geral as turmas são bem esforçadas e possuem pretensões futuras. A maioria estuda para ser aprovado no IFES (campus Colatina e Itapina), fazendo cursinho e aproveitando ao máximo o que lhe é ensinado em sala de aula.

O dia 22/10 foi dedicado à entrega de documentos. A diretora leu e assinou o Termo de Consentimento Livre e esclarecido (não se opondo a nada do que estava escrito); também entreguei a carta de apresentação para a direção escolar e um ofício para a Secretaria Municipal de Educação (SEMED), que foi protocolado e nomeado à secretária municipal de Educação. Em 23/10 a SEMED encaminhou um ofício não se opondo a realização da pesquisa. (Todos os documentos constam em apêndice).

A ação pedagógica ocorreu em três turmas de nono ano (a ação, assim como toda metodologia, foi elaborada à luz dos objetivos específicos já elencados nesta seção). Como já dito, as classes são bem esforçadas e se mostraram receptivas à minha proposta. Para cada turma ministrei quatro aulas. As aulas ocorreram nos dias 27/10, 29/10, 05/11 e 30/11. Nestas aulas abordei o conhecimento histórico e matemático entrelaçados, de modo que assuntos algébricos pudessem ser elucidados a partir da Matemática egípcia, especialmente contida no

Papiro Rhind. A única aula que fugiu a essa temática foi a primeira, uma vez que foi dedicada a conhecer a turma e seu “nível”. Para tanto, propus uma aula pautada na Matemática grega: números perfeitos, abundantes e deficientes, com inspirações numéricas para um começo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O quadro sinótico a seguir, fornece uma visão mais geral dessas ações realizadas durante a inserção na escola:

Quadro 4 – Os caminhos percorridos pela pesquisa (resumo das ações para inserção na escola)

<i>Ação</i>	<i>Data</i>
Conversa informal com a direção da escola acerca da aceitação da pesquisa	2014/2
Visita à escola e aceite da pesquisa	28/05/2015
Conversa com a professora regente e planejamento das aulas (cronograma)	16/09/2015
Entrega de documentos – termo de consentimento, carta de apresentação (para a escola) e ofício para a Secretaria Municipal de Educação	22/10/2015
Desenvolvimento de ações pedagógicas em sala de aula	27/10/2015, 29/10/2015, 05/11/2015 e 30/11/2015

Fonte: Organizado pelo autor.

Cabe aqui salientar que a pretensão não foi a de apresentar a HM como um ornamento às aulas de Matemática, mas fornecedora de subsídios metodológicos para torná-las inclusive mais dinâmicas, a fim de distanciar o aluno de uma visão estática e unilateral desta disciplina. Ao fim de cada aula, os alunos foram convidados a escreverem em seus Diários de Aprendizagem²³. É a partir da escrita periódica dos alunos em seu Diário de Aprendizagem, que serão feitas as análises dos impactos ocorridos mediante a utilização da HM na construção do conhecimento.

Após a consolidação do suporte teórico, bem como das interfaces com a prática realizada, fizemos uma análise das informações que trazem à tona reflexões para a pesquisa científica, sobretudo, para o educador matemático.

²³ A expressão Diário de Aprendizagem é sugerida por Powell e Bairral (2006) e é um instrumento onde o aluno expõe a sua opinião e críticas sobre o assunto. Servirá também como mais um instrumento para posterior análise de dados.

Em síntese, os caminhos seguidos por essa pesquisa, foram: (i) Estudo Teórico e início da escrita da parte teórica; (ii) Elaboração de Planos de Aula e das Entrevistas; (iii) Inserção da escola; (iv) Aplicação da Proposta Didática; (v) Coleta de informações: entrevistas com professores e Diários de Aprendizagem com escrita diária após cada aula, por parte dos alunos; (vi) Análise dos dados obtidos; (vii) Escrita da dissertação. Todas essas ramificações no caminhar da pesquisa tiveram como objetivo constante a elaboração do Guia Didático (Produto Educacional).

A partir da apresentação da proposta metodológica, categoriza-se a pesquisa como, por eminência, qualitativa do tipo Estudo de Caso Educacional com intervenção em sala de aula. Para tanto, à luz de André (2005) apresentaremos as principais características de um Estudo de Caso em Educação e as suas aproximações com essa pesquisa.

Os dados colhidos na pesquisa qualitativa (e no Estudo de Caso) são predominantemente descritivos.

O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrição de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. Citações são frequentemente usadas para subsidiar uma afirmação ou esclarecer um ponto de vista. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 12)

Para André (2005), o Estudo de Caso caracteriza-se como sendo o estudo de uma particularidade, um caso singular, dentro de circunstâncias. Assim sendo, para o Estudo de Caso em Educação existe uma gama diferenciada de posturas para a ação “algumas pessoas sentirão mais à vontade frente ao ‘design’ aberto e flexível do estudo de caso, outras, preferirão esquemas mais estruturados e menos ambíguos de trabalho” (ANDRÉ, 2005, p. 37). Neste sentido, afirma André (2005), o Estudo de Caso ultrapassa os limites metodológicos, e dá ênfase no objeto a ser estudado, e, principalmente, *no que se aprende* e os impactos que esse estudo pode causar. Vejamos no quadro 5, a seguir, a diferença do conhecimento gerado pelo estudo de caso em relação a outros tipos de pesquisa:

Quadro 5 – Conhecimento gerado pelo Estudo de Caso em Educação

<i>Estudo de Caso</i>	
<i>Característica do Conhecimento gerado</i>	<i>Pois ...</i>
(i) Mais Concreto	Está refletido em uma prática, sendo mais vivo e sensório.
(ii) Mais Contextualizado	As experiências estão imbricadas em contextos específicos, com situações peculiares e bem delineadas, o que faz a pesquisa refletir um dado contexto. “Esse conhecimento se distingue do conhecimento abstrato e formal derivado de outros tipos de pesquisa” (ANDRE, 2005, p. 17)
(iii) Mais voltado para a interpretação do leitor.	Os leitores trazem as suas experiências, suas vivências e compreensões na leitura do texto, podendo ter uma interpretação e posicionamento, diferentes daqueles pretendidos pelo autor.
(iv) Baseado em populações de referência determinadas pelo leitor.	A amostra alvo do autor, será certamente, diferente da do leitor, porém com múltiplas aproximações. Assim, diferente da pesquisa tradicional o leitor pode estender as generalizações para a sua população de referência.

Fonte: Organizado pelo autor com base em André (2005)

Existem elaboradas, para o Estudo de Caso, quatro características essenciais: *particularidade*, *descrição*, *heurística* e *indução*.

- **Particularidade** — O Estudo de Caso focaliza uma situação específica. O caso em si tem considerável importância, seja pelo o que revela sobre o fenômeno ou pelo o que ele pode representar, sendo, portanto, um estudo importante para investigar problemas práticos e questões que emergem no cotidiano;
- **Descrição** — A escrita literal e detalhada da prática ou da ação investigada. Os dados serão expressos em palavras, imagens, gráficos, categorias, dentre outros;
- **Heurística** — “Significa que os estudos de caso iluminam a compreensão do leitor sobre o fenômeno estudado” (ANDRÉ, 2005, p. 18). Nessa característica, pode haver a descoberta de novos significados ou de categorias, estendendo a experiência do autor e do leitor, ampliando a visão do assunto abordado;
- **Indução** — Metaforicamente, em grande parte, os estudos de caso têm por base uma espécie de “indução matemática ou lógica”, isto é, a descoberta de novas relações,

conceitos, e possibilidades de ampliação. A indução vai além da verificação da hipótese inicial.

Nesta pesquisa estes quatro pontos se relacionam com a prática metodológica, conforme apontado o Quadro 6.

Quadro 6 – Características Essenciais do Estudo de Caso e sua relação com a pesquisa

<i>Características Essenciais</i>	<i>Relação com a Pesquisa</i>
Particularidade	Análise e intervenção em uma unidade escolar, especificamente em três turmas de nono ano – estudo de um fenômeno particular
Descrição	Produto Educacional e escrita detalhada da ação, mediante análise de dados com fotografias e registros a partir da ação pedagógica. Descrição escrita da prática realizada (texto dissertativo final)
Heurística	Percepção dos significados que os alunos atribuíram à importância da História no ensino de Matemática, suas conjecturas, descobertas. Tais conjecturas e descobertas fornecem ao leitor uma visão “concreta” e menos teórica das possibilidades pedagógicas (Compreensão do leitor sobre o fenômeno).
Indução	A Indução pode fomentar novas perspectivas de ensino a partir de uma ideia propulsora, ampliando-a e adaptando-a, mediante especificidades.

Fonte: Organizado pelo autor.

Esta dissertação, portanto, trata de um *Estudo de Caso Educacional*, onde o pesquisador não está preocupado com uma teoria social nem com algum julgamento avaliativo, mas sim, *na busca da compreensão da ação educativa*, impactos, possibilidades de ação e desafios. (ANDRÉ, 2005). Consideraremos este estudo de caso como sendo o interesse do pesquisador em um caso particular que tem uma metodologia centrada na utilização da HM em sala de aula.

Deve-se dar preferência ao Estudo de Caso quando o problema da pesquisa for do tipo “como” ou “por que”, quando o pesquisador tiver pouco controle sobre aquilo que pode acontecer ou quando o foco for algo contemporâneo e que esteja ocorrendo na vida real. O

Estudo de Caso versa sobre aspectos interessantes de alguma atividade (educacional, neste caso) e possui um contexto natural.

Quanto a flexibilidade do Estudo de Caso, André (2005, p. 35) afirma que no Estudo de Caso “o pesquisador não parte de um esquema teórico fechado, que limite suas interpretações e impeça a descoberta de novas relações, mas faça novas descobertas e acrescente aspectos novos à problemática”. Essa afirmação de André (2005) faz todo sentido, pois, uma vez inserido em um contexto/ambiente cultural, estamos passíveis de intempéries que podem modificar totalmente ou parcialmente a ação previamente planejada. E sendo o ambiente educacional um espaço complexo e de singularidades, a possibilidade da não existência de algo hermético é, indubitavelmente, favorável.

André (2005) enfatiza a importância e a vantagem do Estudo de Caso para a Educação. Segundo a autora, este tipo de estudo pode fornecer informações valiosas para pesquisadores e professores, promoção de medidas práticas e, também, para decisões políticas. As questões éticas – documentação, aceite, dados coletados e etc, fazem parte do procedimento de pesquisa. “Obter o consentimento dos participantes é fundamental, o que pode ser feito por meio de instrumentos formais ou não; o importante é que sejam explicitados as questões estabelecidas e os acordos” (ANDRÉ, 2005, p. 37).

Segundo indicações teóricas, é possível caracterizar o Estudo de Caso em três etapas: *fase exploratória* ou *de definição dos focos de estudo*, *fase de coleta de dados* ou *de delimitação do estudo* e *fase de análise sistemática dos dados*. O quadro 7, a seguir, apresenta uma síntese dessas três etapas e suas correlações com essa pesquisa (relação “teoria-prática”).

Quadro 7 – Prática do Estudo de Caso: As suas três fases e correlações com a pesquisa

<i>Etapa (teoria)</i>	<i>Correlação com a pesquisa (prática)</i>
<i>Fase Exploratória: Momento de delinear e definir o melhor objeto/local para estudo; estabelecer contrato inicial para entrada em campo; início da problematização. Tem na valorização do sujeito e sua postura ativa como eixo fundamental na produção do conhecimento</i>	- Contato com a escola campo (consentimento e conversas informais); - Amadurecimento do Projeto de Pesquisa; - Reflexões acerca do objeto de estudo; - Tomada de conhecimento das turmas; - Amadurecimento do problema de pesquisa e dos objetivos de pesquisa.
<i>Fase de coleta de dados ou de delimitação</i>	- Ação Pedagógica em sala de aula (incluindo as etapas anteriores a ela, como a elaboração dos planos de aula e confecção de

<p><i>do estudo:</i> Coleta sistemática de dados utilizando fontes variadas, com atenção à delimitação das fontes, uma vez que, não será possível contemplar todos os ângulos, num curto espaço de tempo (determinação do recorte).</p>	<p>materiais);</p> <ul style="list-style-type: none"> -Delimitação do assunto (Matemática egípcia e ensino de Álgebra para nonos anos); - Escrita dos alunos no Diário de Aprendizagem; -Anotações no Diário de Bordo; -Entrevista com professores.
<p><i>Fase de análise sistemática dos dados:</i> A análise está presente em várias fases da pesquisa, no entanto, nesta etapa ela se torna mais sistemática e formal, sendo feita após o encerramento da coleta de dados</p>	<ul style="list-style-type: none"> -Organização do material coletado; -Separação e fichamento; -Leitura e releitura; -Separação das categorias; -Conexões com o Referencial Teórico; -Elaboração do relatório final.

Fonte: Organizado pelo autor com base em André (2005)

Em suma, o Estudo de Caso deve ser um retrato vivo de uma realidade (situação) investigada, tomando suas múltiplas dimensões e especificidades. A apresentação dos métodos de coleta de dados bem como a sua análise é de fundamental importância para este tipo de trabalho. Desta maneira, o estudo de uma dada realidade, potencializada por uma coleta sistemática de dados e sua análise (sem um método específico) caracterizam um Estudo de Caso em Educação, que será validado mediante a descrição dos dados e seus impactos para a comunidade científica na qual ele se insere.

5 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA E ANÁLISE DE INFORMAÇÕES

Não pode todavia negar-se que uma ciência parece sempre ter algo de incompleto se não for capaz, mais cedo ou mais tarde, de nos ajudar a viver melhor

(Marc Bloch)²⁴

Neste capítulo, far-se-á uma descrição um pouco mais detalhada das ações pedagógicas ocorridas em sala de aula para a aplicação da Proposta Didática, a fim de que o leitor possa se situar melhor²⁵ quanto aos procedimentos que viabilizaram as análises sobre as contribuições da História da Matemática no ensino e aprendizagem de Álgebra.

Cabe salientar, que nesta seção e em seus desdobramentos serão apresentadas as propostas de aula, avaliadas suas possibilidades e flexibilidades para o educador matemático em sua sala de aula.

5.1 CARACTERIZAÇÕES DAS AÇÕES PEDAGÓGICAS

Nesta seção apresentaremos ao leitor de modo geral, a caracterização das aulas, comentando como elas foram direcionadas e quais pontos foram tomados como principais. Ao leitor que se interessar pelas atividades, observamos que são perfeitamente cabíveis adaptações à sua realidade.

5.1.1 Caracterização da primeira ação pedagógica

A primeira aula da ação pedagógica teve como objetivo fazer as primeiras aproximações dos alunos com a HM, apresentando a historicidade inerente à Matemática. Iniciar com uma conversa informal e questões simples do tipo “A Matemática possui alguma história?”, “Ela

²⁴ Epígrafe retirada de SOUTO, R. M.A. **Cinema e história da Matemática:** entrelaços possíveis. São Paulo: Livraria da Física, 2013. (Coleção História da Matemática para professores), p. 85.

²⁵ Omitiremos, por questão de otimização, os objetivos, materiais utilizados, métodos avaliativos, identificação, dentre outras informações relevantes, uma vez que, os Planos de Aula, encontram-se completos nos Apêndices desta dissertação. Faremos aqui, uma explicação detalhada da proposta em si, sem preocupações metodológicas que se reportem aos objetos supracitados. Indica-se fortemente a leitura dos Planos de Aula antes da leitura do item 4.2. O item 3.2.2 (*O sistema de multiplicação egípcio e interpretações anacrônicas para o Problema 24 do Papiro de Rhind*), já lido previamente, ajudará bastante na compreensão deste tópico.

foi criada ou descoberta?”, ajudou a gerar na turma uma atmosfera de curiosidade e de debate mediado pelo professor.

Nesta aula, como já dito, as primeiras aproximações na intenção de abordar pedagogicamente a álgebra com base na HM, aconteceram a partir da exploração didática do pensar algébrico grego, a partir dos Números Perfeitos, Abundantes e Deficientes²⁶, a saber:

- Esses números apresentam ligações místicas essenciais a especulações numerológicas;
 - Um número se diz *perfeito*²⁷ se é igual a soma de seus divisores *próprios*;
 - Um número se diz *deficiente* se excede a soma de seus divisores próprios;
 - Um número se diz *abundante*²⁸ se é menor que a soma de seus divisores próprios.
- (EVES, 2011).

Assim, este momento da aula será oportuno para: Explicar, de modo holístico, acerca da Matemática grega e questionar a respeito da diferença entre *divisor* e *divisor próprio*²⁹.

Ademais, é prudente que o professor destaque algumas figuras gregas importantes para o alvorecer da Matemática, comentando as suas contribuições. A apresentação sucinta de biografias, mesmo parecendo algo desprezioso, fundamenta o embasamento histórico e coloca o aluno frente à vida do personagem ao qual estará lidando, pois, como coloca Brolezzi (2014, p.73) “Conhecer as vidas dos matemáticos sem dúvida contribui para tornar mais atraente o ensino da Matemática, revelando o fundo humano por trás da sua aparente frieza exata”. Cabe ao professor, delinear momentos adequados, dosar o tempo e a tônica dada às biografias em consonância aos seus objetivos. Na postura de pesquisador-professor, não consideramos necessária e preponderante a utilização de muito tempo para isso.

Apresentar algumas curiosidades matemáticas da época em questão, também é bastante favorável (BROLEZZI, 2014). Após essa etapa de explicações e comentários, entregamos o cartão para as duplas. A seguir, vemos uma reprodução do cartão já devidamente preenchido.

²⁶ Na concepção de Fossa (2012) essa classificação divide os números Naturais em três classes de equivalência.

²⁷ A título de curiosidade, o número 10, na concepção pitagórica era tido como um número perfeito em outro sentido: 10 é a soma dos primeiros quatro números naturais ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$), isto é, o ponto a reta o plano e o sólido e, assim, acaba por compreender toda a existência. Este fato, porém, não invalida a classificação apresentada e aqui discutida. (FOSSA, 2012).

²⁸ Algumas literaturas denominam os números *abundantes* como *superabundantes*.

²⁹ Divisores próprios de um número positivo n são todos os divisores inteiros positivos de n exceto o próprio n .

Quadro 8 – Cartão Entregue aos alunos

ALUNOS:						
DATA:						
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: NÚMEROS PERFEITOS, ABUNDANTES E DEFICIENTES						
Nº	Fatores	Classe		Nº	Fatores	Classe
1	Nenhum	$1 > 0 (D)$		16	$1 + 2 + 4 + 8 = 15$	$16 > 15 (D)$
2	1	$2 > 1 (D)$		17	1	$17 > 1 (D)$
3	1	$3 > 1 (D)$		18	$1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$	$18 < 21 (A)$
4	$1 + 2 = 3$	$4 > 3 (D)$		19	1	$19 > 1 (D)$
5	1	$5 > 1 (D)$		20	$1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22$	$20 < 22 (A)$
6	$1 + 2 + 3 = 6$	$6 = 6 (P)$		21	$1 + 3 + 7 = 11$	$21 > 11 (D)$
7	1	$7 > 1 (D)$		22	$1 + 2 + 11 = 14$	$22 > 14 (D)$
8	$1 + 2 + 4 = 7$	$8 > 7 (D)$		23	1	$23 > 1 (D)$
9	$1 + 3$	$9 > 4 (D)$		24	$1 + 2 + 3 + 6 + 8 + 12 + 4 = 36$	$24 < 36 (A)$
10	$1 + 2 + 5 = 8$	$10 > 8 (D)$		25	$1 + 5 = 6$	$25 > 6 (D)$
11	1	$11 > 1 (D)$		26	$1 + 2 + 13 = 16$	$26 > 16 (D)$
12	$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$	$12 < 16 (A)$		27	1	$27 > 1 (D)$
13	1	$13 > 1 (D)$		28	$1 + 2 + 4 + 14 + 7 = 28$	$28 = 28 (P)$
14	$1 + 2 + 7 = 10$	$14 > 10 (D)$		29	1	$29 > 1 (D)$
15	$1 + 2 + 3 + 5 = 11$	$15 > 11 (D)$		30	$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42$	$30 < 42 (A)$
Nas classes use D para deficiente; P para perfeito e A para abundante. Faça com bastante atenção.						
O que podemos conjeturar a respeito: a) Dos números primos? b) dos números abundantes?						

Fonte: Produzido pelo autor

A ideia de utilizar os trinta primeiros números naturais³⁰, sendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, repousa em considerar que, neste quantitativo, aparecerão dois números perfeitos³¹ (6 e 28) e cinco números abundantes (12, 18, 20, 24, 30), suficientes para se fazer as conjeturas pedidas no rodapé do cartão.

³⁰ Omitiremos o zero como sendo número natural. Nosso posicionamento é subsidiado pelos fundamentos da Análise Real, em especial os Axiomas de Peano, a saber: “O conjunto \mathbb{N} é caracterizado pelos seguintes fatos: 1. Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se *sucessor* de n ; 2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; 3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$ ” (LIMA, 2012, p. 1, grifo do autor).

³¹ A título de curiosidade, os únicos números perfeitos abaixo de 10 000 são: 6, 28, 496 e 8128. (MORAIS FILHO, 2012).

Inicialmente, o professor deverá explicar que uma conjectura é algo que podemos inferir, ou deduzir, sendo evidências incompletas, porém que possuem sentido lógico. No item *a* (O que podemos conjecturar a respeito dos números primos?) fica evidente que todo número primo é deficiente. Percebe-se também, a raridade dos números perfeitos, daí as crenças envolvidas neles, como a criação do mundo em seis dias. No item *b* (O que podemos conjecturar a respeito dos números abundantes?) é possível perceber que todos são pares.

O professor deverá mediar toda a ação, incitando a investigação do aluno e “mesmo se algumas conjecturas não forem resolvidas, será uma oportunidade valiosa de discutir com o aluno o tipo de evidências que apoiaria ou não estas conjecturas” (FOSSA, 2012, p. 71). Assim, conjecturar com o aluno, estimula o raciocínio indutivo, o que o faz perceber algumas características peculiares dos números. Acreditamos, que a nível fundamental, a falta de uma demonstração formal não é um fator complicador ou excludente da proposta.

Por fim, com o intuito de formalizar alguns aspectos em Álgebra, fazendo conexão com os números *perfeitos*, *abundantes* e *deficientes*, apresentamos a última proposição do nono livro “Os Elementos” de Euclides. Tal proposição é necessária para a discussão acerca de incógnita e variável, por meio de representação algébrica moderna. A proposição diz: “Se $2^n - 1$ é um número primo, então $(2^n - 1)(2^n - 1)$ é um número perfeito. De fato, tratamos de um conjunto variável, haja vista que n pode assumir infinitos valores, ou seja, não está restrito a valores que tornam a sentença algébrica verdadeiramente válida. Como contraexemplo para esta explanação, consideramos a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$ e b e c números reais), para $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$, que pode ser entendida como a proposição $p: x^2 - 6x + 5 = 0$, cujo valor lógico será verdadeiro $\forall x \in \mathbb{R}$ obedecendo a restrição que x pertença necessariamente ao conjunto $V = \{1, 5\}$. Os números 1 e 5 são as incógnitas que tornam a proposição p logicamente válida. Em suma: Somente 1 e 5 são aceitos como resposta (para a referida equação) – incógnitas –, enquanto que para a proposição de Euclides, ambas sentenças admitem infinitos valores – variáveis.

Retomando a proposição de Euclides, o termo antecedente “Se $2^n - 1$ é um número primo...” está condicionado ao conseqüente “... então $(2^n - 1)(2^n - 1)$ é um número perfeito”. Cabe aos alunos a interpretação do enunciado da proposição e a sua resolução, observando o conjunto infinito de variáveis. Denotaremos o conjunto dos números Primos por N_p .

- Tomando $n = 1 \Rightarrow 2^n - 1 = 1 \notin N_p$. Logo, é impossível dar continuidade no termo consequente.
- Tomando $n = 2 \Rightarrow 2^n - 1 = 3 \in N_p$. Para descobrir o número perfeito, basta darmos continuidade: $(2^{n-1})(2^n - 1) = (2^1)(3) = 6$ e 6, como já averiguado na tabela, é um número perfeito.
- Tomando $n = 3 \Rightarrow 2^n - 1 = 7 \in N_p$. Logo, o número perfeito associado à variável $n = 3$, será: $(2^{n-1})(2^n - 1) = (2^2)(7) = 28$ e 28, como já averiguado na tabela, é um número perfeito.
- Tomando $n = 4 \Rightarrow 2^n - 1 = 15 \notin N_p$. Logo, é impossível dar continuidade no termo consequente.

A partir dessas e de outras observações colocadas pelo professor, o aluno poderá estabelecer as suas considerações, bem como, compreender a importância das variáveis e da representação algébrica na Matemática.

Como já explicado no capítulo 4, o método de coleta de informações foi operacionalizado por meio do Diário de Aprendizagem. A escrita ocorreu sempre no final da aula. A fim de não ficar repetitivo, omitiremos esta informação nas próximas caracterizações das ações pedagógicas.

5.1.2 Caracterização da segunda ação pedagógica

A segunda ação pedagógica enfatizou a Matemática da Antiguidade Oriental: Egito e Mesopotâmia. Na minha ótica de pesquisador e professor de Matemática, considero pertinente apresentar, em consonância essas duas matemáticas produzidas, haja vista a sua quase simultaneidade e as suas aproximações no modo de pensar (mesmo se tratando de povos separados fisicamente eles desenvolveram uma Matemática pautada na indução e na observação, ambas apresentando, em alguns momentos, aproximações com a Álgebra – cerne desse trabalho). Portanto, apresentar o pensamento sumério e egípcio é algo importante para o pensamento discente, mostrando aos aprendizes a amplitude e a vastidão do conhecimento matemático que fora produzido.

É interessante que nas ações pedagógicas os slides (quando forem pertinentes para a aula) sejam bem ilustrativos, retratando não só mapas, mas também, os artefatos culturais, abordagens que possam fazer conexões com a atualidade, além de, apresentar as fontes que foram produzidas e que serviram como *substância essencial* para a perpetuação e compreensão das matemáticas produzidas há milênios atrás. Ou seja, deve-se dar realce não só a matemática pura, mas sim, na sua completude como algo originado das ações e reflexões das civilizações humanas, dotadas de aspecto cognitivo e de uma escrita que a fundamentou e proporcionou constituir conhecimento. (RADFORD, 2011), (AABOE, 2013).

No sentido da importância das fontes e da vulnerabilidade de algumas (em especial as egípcias), considero importante ao leitor rememorar algo já previamente dito neste texto e, agora, alicerçado no que diz Garbi (2010, p. 11)

É difícil saber se foram os egípcios ou os sumérios os primeiros a produzir escritos de natureza matemática. É fato que os mais antigos documentos indubitavelmente matemáticos que chegaram até nós são tabletas sumérias de barro cozido, datando de aproximadamente 2200 a.C., mas como os egípcios escreviam sobre papiros facilmente *degradáveis*, eles podem ter produzido documentos ainda mais antigos e que se perderam. É preciso lembrar, entretanto, que existem tabletas sumérias de cerca de 3 500 a. C., quando ainda eram usados símbolos anteriores aos cuneiformes, que já traziam registros numéricos.” (p. 11, grifo nosso).

No momento oportuno desta aula, é interessante que o professor destaque a fragilidade das fontes egípcias e aponte os motivos pelos quais as fontes sumérias sobreviveram de modo mais “intacto” em relação aos registros do período faraônico.

É sugestivo que o professor inicie a aula explorando alguns poucos aspectos históricos dessas duas civilizações, com a apresentação de mapas, imagens que retratem o hoje dessas localidades, dentre outras julgadas pertinentes. No caso específico, sugiro iniciar fazendo um apontamento acerca das características mesopotâmicas, sua sociedade e, principalmente, os seus registros matemáticos.

Durante esta aula, mostrar materiais manipulativos concretos que representem os objetos históricos apresentados em slides, certamente tornará a abordagem mais fidedigna ao pensamento, pois, mesmo que não se compreenda a semântica ali contida, é possível perceber a cultura de um povo traduzida em artefatos que os caracterizam. Assim sendo, a utilização de materiais manipulativos trazem à sala de aula uma representação do pensamento, que

(esperamos) ao menos incentive o aluno a continuar com atenção na apresentação do assunto. Além disso, em aulas que contemplem o binômio História-Matemática, é interessante utilizar “[...]materiais manipulativos sempre que necessário” (MENDES, 2009c, p. 109).

Num primeiro momento, após uma rápida explanação acerca da cultura mesopotâmica, o professor (autor-pesquisador) apresentou aos alunos uma réplica de duas tabletas de argila: YBC 7289 e Plimpton 322. Podemos ver as réplicas nas figuras abaixo:

Figura 13 – Réplica da Tableta YBC 7289



Fonte: Material do autor-pesquisador

Em síntese, as tabletas babilônicas são catalogadas mediante as coleções que as contêm: YBC significa *Yale Babylonian Collection* (Coleção de Tablet as babilônicas da Univesidade de Yale), e, 7289, significa que ela foi a peça catalogada nesta posição. Ela mede cerca de 5 cm de diâmetro. Esta tableta mostra de modo bem convincente uma aproximação para $\sqrt{2}$, por meio da diagonal de um quadrado³² (ROQUE, 2012), (AABOE, 2013). Todas essas tabletas foram escritas em notação sexagesimal com a escrita cuneiforme.

³² É possível através desta simples tableta que contém uma figura e três números, observar que os babilônios sabiam que a diagonal de uma quadrado é $\sqrt{2}$ vezes o seu lado; isso implica que eles tinham conhecimento pelo menos de uma caso especial do que hoje chamamos de Teorema de Pitágoras, o que nos fundamenta a dizer que o termo “Teorema de Pitágoras” é algo equivocado, os babilônios usavam o “teorema” na sua forma mais geral. (AABOE, 2013)

Figura 14 – Réplica da Tableta Plimpton 322

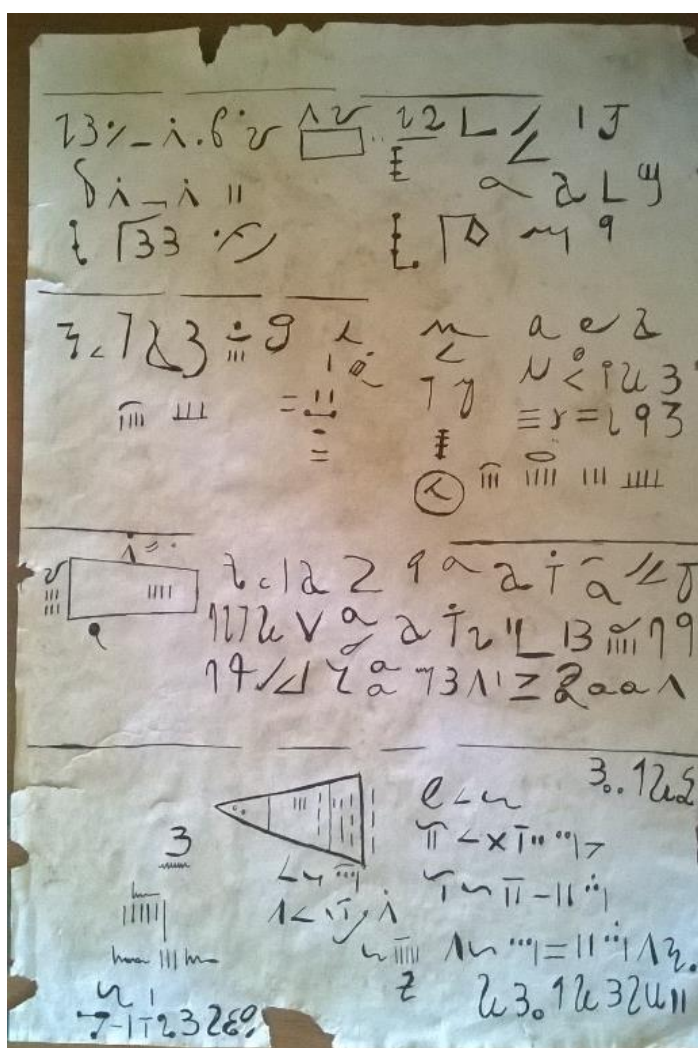


Fonte: Material do autor-pesquisador

A nomenclatura Plimpton 322 segue o mesmo padrão da anterior, porém, ela faz parte da coleção de G. A. Plimpton da Universidade de Columbia. Assim como a anterior, a tablete Plimpton trata do que hoje é possível ser resolvido como o Teorema de Pitágoras. Ela possui quatro colunas e quinze linhas. A primeira coluna representa a posição de cada linha (1, 2, 3, ...) e as demais se completam formando ternos pitagóricos (segundo historiadores, poucas linhas não correspondem a tais ternos, isso pode ter ocorrido pela imprecisão da leitura e/ou transcrição). (KATZ, 2010) e (AABOE, 2013).

Após a exposição dessas fontes, apresentamos a sociedade egípcia (com mais ênfase do que a dada na sociedade anterior). Apresentação de aspectos culturais, bem como algumas curiosidades. Apresentação do Papiro Rhind e a sua importância para a Matemática. Para tanto, julgamos interessante lançar mão, mais uma vez, de materiais manipulativos. Neste caso, sugiro réplicas do papiro, a fim de que os alunos possam conhecer fontes parecidas com as originais e como a matemática era praticada e *registrada* em cada cultura.

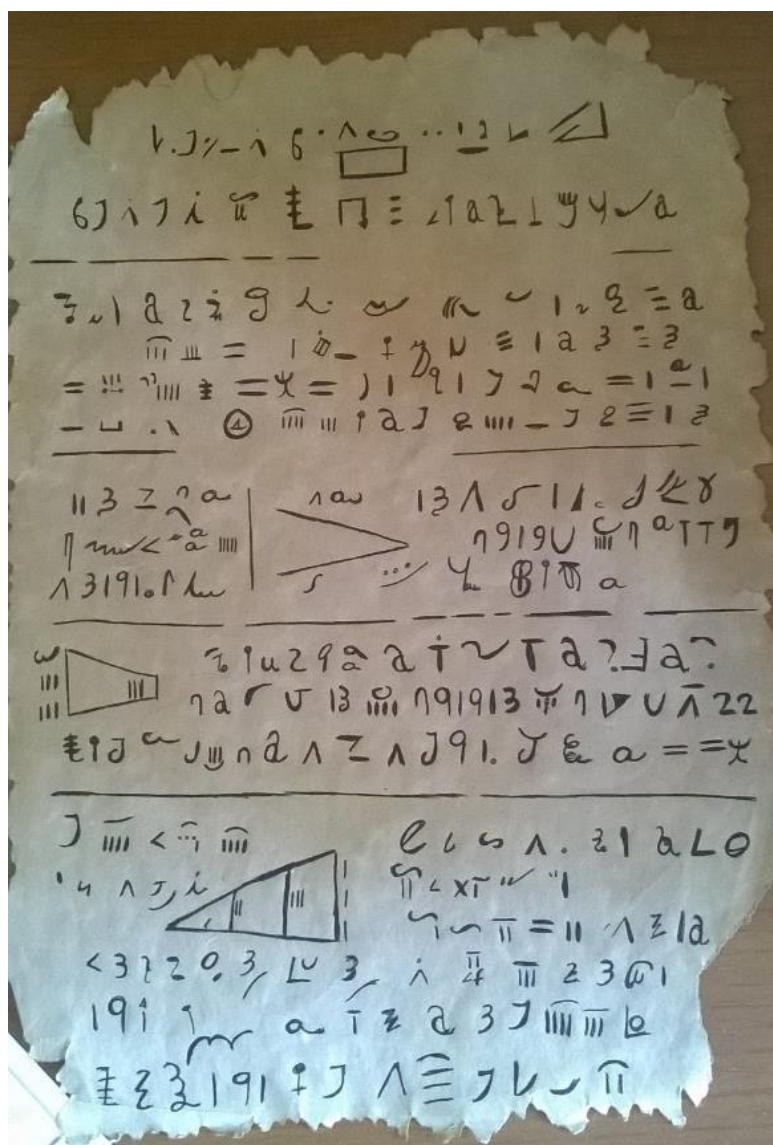
Figura 15 – Primeira Réplica do Papiro Rhind



Fonte: Material do autor-pesquisador

E uma segunda réplica, também produzida e levada à sala de aula.

Figura 16 – Segunda Réplica do Papiro Rhind



Fonte: Produzido pelo autor-pesquisador

Após a apresentação das réplicas de fontes primárias, foram feitos alguns breves comentários a respeito de faraós, da escrita e do sistema de numeração. O início do pensamento matemático culminou mediante a apresentação do sistema egípcio de multiplicação, de sua análise e conversa com os alunos acerca desse sistema. Teoricamente, o algoritmo egípcio para a multiplicação³³, pode ser enunciado da seguinte maneira:

- O algoritmo egípcio para a multiplicação baseava-se num processo de duplicações sucessivas.

³³ Uma explanação mais completa foi feita em 3.2.2.

- Para multiplicar dois números a e b o escriba registraria primeiro o par 1, b . Depois duplicaria sucessivamente cada número do par, até que a duplicação seguinte levasse o primeiro elemento a exceder a .
- Posteriormente, tendo determinado as potências de 2 que somados são iguais a a , o escriba adicionaria os múltiplos correspondentes de b para obter a resposta. (KATZ, 2008).

Sugerimos que o professor interprete com o aluno o enunciado, ainda em notação egípcia, e que resolva o seguinte exemplo: $12 \cdot 13$ (transladado para notação atual).

<i>12</i>	<i>13</i>
1	13
2	26
\4	52
\8	104
Total: \12	\156

Logo, $12 \cdot 13 = 156$

Após observar esse novo método de multiplicação que utiliza apenas duplicações sucessivas, os alunos, em duplas, resolveram quatro multiplicações sugeridas pelo professor. As multiplicações aqui sugeridas são as que constam no Plano de Aula do Apêndice B, e estão resolvidas a seguir.

a) $17 \cdot 12$

<i>17</i>	<i>12</i>
\1	12
2	24
4	48
8	96
\16	192
Total: \17	\204

$17 \cdot 12 = 204$

Pela fatoração, vemos que $17 = 1 + 16 = 2^0 + 2^4$. Logo, $17 \cdot 12 = (2^0 + 2^4)12 = 12(2^0) + 12(2^4) = 12 + 192 = 204$

Com esta atividade o professor pode, dentre outras abordagens (como potências de 2 e fatoração, por exemplo), explorar a *comutatividade*. Vejamos:

a.1) $12 \cdot 17$

12	17
1	17
2	34
\4	\68
\8	\136
Total: \12	\204

Pela fatoração, observamos que: $12 = 4 + 8 = 2^2 + 2^3$. Logo, $12 \cdot 17 = (2^2 + 2^3)17 = 17(2^2) + 17(2^3) = 68 + 136 = 204$. O que nos mostra que $17 \cdot 12 = 12 \cdot 17$, generalizando temos que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tem-se $ab = ba$. É interessante explorar com os alunos, que a propriedade comutativa é válida, de modo geral, para números reais, e que, o grupo das matrizes, por exemplo, não goza dessa propriedade.

b) $135 \cdot 2$

135	2
1	2
2	4
[...]	[...]

Nesta situação, é oportuno notar que a comutatividade funcionará de modo a otimizar cálculos. Faremos então $2 \cdot 135$.

2	135
1	135
\2	\270
Total:	\270

Logo, $2 \cdot 135 = 135 \cdot 2 = 270$

c) $250 \cdot 21$

250	21
1	21
2	42
[...]	[..]

Análogo à (b).

21	250
\1	\250
2	500
\4	\1000
8	2000
\16	\4000
Total:	\5250

$250 \cdot 21 = 5250$

d) $28 \cdot 48$

28	48
1	48
2	96
\4	\192
\8	\384
\16	\768
Total:	\1344

Esta aula teve como pretensão possibilitar que o aluno se envolvesse com novos modos de pensar matematicamente. Ao mesmo tempo em que ela aproxima o aluno de outras abordagens para a Matemática, também pode, em alguns casos, distanciar a visão estática, da existência restrita de um único algoritmo para o cálculo.

5.1.3 Caracterização da terceira ação pedagógica

Esta ação pedagógica teve como principal finalidade colocar o aluno frente aos problemas de *aha*. Para isso, apresentamos a representação matemática de *aha* (o ente desconhecido, a “incógnita”) em hieróglifos. A imagem foi mostrada ampliada numa colagem em cartolina. A metodologia foi baseada em aula expositiva e dialogada, com exploração dos entendimentos e significados. Os problemas foram entregues impressos aos alunos.

Num primeiro momento pedi aos alunos que resolvessem o problema 14 do Papiro Rhind (*Uma quantidade e seu 1/7 somados fazem 19. Qual a quantidade?*) pelo método que achassem mais conveniente. Nesta situação, o professor pode, por meio de uma postura dialógica, conversar com os alunos na busca de soluções para o problema. Algumas sugestões: tentativa e erro e formulação contemporânea por meio da resolução de equações.

Após esse primeiro contato com os problemas de *aha*, demos ênfase ao método da falsa posição. Depois, discutimos com os alunos a possibilidade de generalizar matematicamente a falsa posição por intermédio de uma fórmula utilizando os valores verdadeiros e falsos, como já visto no capítulo 3.

Solicitamos aos alunos que resolvessem os demais problemas utilizando os conhecimentos construídos em sala de aula.

5.1.4 Caracterização da quarta ação pedagógica

A quarta ação pedagógica teve como principal objetivo analisar as interfaces possíveis entre os problemas de *aha*, previamente estudados, juntamente com a noção intuitiva de função.

Esta aula também foi expositiva e dialogada. De início, trouxemos os assuntos históricos trabalhados anteriormente para reforçar e contextualizar o ente matemático envolvido. Posteriormente utilizamos a expressão $2^n - 1$ (parte da proposição de Euclides) com o intuito de reforçar a questão da variável. Associamos a expressão a uma função do tipo $y = f(x) = 2^n - 1$, e fizemos a representação geométrica, relacionando domínio e imagem. A todo o momento, com investigações previamente feitas (instigando aos alunos), o professor poderá comentar acerca da história das funções e como ela se desenvolveu ao longo do tempo.

No momento seguinte, nos apropriamos de uma função polinomial do primeiro grau do tipo linear (Sugestão: $f(x) = 3x$) e exploramos o domínio, imagem, representação gráfica e reforçamos que funções do tipo $y = f(x) = ax$ ($a \neq 0$), passam, necessariamente, pelo ponto $O(0,0)$ – origem do sistema coordenado. A seguir, exploramos os problemas de *aha* sob a ótica de uma função polinomial do primeiro grau do tipo linear (para o problema 24, teríamos: $y = x + \frac{1}{7}x = 19$). A partir de então, utilizamos um valor falso (domínio) para a obtenção da imagem, construindo no plano cartesiano triângulos semelhantes. A partir daí o valor desconhecido pode ser encontrado.

Feitas essas ponderações, juntamente com a leitura da seção 3.2.2 e dos Planos de Aula em apêndice, vejamos como as pretensões e objetivos, se concretizaram nas análises.

5.2 ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES

Nesta seção, analisamos as ações propostas e realizadas. Em especial, o seu potencial em sala de aula e evocamos, como reforços, argumentos de autores que vão ao encontro das perspectivas aqui explicitadas. As ações envolveram alunos de duas turmas de nono ano (9º B e C).

5.2.1 Análise da primeira ação pedagógica

A análise aqui apresentada se reporta ao Nono ano “B”, ocorrida dia 27/10/2015. De acordo com a professora regente, a turma tem bastante empenho nas tarefas diárias, com algumas

exceções. De início me apresentei³⁴ à turma e comentei acerca da proposta. Eles se mostraram receptíveis e participativos desde o primeiro momento. Logo em seguida, dei início à aula.

Nesse começo busquei uma conversa informal, fazendo questionamentos do tipo: *A Matemática possui história? Ela foi criada ou descoberta?* Para a primeira pergunta, foi unânime a resposta de que a Matemática possui história. Quando questionados a *qual história* eles se referiam, emergiram respostas do tipo: *O Teorema de Pitágoras, quem criou foi Pitágoras; O Teorema de Tales, criado por Tales de Mileto*. Tais respostas nos levam a perceber a associação íntima entre Matemática e biografias. Cabe dizer que, a HM, em muitas situações escolares, fica reduzida a essa porção pífia, pautada em assuntos episódicos e biográficos, por vezes lendários, com pouco impacto no conhecimento cognitivo (FOSSA, 2012). Percebemos, também, a presença do aspecto evolucionista linear, onde a Matemática se apresenta vinculada a pensamentos encadeados e subjacentes a uma cronologia linear (MIGUEL; MIORIM, 2008). Nesta perspectiva – *Evolucionista Linear* – a causa e consequência são tomadas como uma máxima, e aspectos correlacionados são, em sua maioria, ignorados. Com efeito, o conhecimento histórico matemático perde a sua tônica dialética.

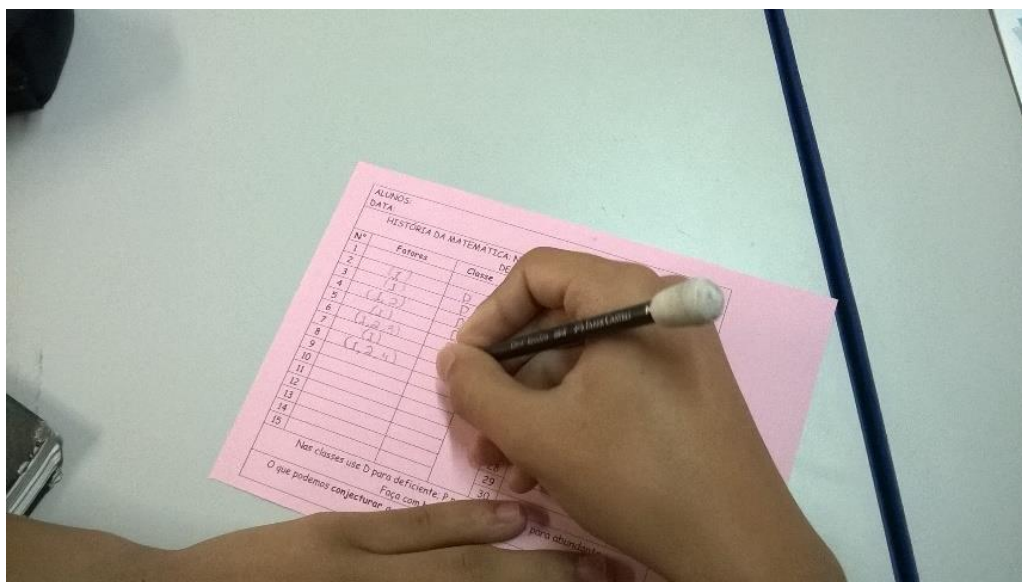
Quanto à segunda pergunta – *Ela [a Matemática] foi criada ou descoberta* – ocorreram pontos de divergência, sendo que a maioria considerou a Matemática como algo descoberto, pois, como argumentaram: *Ela sempre existiu, desde os tempos mais remotos para as atividades básicas*.

A aula continuou com apresentação dos slides acerca da Matemática grega antiga. Os alunos mostraram bastante interesse e curiosidade. Comentei acerca dos números perfeitos, deficientes e abundantes. Questionei acerca dos divisores e divisores próprios de um número. Logo em seguida, com os alunos divididos em duplas, entreguei o cartão que deveria ser preenchido com os divisores próprios dos números explicitados, para uma posterior categorização (deficiente, abundante e perfeito). Somente uma pequena parcela da turma teve dificuldade nessa categorização.

³⁴ Nos itens de análise das ações pedagógicas mudaremos para a primeira pessoa do singular ao tratar das ações do pesquisador-professor nas turmas (com os sujeitos de pesquisa).

Durante a realização dessa tarefa um aluno perguntou se todos os números primos são deficientes. Essa observação, com base indutiva e empírica, evidenciou a HM como algo que promove a investigação em Matemática, servindo de embasamento para a teoria imbuída pela Matemática. Observamos que, a HM funciona “[...] como um agente fomentador do ato cognitivo em sala de aula” (MENDES, 2009c, p. 107). A dificuldade maior, em grande parte da turma, foi na categorização do número 1 enquanto deficiente (o que nos mostra a figura abaixo. A aluna “pulou” o número 1 para resolver os outros). Cabe aqui ressaltar o alto empenho dos alunos na realização das tarefas e a sua curiosidade em perguntar.

Figura 17 – Aluna Completando a tabela



Fonte: Material do autor-pesquisador

Tais curiosidades não ficaram presas apenas à Matemática. Um aluno, por exemplo, fez a seguinte pergunta: “*Os gregos exaltavam o deuses?*” Respondi que sim, completando que tal exaltação e misticismo eram refletidos nas ciências como um todo, em particular na Matemática. Assim, vemos a HM articulada às curiosidades, não só internas às manipulações numéricas, mas também, na história da construção do pensamento grego. (BROLEZZI, 2014).

Por fim, comentamos rapidamente acerca de variável e incógnita por intermédio da expressão $(2^n - 1)(2^n - 1)$. Tal assunto foi retomado na aula seguinte.

Quanto à escrita no Diário de Aprendizagem, a maioria dos alunos disse ter gostado da aula e o modo “diferente” como a Matemática foi apresentada. Muitos argumentaram desconhecer o “conteúdo” ensinado. Uma aluna escreveu em seu diário que gostou muito da aula porque não conhecia esse conteúdo, apesar de já saber da importância dos gregos para a Matemática.

Completo afirmando que com a aula ela conseguiu ter uma noção mais ampliada da história em si. Isso denota que, os alunos carregam em si abordagens conteudistas (no sentido de darem destaque ao conteúdo e acharem que os assuntos trazidos devem, necessariamente, fazer parte de um rol de conteúdos previamente estabelecidos no currículo). Essa percepção conteudista, transmitida aos alunos por intermédio de professores, pode ser ratificada pela escrita de diversos alunos: “O assunto abordado foi ótimo, não recordava esse assunto [...] os exercícios são objetivos e exigem o entendimento da matéria, não houve pontos negativos”; “Foi bem interessante o conteúdo, eu nunca tinha estudado”; “Gostei da aula, pois teve várias coisas interessantes, pois não conhecia a matéria”.

Durante a aula a verbalização dialógica foi mais rica do que na escrita, pois ao escreverem os alunos queriam mostrar a sua opinião referente ao assunto matemático e ao “novo conteúdo nunca antes estudado”. No diálogo surgiram perguntas (como já descrito anteriormente) de cunho histórico, se reportando a algumas curiosidades e especificidades, ao contrário da escrita, na qual muito se limitaram ao objeto matemático e não enfatizaram tanto a sua história simbiótica.

É interessante destacar o que escreveu uma aluna: “Gostei bastante porque foi uma aula bem diversificada”. Neste sentido, observamos a importância de variações didáticas nas aulas de Matemática. Recursos diferenciados devem ser levados com a finalidade de potencializar a atenção e o conhecimento. A HM, aqui apresentada e sugerida como um recurso didático, é uma entre tantas outras tendências no âmbito da EM. Sua utilização, atrelada a outros recursos (como as mídias digitais) poderá promover uma nova percepção a fim de proporcionar mudanças no pensar em relação à disciplina.

Quanto ao 9º C, a turma também reagiu com entusiasmo à proposta. Praticamente todos se empenharam na resolução das tarefas. Surgiram dúvidas do tipo se 1 é número primo, e não mostraram, em sua maioria, dificuldade em diferenciar incógnita de variável.

Com a atividade de preenchimento da tabela, um grupo de alunos conseguiu conjecturar que todo número primo é deficiente. Notamos nessa turma um envolvimento bastante interessante nas tarefas. A tabela foi completada bem rapidamente.

Quando questionados se a Matemática foi criada ou descoberta, a maioria respondeu que ela foi descoberta, pois, de acordo com um aluno, “o homem sempre precisou fazer uso dela, por isso foi descoberta”.

Figura 18 – Panorama geral da sala de aula



Fonte: Material do autor-pesquisador

Vejam os comentários feitos pelos alunos em seus diários de aprendizagem: Uma aluna disse: “Foi bem legal ver os matemáticos e as fórmulas como resolvem problemas. Bom saber a diferença entre números perfeitos, deficientes e abundantes”. Esta frase nos mostra a carência dos alunos em reconhecer a gênese e o processo de pensar matemático em questão. Elenca também a importância da familiarização gradativa com métodos históricos, como contempla a teoria da objetificação de Radford (2011).

Outro aluno achou a aula interessante e de certa maneira, motivacional: “Achei interessante o método dos números perfeitos, abundantes e deficientes, gostei muito, todas as salas deveriam passar por essa mesma experiência”. Uma aluna considerou boa porque trouxe para ela coisas novas que ela não sabia, como os números estudados no dia.

A palavra “interessante” apareceu com frequência na escrita dos diários. Fato que nos leva a crer que a História da Matemática, pode, num primeiro momento, funcionar como algo atrativo e motivacional, dando à Matemática um aspecto realmente *interessante*. Essa perspectiva é ressaltada, como vimos, por Miguel e Miorim (2008).

5.2.2 Análise da segunda ação pedagógica

De um modo geral a turma (9º Ano B) reagiu bem à proposta. A turma é bastante motivada e realizou com zelo as atividades. Durante a exposição histórica do Egito e Mesopotâmia, os alunos ouviram com atenção, fazendo perguntas no decorrer na explanação.

A apresentação dos materiais manipulativos foi o auge da aula. Olhares fixos naquilo sem um aparente significado mostrou para mim, quanto pesquisador, o quão enriquecedor pode ser a apresentação dessas fontes históricas³⁵.

A discussão acerca da distinção entre incógnita e variável ocorreu mediante a primeira parte da fórmula de Euclides ($2^n - 1$). A partir dela, discutimos acerca do que é uma variável (presente nas funções, por exemplo) e incógnita (solução de uma equação).

Após a apresentação histórica, mostrei aos alunos o algoritmo da multiplicação egípcio.

Iniciei com o produto de 12 por 13. Chegamos na seguinte representação:

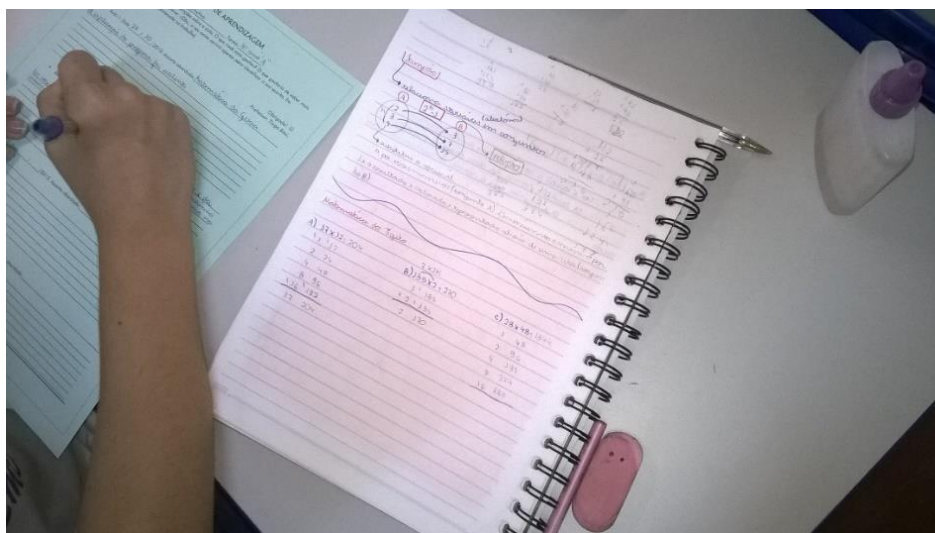
12	13
1	13
2	26
\4	\52
\8	\104
16	208
Total: \12	\156

A resolução feita por mim no quadro foi exatamente como representada acima. Nota-se um “erro” ao duplicar o 8 (não havia necessidade, uma vez que 16 extrapola o 12). Contudo, isso deu margem a uma descoberta bastante relevante de um aluno, que, segundo a professora regente da classe, tem bastante dificuldade em Matemática. Ele observou que $12 = 16 - 4$, logo, $12 \cdot 13 = 208 - 52 = 156$. Assim, observamos mediante uma tarefa bastante simples, a libertação de amarras algorítmicas impostas pela formulação contemporânea algébrica, e de

³⁵ “Ser historiador do passado ou do presente, além de outras qualidades, sempre exigiu erudição e sensibilidade no tratamento de fontes, pois delas depende a construção convincente de seu discurso” (JANOTTI, 2006, p. 10). São exemplos de fontes históricas: Cartas, diários, manuscritos, resenhas, filmes, entrevistas, questionários, instrumentos, máquinas, aparelhos, e etc. As fontes assumem um caráter de universalidade, porém, a seleção de fontes e a sua interpretação estão associadas ao momento e ao grau de desenvolvimento, o que nos induz a perceber o caráter dinâmico pelo qual a História da Ciência está inserida (D’AMBROSIO, 2004).

como a HM pode promover mudanças no exercício cognitivo do aluno. (MENDES, 2009a). Durante a realização das multiplicações que foram propostas, notei zelo na sua realização. A maioria teve dificuldade em perceber a praticidade da comutatividade em alguns casos. Com esta atividade percebemos que a construção, reconstrução e compreensão do pensar matemático ocorreu na reflexão sobre o próprio pensar, uma vez que, “[...] o formalismo surge naturalmente em resposta ao refinamento e precisão das ideias” (FOSSA, 2012, p. 93). Ideias como a de comutatividade e de observação de padrões lógicos, foram refinadas perante uma investigação em HM. As atividades foram corrigidas no mesmo dia com a ajuda dos alunos.

Figura 19 – Aluna resolvendo as multiplicações



Fonte: Material do autor-pesquisador

A escrita nos diários mostrou o entusiasmo dos alunos. Muitos afirmaram que a aula foi boa, pois descobriram um novo método de multiplicar. Mas, uma aluna lamentou não ter compreendido o método de multiplicação egípcio. Outro aluno mencionou que na aula “foi mostrado os primórdios da Matemática”. Enquanto outra aluna expressou-se assim: “Aprendemos sobre a Matemática ‘descoberta’ pelos egípcios e várias curiosidades da época bem interessantes” (a aluna usou aspas na palavra ‘descoberta’, o que a meu ver, pode ser fruto das discussões feitas na primeira ação pedagógica). Uma aluna assegurou que gostou muito de saber como os egípcios e mesopotâmicos trabalhavam com a Matemática, e que, os documentos trazidos pelo professor ajudaram a ter uma noção bem melhor de como esses povos “estudavam matemática”.

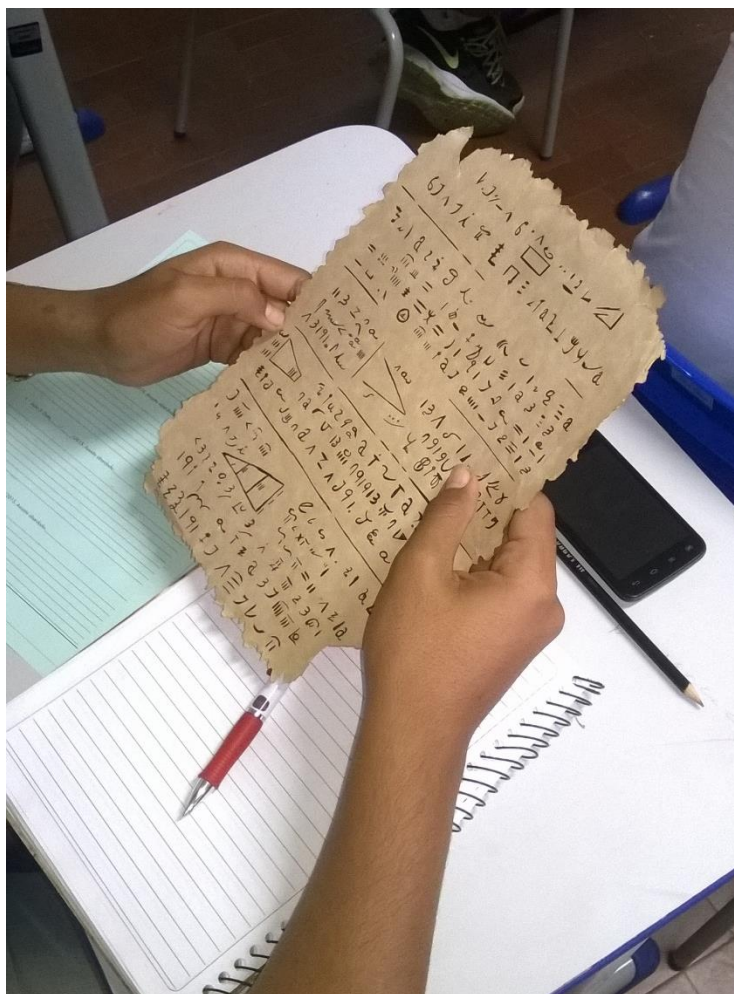
Para o 9º C, na atividade envolvendo o algoritmo da multiplicação, eles não observaram a possibilidade de $16 - 1$. Apenas com a intervenção do professor-pesquisador eles conseguiram compreender essa possibilidade. Destacamos as seguintes asserções nos comentários analíticos dos alunos: “A 2ª aula eu gostei muito, achei interessante, pois, aprendi como os egípcios multiplicavam antigamente o que é bem diferente de como estamos acostumados a multiplicar”. “Aprendemos como a Matemática era no Egito e na Mesopotâmia, eles faziam os cálculos diferentes que nós”. Estes comentários mostram o modo enriquecedor como a Matemática pode ser apresentada a nossos alunos, enaltecendo o convívio múltiplo entre distintas maneiras de resolver uma multiplicação simples. Para os alunos, a Matemática de hoje parece estática, e com esses procedimentos eles conseguiram verificar que ela passou por mudanças e “aperfeiçoamentos”.

Uma aluna disse que gostou da aula, porém achou um pouco mais complicado resolver as contas utilizando o procedimento egípcio. Uma outra aluna, também mostrou entusiasmo e interesse no método matemático, pois, para ela foi possível aprender a calcular como antigamente e que essa maneira de resolver multiplicação é bem diferente da qual estamos habituados. Um aluno expôs que “No Egito eles usavam uma maneira diferente para resolver uma multiplicação, a forma atual é melhor e mais prática, mas a maneira que resolviam era interessante”. Essa afirmativa nos mostra como a formulação contemporânea da Matemática está presente na concepção dos alunos.

Um grande número de alunos mostrou-se surpreso com esse modo egípcio de calcular. Pois não estavam acostumados com essa Matemática “diferente”. O termo diferente foi usado repetidas vezes nos diários. Na resolução das multiplicações apenas dois alunos notaram a conveniência de usar 2×135 do que 135×2 . Aproveitando, a propriedade comutativa foi discutida em sala de aula.

Com esta aula, os alunos entenderam uma maneira historicamente concebida de se operar com os números. A grande maioria considerou este método interessante. Houve empenho das turmas na resolução e na novidade (para eles) da representação dos produtos.

Figura 20 – Aluno observando a réplica do Papiro Rhind



Fonte: Material do autor-pesquisador

Com as aulas foi possível desmistificar certas percepções até então tidas como imutáveis na Matemática, como o processo da multiplicação. Os alunos puderam conhecer um novo método de multiplicar e também raciocinar acerca das propriedades elementares dos números reais. De acordo com o relato da professora regente de classe, um aluno, que pediu sigilo em sua identificação, usou por diversas vezes em provas de Matemática posteriores o algoritmo histórico trabalhado comigo. Segundo a professora, ele achou o método mais fácil e conseguiu realizar com maior sucesso a multiplicação.

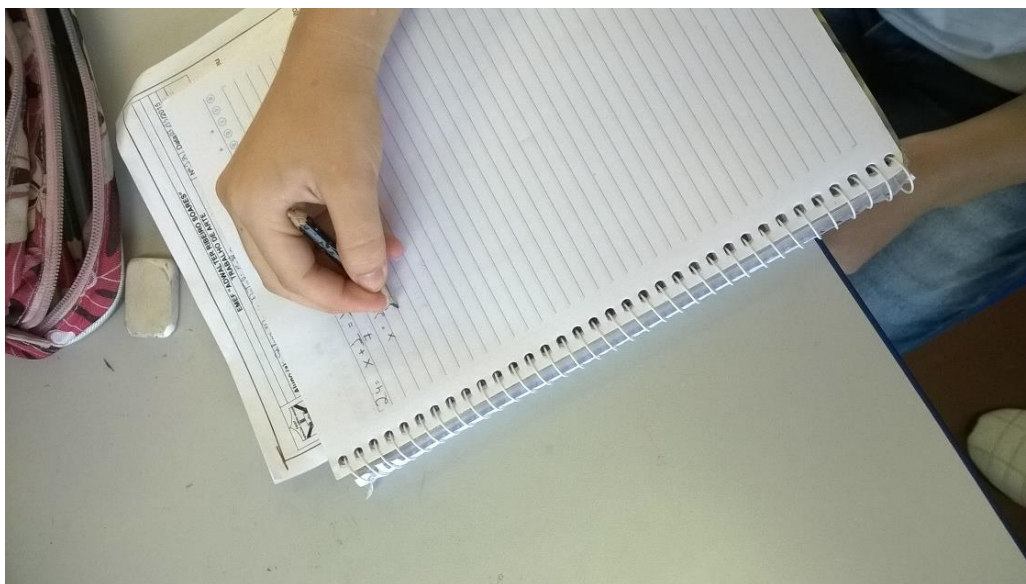
5.2.3 Análise da terceira ação pedagógica

Nesta terceira ação pedagógica, no 9º B, a álgebra foi representada por intermédio dos problemas de aha (problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro Rhind).

Ao pedir que solucionassem o problema 27 do modo que achassem melhor, todos tentaram escrever o problema numa representação algébrica atual. Isso nos evidencia como a Matemática vem sendo apresentada sem contextualizações.

Grande parte dos alunos tiveram dificuldade em interpretar a segunda parte do problema, onde se fazia menção a $1/7$ de aha. Os erros estavam associados à seguinte representação em seus cadernos: $x + 1/7 = 19$. Muitos alunos não conseguiam perceber que o $1/7$ estava associado ao valor desconhecido, aha.

Figura 21 – Aluna resolvendo problema de aha



Fonte: Material do autor-pesquisador

Quando questionei à sala qual o melhor valor para utilizar nas equações de aha a fim de que a fração fosse “eliminada”, uma aluna de imediato disse: “Qualquer divisor de sete”. No diálogo com essa aluna, percebi que o que ela gostaria de ter dito seria o equivalente a “qualquer múltiplo de sete”.

Durante a interpretação do método da falsa posição (“receita” para solução de uma equação linear) os alunos não mostraram dificuldade em interpretar a “fórmula”. A dificuldade maior foi a de encontrar os valores falsos de x .

No diário de aprendizagem, uma aluna disse que “no começo foi um pouco complicado a explicação pois foram novidades, mas deu para aprender”. Nesse sentido, Miguel e Miorim

(2008) apontam que romper com métodos tradicionais e a emergência gradativa de métodos culturais de manifestação da matemática corroboram para um aprendizado da Matemática, não unicamente como uma disciplina de cálculos, mas como algo imbuído de história. Essa percepção também é compartilhada por Radford (2011).

Um aluno escreveu que gostou de conhecer as várias maneiras de resolver um único problema encontrando um mesmo resultado. Já um outro aluno registrou que “hoje aprendemos uma fórmula muito interessante e estou cada vez mais ganhando conhecimento matemático [...]”

Uma aluna disse que achou “muito interessante os diferentes modos de calcular as equações”. Nesses registros, observamos que os alunos consideram a HM como algo interessante e diferenciado das aulas tradicionais.

Uma aluna escreveu que achou a matéria bastante interessante por conta dos modos usados para calcular no Antigo Egito. E uma outra aluna ratificou o que eu havia comentado em outras aulas, a respeito do tempo, a história e o homem, ao escrever que a aula foi boa pois “aprendemos como eles [os egípcios] faziam suas equações em seu tempo”. Outro aluno também mostrou essa percepção ao registrar que “nós descobrimos como as pessoas daquela época escreviam no papiro e como eles resolviam equações”

No 9º C, uma aluna após a explanação do conteúdo, comentou que a Matemática praticada no Egito era complexa pois lidava com símbolos e “coisas” complicadas, o que nos leva a ratificar a ideia que a formulação contemporânea algébrica é forte no pensamento matemático dos alunos, uma vez que eles tendem a negligenciar os pensamentos matemáticos oriundos da história.

Mas uma vez, todos os alunos resolveram o problema 24, unicamente utilizando equações de primeiro grau, e novamente, ocorreu um erro conceitual ao negligenciarem, a incógnita x em $1/7$ de aha.

Quando induzidos em pensar na falsa posição, a fim de eliminar a fração, uma aluna afirmou que então para eliminar a fração “o valor falso será sempre igual ao de baixo” (fazendo referência ao denominador). Cabe ressaltar que nesta sala, muitos alunos não resolveram os

problemas pelo método explanado. Preferiram obter as soluções resolvendo as equações obtidas nos enunciados dos problemas.

Uma aluna escreveu que a aula foi muito bem explicada. Segundo a aluna, nesta aula ela teve a oportunidade de resolver equações do Papiro Rhind e registrou que o método da falsa posição é bastante prático para a solução de equação. Um aluno contemplou na sua escrita que esses novos métodos de calcular enriqueceram o seu pensamento. Um outro aluno escreveu que a Matemática do Egito era “bem fácil” e que eles simplificavam as contas. Outro aluno disse que a aula do dia proporcionou um novo modo de pensar em relação à Matemática. Uma aluna escreveu que além de os conceitos matemáticos terem sido trabalhados de modo diversificado e ter gostado de compreender as equações por aquele método, ela afirmou que a aula proporcionou “voltar no tempo” e conhecer a História da Matemática. Nestas afirmativas percebemos a HM como um fator de compreensão da Matemática, mostrando “aos alunos a necessidade do ensino de certos conceitos, assim como proporcionar-lhes maior compreensão dos mesmos.” (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2011, p. 161).

Um grande número de alunos disseram ter achado a aula interessante. A percepção da HM como elemento motivador ao ensino da Matemática é contemplada em Mendes (2009a) e corroborada por Baroni, Teixeira e Nobre (2011, p. 161) para os autores “a HM consegue, de alguma forma, ajudá-los [os professores] a motivar seus alunos durante as aulas, mesmo sem ter clareza das razões, ou modos, através dos quais isso ocorre.”

Diante destas análises percebemos que o ente histórico envolvido colaborou no processo de ensino da Matemática nas turmas de 9º Ano, tornando-a mais significativa, além de imprimir certa motivação aos estudantes.

Passemos agora, a análise da última ação pedagógica.

5.2.4 Análise da quarta ação pedagógica

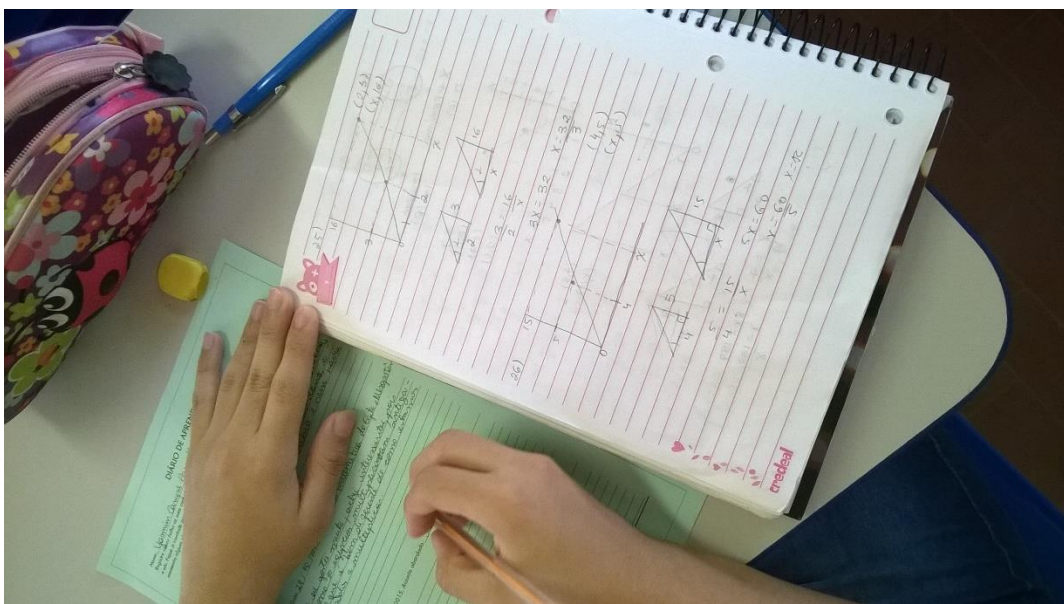
Essa aula se caracterizou como sendo a mais teórica das quatro ações em sala de aula. Mesmo assim, notei uma grande motivação por parte dos alunos na resolução das tarefas, ao mesmo

tempo em que ficavam “vidrados” ao verem métodos diferentes fornecendo as mesmas respostas para o problema 24 do Papiro Rhind.

Nesta aula, no 9º B, após fazer uma sucinta apresentação acerca da noção de função, interpretei o problema 24 do Papiro Rhind por intermédio do estudo da função, na construção de triângulos semelhantes no Plano Cartesiano.

Notei que esta foi, sem dúvida, a aula em que os alunos tiveram mais empenho. Como eles estavam se preparando para o exame de acesso ao Ifes, e por *função* ser uma competência cobrada em prova, notei grande participação da turma.

Figura 22 – Aluno resolvendo problemas de aha com o auxílio da interpretação geométrica



Fonte: Material do autor-pesquisador

Alguns acharam o método apresentado por mim fácil, outros porém, tiveram resistência e preferiram métodos tradicionais. O momento em que mostrei a semelhança foi um ponto alto da aula, uma vez que percebi alunos maravilhados com a representação geométrica da função. Cabe salientar que, os alunos não haviam em momento algum estudado o assunto função, o que, em alguns aspectos limitou o meu trabalho. Apenas alguns poucos já tinham estudado este assunto em cursinho preparatório.

As escritas nos diários, num geral, mostram o entusiasmo dos alunos na descoberta de novos métodos e de como a HM, foi fator motivador para tal aprendizado. Acerca das maneiras

múltiplas de se resolver um mesmo problema, um aluno escreveu que gostou “de resolver alguns dos problemas do papiro Rhind de diversas maneiras diferentes e aprender as noções sobre função”. Para outro aluno “o assunto foi muito bom, bem explicado, a função é uma forma fácil de entender”. Devido ao tempo curto, e a maneira rápida como o assunto foi desenvolvido com os alunos, muitos lamentaram não terem conseguido resolver com sucesso as tarefas propostas.

Num geral, a HM funcionou como uma fomentadora de reflexões múltiplas de conhecimento. Para Fauvel e Maanen (2000) “As duas razões comumente apresentadas para a inclusão da dimensão histórica são que a HM da fornece uma oportunidade de desenvolver nossa visão do que é Matemática; e que isso nos permite ter melhor compreensão dos conceitos e teorias”. Assim sendo, percebemos que, em grande parte, os alunos conseguiram perceber esse caráter múltiplo pelo qual a Matemática aparece permeada, observando como teorias e conceitos foram aparecendo no decorrer dos séculos.

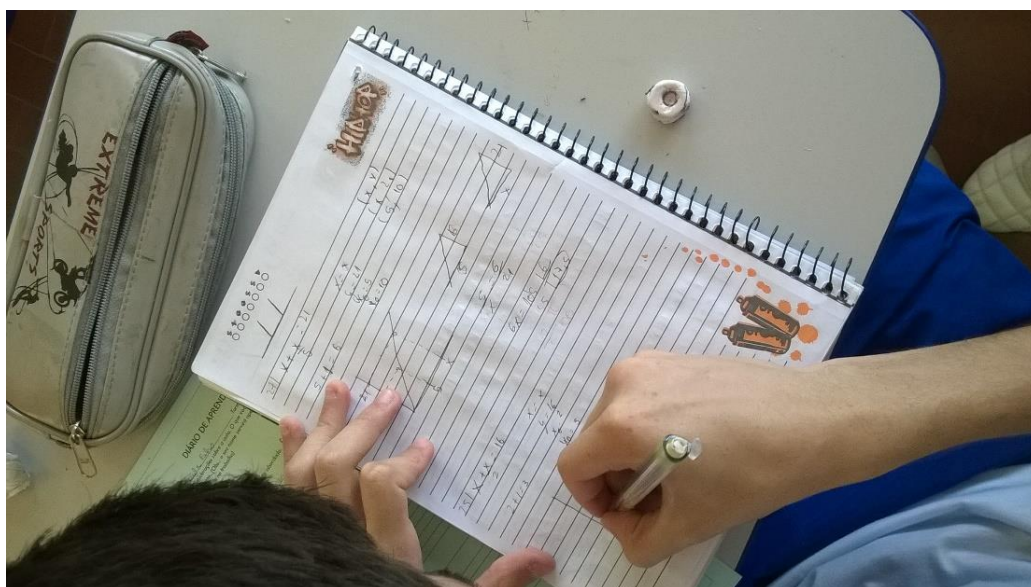
No 9º C, ao fazer a representação gráfica do problema de aha e “montar” os triângulos no quadro, uma aluna, imediatamente, apontou a resolução por meio da semelhança de triângulos, e mostrou entusiasmo ao verificar que a resposta seria a mesma quando resolvido por intermédio de métodos algébricos convencionais. Tal fato nos evidencia como o caráter multicultural da matemática é importante no enaltecimento de representações variadas para a solução de um mesmo problema (MENDES, 2015).

Nesta turma notei que tiveram dificuldade em resolver o problema pelo método de semelhança de triângulos (mais dificuldade do que a turma anterior). Notei também que, três alunos resolveram, com eminência, a tarefa de acordo com o método estudado no dia, outra parte da turma tentou utilizar o método aprendido no dia (com dificuldade) e uma outra parte teve resistência e resolveu valendo-se dos métodos matemáticos já conhecidos por eles.

O aprendizado de um conteúdo “novo” foi destacado por uma aluna: “Nesta aula eu aprendi a Função, apenas sabia o básico dela, mas com esta aula aprendi mais um pouco dela, como representar a equação pelo Plano Cartesiano (através do Gráfico), triângulos e razão. Com estas aulas [fazendo referências as quatro ações pedagógicas] aprendi muitas coisas interessantes e novas de que eu não conhecia. Achei muito interessante as aulas e acho uma pena que tenha acabado”. Neste comentário percebemos que a HM agiu como uma

fomentadora de percepções de cunho epistemológico (como intermédio para ensino de um ente matemático) e também sendo um fator motivacional. Como apontam Miguel e Miorim (2008) a HM pode agir no âmbito da curiosidade estritamente intelectual podendo levar o aluno à generalização e extensão de ideias e teorias.

Figura 23 - Aluno resolvendo problemas de aha com o auxílio da interpretação geométrica



Fonte: Material do autor-pesquisador

Novamente, uma parcela da turma achou a aula interessante e muitos a consideraram como sendo a mais difícil. Uma aluna, por sua vez, considerou importante o aprendizado: “Aprendemos um início das funções de 1º grau, e incluiu a semelhança de triângulos, e que também pode ser uma forma de resolver os problemas do papiro”. A aluna finalizou observando que o tempo foi curto, o que a impossibilitou de conhecer melhor o assunto abordado em sala de aula.

De maneira geral, considerei satisfatório o modo pelo qual a HM permeou as aulas. Ora como propulsoras de discussões históricas, ora como curiosidade, ora como um agente da cognição matemática. De fato, é esperado que os professores construam com seus alunos um terreno fértil e *contínuo* no qual a HM possa aparecer de modo significativo. Nestas aulas, consegui oportunizar aos alunos uma nova maneira de compreender a Matemática, através de um pequeno recorte histórico/algébrico que considero de relevância para o ensino de Matemática.

Passemos agora à análise das entrevistas com as docentes da escola em questão.

5.3 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS COM AS PROFESSORAS

Com intuito a obter pareceres relativo à ação docente em relação à HM, entrevistamos³⁶ as três professoras docente de Matemática na referida escola. Aqui elas serão chamadas de Professora A, Professora B e Professora C. Cabe destacar que a “Professora A” é a docente dos nonos anos onde foram feitas as ações pedagógicas.

A Professora A trabalha em duas escolas, exercendo funções diferentes. Pela manhã é professora de Matemática e à tarde Pedagoga em uma escola estadual. É formada em Pedagogia (1993), Administração (1997) e Ciências – habilitação em Matemática (1999). Possui especialização em Planejamento Educacional (1994).

Na sua formação em Matemática, ele não teve como disciplina obrigatória ou optativa a História da Matemática. Quanto aos recursos diferenciados em sala de aula, ela disse utilizar Data Show, vídeos, jogos, filmes, laboratório de Matemática, dentre outros. A HM não apareceu como um “recurso” para o ensino de Matemática.

Quando questionada se os seus alunos já esboçaram alguma curiosidade em conhecer a HM, ela disse que os alunos “questionam muito o porquê e automaticamente deve-se fazer um paralelo. Diretamente não [não utiliza a HM]. Tudo o que vou ensinar parto de onde veio. Passo muito o que tem no livro”.

Esse “partir de onde veio” pode ocasionar equívocos e reducionismos, como: “Teorema de Tales”, “Fórmula de Bháskara” dentre outros. A professora explicitou que a utilização da HM, serve para ela, como uma forma de responder alguns porquês matemáticos. Assim sendo a HM funcionaria como “um elemento motivador e gerador da matemática escolar por esclarecer os porquês matemáticos” (MENDES. 2009a, p. 97).

A professora afirmou que trabalha a HM com os textos que o livro traz. Daí enfatizamos a importância de os textos dos livros didáticos serem revistos, com o propósito de serem mais críticos, e que os textos colaborem para que possam de fato, ajudar na construção do conhecimento matemático. Ela ainda afirmou que no nono ano, costuma fazer um trabalho

³⁶ O roteiro de entrevista consta no Apêndice J.

biográfico com a vida de vários matemáticos que serão estudados no ano letivo (matemáticos estes que estão permeados nos equívocos reducionistas: “Teorema de Tales”, “Fórmula de Bháskara”...). Neste sentido, a HM aparece como um “uso ornamental” onde destacam-se notas históricas e textos biográficos. A depender da ênfase dada em sala de aula, o uso ornamental pode dar espaço ao “uso episódico” que “limita o papel da história a uma parte introdutória e motivadora” (FOSSA, 2012, p. 63).

A professora A, considera importante a inserção da HM da Matemática em sala de aula “principalmente fazendo um paralelo entre o ontem e o hoje” com o objetivo de entender o hoje, por intermédio dos feitos históricos.

Por fim a professora afirmou que considera a HM importante pois, “para entendermos o hoje devemos buscar o ontem. E a Matemática não foge à regra”. Para ela, a História enaltece a Matemática como algo vivo, indissociável das sociedades humanas, dando à HM a importância de esclarecer porquês matemáticos, significados a fórmulas e fornecendo entendimento ao hoje – à Matemática escolar.

A “Professora B” leciona em duas escolas. Possui Licenciatura Plena em Matemática (2006) e Licenciatura Plena em Física (2012). Especialização em Matemática (2007) e em Tecnologias Educacionais (2009).

Quando questionada se ela teve contato com a HM na Matemática na graduação ela respondeu que “Sim. Um semestre. Sem importância. Não era sem importância para mim mas por parte de quem conduzia”. Vemos nessa frase um reflexo da licenciatura em Matemática, onde a HM ocupa, em grande parte das vezes, uma instância de disciplina “relax”, avulsa, quando na verdade deveria estar intrínseca ao corpo de conhecimentos matemáticos da Matriz Curricular.

Em seus recursos didáticos/metodologias para sala de aula, a professora não citou a HM, e, quando questionada se seus alunos já esboçaram alguma vez curiosidade em conhecer a HM, ela disse que as perguntas são do tipo: “Quem inventou?”, “Como surgiu?”. Tais afirmativas nos mostram como os alunos e grande parte dos professores enxergam a Matemática: como um corpo de conhecimento no qual “coisas”, fórmulas e teoremas foram descobertos e inventados sem uma causa ou consequência para tal.

Quando questionada o modo pelo qual utiliza a HM em sala de aula, ela disse que quando explora um assunto matemático como Coordenadas Cartesianas ela trabalha um assunto histórico paralelo. Para esse exemplo em questão – Coordenadas Cartesianas – ela disse tratar de pontos da biografia de Descartes. Já no sexto ano (outro exemplo citado pela professora), ela comentou trabalhar o conjunto dos números Naturais com o auxílio da contagem rudimentar praticada pelos pastores com suas ovelhas.

A professora B considera importante a inserção da HM nas aulas de Matemática pois “o conteúdo não fica solto. Fica mais fácil para responder ‘de onde veio’. Assim os alunos conseguem entender melhor o processo da sequência. A Matemática é uma sequência”. Observamos nesta fala, uma visão positivista, evolucionista linear, acerca da Matemática. Já discutimos neste trabalho a respeito dessa visão. A Matemática não deve ser tratada como algo linear, mas devemos considerar as suas ramificações. A falta desta visão crítica da professora pode ser oriunda de uma formação deficitária em HM.

A professora B concorda que não é possível compreender a Matemática de hoje se não tivermos uma ideia sumária de sua história e completa que a HM “torna as aulas mais atrativas despertando o interesse. Às vezes o aluno não gosta de Matemática mas gosta de História [...]”. “Os alunos nunca pararam para pensar que as coisas nem sempre foram assim”. Essa frase da professora nos coloca frente ao posicionamento sociocultural de Radford (2011), onde, a Matemática é vista como algo cultural, e a HM permeada no âmbito educacional irá mostrar como a Matemática foi passível à cultura e à História, absorvendo essas características e se moldando às necessidades humanas. A professora concluiu afirmando que os alunos não têm a noção de que as coisas nem sempre foram desse jeito. Essa afirmação foi ratificada na ação pedagógica, quando por exemplo, uma aluna me perguntou se Euclides escrevia do modo como eu escrevia as representações algébricas no quadro.

Em suma, a professora B corrobora de perspectivas semelhantes às da professora A: utilizar a HM de modo episódico ou ornamental.

A professora C também é licenciada em Matemática (2012) e possui especialização em Matemática. Ela teve a disciplina de HM em sua faculdade, porém lamenta ela não ter sido muito aprofundada. Ela disse que gostava muito, pois achava interessante. De acordo com a professora seus alunos nunca esboçaram curiosidade com a HM (nem perguntando os porquês

como colocado pelas docentes A e B). Quando questionada sobre como trabalha a HM em sala, ela disse que procura sempre “introduzir conteúdos com a HM”.

A professora disse que acha de suma importância a inserção da HM na sala de aula, “pois a partir do momento que os alunos se conscientizam que a matemática não foi “criada” por algum estudioso chato que não tinha mais nada para fazer e que, ao contrário, ela foi evoluindo ao passar dos tempos devido a necessidade de resolução de problemas, eles aceitam melhor os conteúdos”. A professora defende a percepção de evolução, de que “coisas” melhores surgiram para suprir velhas práticas.

Ela concorda que a HM é fundamental para a compreensão de aspectos da Matemática num geral. Para a docente “o aluno precisa saber que só se chegou as maneiras (fórmulas) de se resolver as “questões” matemáticas da forma que se resolve hoje em dia, porque a “matemática” foi evoluindo ao passar dos tempos devido a estudiosos que estão sempre buscando formas (ou fórmulas) de resolver (solucionar/equacionar) os cálculos mais ou menos complexos ou que ainda não tenha solução.”

Observamos nessa citação que a professora nota a importância de observar a Matemática como algo inacabado onde novas soluções são descobertas constantemente. No entanto, não observamos nela uma postura inovadora, ou que fugisse de práticas ornamentais e episódicas assim como as outras duas professoras entrevistadas.

Em síntese, de acordo com as entrevistas feitas, percebemos que a formação do professor que ensina Matemática é carente em relação à HM. Como aponta Valdés (2006) a HM pode estar ausente na formação do licenciando ou ser algo desimportante. Ou ainda, segundo Radford (2011) ela pode aparecer, mas enaltecendo apenas um ou outro aspecto. Normalmente é dado tônica à formulação contemporânea em detrimento dos métodos históricos anteriores.

As entrevistas nos colocaram frente a um quadro que é possível elencar a HM como: motivadora no processo de ensino e aprendizagem; utilizada na introdução dos conteúdos; de modo episódica e ornamental e de cunho biográfica. Percebemos que a riqueza da HM é negligenciada e apenas uma pequena parcela dela é explorada pelos educandos. O que colabora para esse quadro? A falta de uma formação em HM, a formação deficitária, a desmotivação advinda de sistemas engessados, dentre outros. Contudo, cabe a nós

destacamos o modo como a HM é utilizada pelos docentes, apontando sugestões que são teoricamente mais viáveis para o processo de ensino.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria aqui apresentada juntamente com seus embasamentos epistemológicos, nos mostram a Matemática plenamente viva em seus contextos históricos internos que lhes dão sentido. Tais contextos, latentes e intrínsecos a essa ciência, devem ser adaptados para que reflexões em sala de aula sejam feitas e os alunos possam compreender a Matemática como uma prática social, embasada em culturas e perspectivas específicas.

É perceptível a importância da HM no ensino, uma vez que ela humaniza a Matemática. O trio promissor *História-Matemática-Educação Matemática* foi tomado como enfoque principal com finalidades pedagógicas convergentes para um ensino de Matemática diferenciado e interdisciplinar.

Os resultados aqui obtidos e mencionados, nos encorajam a afirmar e divulgar o quanto enriquecedora esta prática pode ser. Por meio de atividades factíveis no ambiente escolar (sala de aula), pudemos verificar a curiosidade dos alunos em explorar e questionar mais a Matemática, além de conhecerem novos métodos que os colocaram à frente de práticas até então desconhecidas por eles. Esses resultados puderam ser melhor sustentados e convalidados pelo que aponta Mendes (2006a, p. 130)

[...] cremos que as atividades envolvendo história da matemática são mais eficazes que as atividades que não usam história da matemática durante as aulas de matemática. Nosso argumento se apoia nas pesquisas desenvolvidas por nós e por vários estudiosos sobre o uso das atividades no ensino de matemática que apresentaram resultados bastante satisfatórios com relação ao valor desse tipo de atividade no processo ensino-aprendizagem da matemática. *Isso significa que esse tipo de abordagem pedagógica contribui para que os estudantes desenvolvam as habilidades básicas necessárias ao seu desenvolvimento cognitivo e à sua autonomia construtiva no processo de apreensão da matemática escolar.* (grifo nosso).

Além do mais, os alunos conseguiram enxergar aproximações da Matemática com a cultura, e os modos “como os povos antigos estudavam matemática”, uma vez que, “[...] o conhecimento produzido traz consigo a subjetividade inerente ao contexto sociocultural de quem o produz” (MENDES, 2006a, p 80).

Com base nas reflexões práticas e em consonância ao diálogo teórico, percebemos a importância da adaptação pedagógica do objeto histórico, uma vez que nos sustentamos não

somente numa narrativa histórica, mas prioritariamente, em práticas reflexivas na sala de aula. Assim sendo, consideramos importante que a HM seja perpassada por adaptações que permitam ao aluno manipular, refletir, questionar e dialogar com os problemas apresentados. Neste sentido, construímos uma matemática focada na investigação e na criatividade para a resolução de problemas.

Ao retomar os objetivos específicos elencados na introdução desse texto dissertativo, podemos considerar que quanto ao primeiro objetivo específico – Identificar se professores de Matemática da escola envolvida utilizam a História da Matemática em seus Recursos Didáticos (livro, vídeos, etc) – constatamos que o uso feito da HM se limita a recortes sem significado, abordagens episódicas ou ornamentais, em sua maioria articulada na leitura de biografias, dando à Matemática um caráter acabado, negligenciando aspectos intrínsecos ao desenvolvimento de conceitos matemáticos. Uma certa visão positivista se mostrou latente.

A respeito da formação das docentes, em particular a formação em HM, quando presente na graduação, foi tratada de maneira desimportante, sendo considerada um elemento curricular de “alívio” às disciplinas mais “pesadas” da Licenciatura. Sem uma formação inicial que forneça subsídios para o pensar histórico-crítico, o futuro professor tende a encontrar dificuldade em fazer abordagens significativas com a HM, além de cometer equívocos históricos decorrentes de uma visão acrítica.

No segundo objetivo que nos propusemos – Elaborar uma Proposta Didática, para o ensino de Matemática, articulada com a História da Matemática, em especial com elementos da Matemática egípcia, como recurso didático para o ensino de Álgebra – verificamos a importância de se trabalhar conteúdos matemáticos em consonância à HM. Os entes históricos, como observados nessa pesquisa, devem passar por adaptações pedagógicas, tornando a História mais palpável, compreensível ao aprendiz, fornecendo elementos de HM e História da Ciência que contribuam para o processo de ensino.

O terceiro objetivo – Trabalhar em conjunto com alunos e professores a Proposta Didática – foi alcançado mediante a participação de professores e alunos na aplicação da Proposta Didática em turmas de 9º Ano de uma escola municipal de Colatina/ES. Paralelo ao terceiro objetivo trazemos o quarto objetivo específico – Analisar os dados obtidos junto aos professores e alunos sobre as contribuições da História da Matemática. Na Análise dos dados percebemos o modo pelo qual a HM agiu como um agente fomentador de cognição matemática. Nesse sentido, para alguns alunos a HM proporcionou apenas curiosidades e

motivação, enquanto a outros trouxe significação sociocultural (na medida em que os alunos puderam se deparar com métodos culturais de reflexão, expondo isso em seus diários), ajudou a compreender a Matemática como um processo histórico, e/ou contribuiu na resolução de problemas matemáticos ao apresentar métodos alternativos, fornecendo contextos que subsidiaram um aprendizado em álgebra com mais significado, enaltecendo a construção do pensar matemático.

Podemos considerar ainda que a introdução de atividades históricas de cunho sociocultural são importantes por serem propulsoras de conhecimentos constituídos pelo aluno diante da realidade historicamente compreendida, dando margem à busca do pensar sobre seus próprios conhecimentos, aliando reflexão e raciocínio para encontrar respostas ou modificar-se mediante algumas especificidades e interpretações discutidas. A apresentação de tais situações, em um *trabalho pedagógico adaptativo* permitiu aos alunos se aventurarem num mundo desconhecido, cheio de percalços e dilemas em aberto, tendo como base a reflexão dos significados matemáticos a partir das manifestações culturais (RADFORD, 2011).

No mais, é possível afirmar que os resultados foram satisfatórios e que esta prática pode contribuir ao estar integrada no rol das atividades educativas utilizadas pelos educadores matemáticos de nosso país, pois, as suas implicações no conhecimento (não apenas matemático) são valiosas. Percebemos que as atividades aqui apresentadas nos mostram como a HM foi fomentadora de um pensar crítico, curiosidades e reflexões dialógicas. Como projeções futuras, podemos ampliar a nossa gama de reflexão. Acredito que uma lacuna ficou em aberto quanto a formação do docente em Matemática, logo, as ações aqui analisadas poderiam, como sugestão, servirem de base para cursos de formação de licenciandos em Matemática ou até mesmo para professores atuantes na área.

Em nossa Ação Didática, embasada em teorias dentro da Educação Matemática, percebemos a carência dos alunos em relação a métodos didáticos alternativos para o ensino da Matemática. Além do mais, percebemos uma visão acabada da Matemática tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores. Tal visão, entretanto, contraria o que estudiosos em HM propõem em seus estudos. Esta situação poderia ser transformada em cursos de formação para os professores de Matemática, que dessem ênfase à HM em seus aspectos sociais, epistemológicos e cognitivos, fazendo uma interface com conteúdos matemáticos e até de outras áreas das ciências, com vistas a implicações imediatas em sala de aula. As ações em sala de aula nos impulsionam a ratificar a importância de se inserir a HM no ensino da

Matemática, uma vez que percebemos na prática a atitude reflexiva dos alunos, contribuindo tanto na percepção da Matemática como algo vivo como na construção de conceitos e na resolução de problemas através de contextos internos à própria Matemática.

Não temos a pretensão de fazer uma síntese *conclusiva* do assunto aqui abordado. Por se tratar de uma pesquisa em educação, com implicações na Educação Matemática, seu estudo estará constantemente aberto, podendo ser revisto, criticado, reelaborado e, certamente, ampliando a novos objetos matemáticos que possam ser pedagogicamente trabalhados e contribuir para o ensino de Matemática. O que fizemos aqui foi um recorte, uma abordagem setorial em uma imensidão de assuntos que podem ser discutidos – no nosso convencimento e defesa de que a HM na Educação Matemática é uma prática que merece lugar cativo no ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

- AABOE, A. **Episódios da história antiga da Matemática**. Tradução João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.
- ALMEIDA, M. C. **Origens da Matemática: a pré-história da matemática e o neolítico o alvorecer da história**. 2 ed. Paraná: Progressiva, 2011.
- ANDERY, M.A.; *et al.* **Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica**. 4ed. Rio de Janeiro: Garamond, 2014.
- ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Estudo de Caso em Pesquisa e Avaliação Educacional**. Série Pesquisa. Vol. 13. Brasília: Liber Livro, 2005.
- ARRUDA, J. J de.; PILETTI, N. **Toda a História: história geral e história do Brasil**. 7ed. São Paulo: Ática, 2002.
- BARONI, R.L.S.; TEIXEIRA, M.V.; NOBRE, S.R. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. In: **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 153-171, dez. 2011
- BELTRAN, M. H. R; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Série Temas em História da Ciência).
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- BRANDEMBERG, J. C. **Métodos Históricos para Resolução Algébrica de Equações**. V. 5. Belém: SBHmt, 2009. (Coleção História da Matemática para professores).
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BLOCH, M. **Apologia da história ou ofício do historiador**. Tradução Armand Collin. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.
- BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: história da matemática e educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Coleção História da Matemática para professores).
- CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Tradução Lázaro Coutinho. São Paulo: Ciência Moderna, 2007.
- CHACE, A. B. **The Rhind Mathematical Papyrus**. Vol. 1. Oberlin, Ohio (U.S.A): Mathematical Association of America, 1927.
- CERVANTES, M. de. **O Engenhoso Fidalgo Dom Quixote de la Mancha**. Tradução Viscondes de Castilho e Azevedo. São Paulo: Abril Cultural, 1978.
- COSTA, E. A.S. **Analisando Algumas Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática no Ensino e Aprendizagem da Disciplina Desenho Geométrico por meio da**

Teoria Fundamental. 2013. 242f. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexões na Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 17 ed. São Paulo Papirus, 2009.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 17 ed. São Paulo: Pairus, 1996. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

D'AMBROSIO, U. Tendências historiográficas na história da ciência. In: GOLDFARB, A. M. A.; BELTRAN, A. M.; ROXO, M. H. (Orgs). **Escrevendo a história da ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas.** São Paulo: EDUC/Fapesp, 2004.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A (org). **Educação matemática: uma (nova) introdução.** 3ed. São Paulo: EDUC, 2012.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **The Mathematical Experience.** Boston: Birkhäuser, 1981.

DIVALTE, G. F. **História.** São Paulo: Ática, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 5ed. São Paulo: UNICAMP, 2011.

FOSSA, J. A. **Ensaio sobre a Educação Matemática.** 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

FURINGUETTI, F. History and epistemology in Mathematics Education. **History of Mathematics.** Disponível em <<http://www.eolss.net/sample-chapters/c02/e6-132-65.pdf>> . Acesso em 26 mai 2015.

GALVÃO, M. E. E. L. **História da Matemática: dos números à geometria.** São Paulo: Edifeo, 2008.

GARBI, G.G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.** 5ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GUNDLACH, B.H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: números e numerais.** Vol. 1. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

HEATH, T. L. **Diophantus of Alexandria: a study in the history of Greek Algebra.** 2 ed. New York: Dover Publications, 1964.

HEIEDE, T. História da Matemática e do professor. In: CALINGER, R (Ed). **Vita Mathematica.** The Mathematical Association of America, 1996.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies Mathematics**, n.71, 2009, p.235-261.

JANOTTI, M.L. O livro Fontes Históricas como fonte. In: PINSK, C.B. **Fontes Históricas**. São Paulo: Contexto, 2006.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Tradução: António Manuel Baptista, Natália Bebiano, Ana Sampaio e Filipe Duarte. 2ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LAKATOS, E.M.; MARCONI, M.A. Fundamentos de Metodologia Científica. 7ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LINS, R.C. **A Framework for Understanding what Algebraic Thinking is**. University of Nottingham. Doctor of Philosophy. UK, 1992.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papyrus, 1997. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D.A. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LIMA, E. L. **Análise Real: funções de uma variável**. Vol. 1. 11ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MACHADO, B. F. **Vídeo-Aula de História da Matemática: uma possibilidade didática para o ensino da Matemática**. 2011. 145f. (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

MACHADO, B. F.; MENDES, I. A. **Vídeos didáticos de história da Matemática: produção e uso na Educação Básica**. São Paulo: Livraria da Física, 2013 (Coleção História da Matemática para Professores).

MENDES, I. A. A Investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I.A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006a.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009b.

MENDES, I. A. **Números: o simbólico e o racional na história**. São Paulo: Livraria da Física, 2006b.

MENDES, I. A.; Atividades históricas para o ensino da Trigonometria. In: MIGUEL, A. et al. **História da Matemática em atividades didáticas**. 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009c. (Coleção Contextos da Ciência).

MENDES, I.A. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem** 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009a (Coleção Contexto da Ciência).

MENDES, I.A. **História da Matemática no Ensino: entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Coleção História da Matemática para professores).

MENEGHETTI, R. C. G. **Constituição do saber matemático**: reflexões filosóficas e históricas. Londrina: EDUEL, 2010.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**. São Paulo, Campinas: Unicamp, vol.5, nº 8, jul/dez de 1997, p. 73-105.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: Propostas e Desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MORAIS FILHO, D. C. de. **Um convite à Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Professor de Matemática).

PANASUK, R. M.; HORTON, L. B. Integrating History of Mathematics into the classroom: was Aristotle wrong. **Journal of Curriculum and Teaching**. Vol. 2. N. 2, 2013.

RADFORD, L. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. Organização e tradução de Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades. São Paulo: Papyrus, 2006. (Coleção perspectivas em educação Matemática).

ROQUE, A. C. C. **Uma investigação sobre a participação da História da Matemática em uma sala de aula no ensino fundamental**. 2012. 147f. (Mestrado em Educação: Conhecimento e Inclusão Social). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.

SÁ, I. P. de. **A Magia da Matemática**: atividades investigativas, curiosidades e história da matemática. 3ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.

SAD, L. A. A História da Matemática na Educação Básica: uma aliada para a prática do professor de matemática. **Anais do Encontro nacional de Educação Matemática**. XI ENEM. Paraná, 2013.

SAD, L.A.; SILVA, C.M.S. da. Reflexões Teórico-metodológicas para Investigações em História da Matemática. In: **Bolema**. Ano 21, nº 30, p. 27-46, Rio Claro, São Paulo, 2008.

VALDÉS, J. E. N. A História como um elemento unificador na Educação Matemática. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

WUSSING, Hans. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Madri: Siglo XXI de España, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Plano de Aula 1

<i>Plano de Aula 1: Primeiros Passos rumo à História no Ensino da Matemática. Apresentação do professor e aluno e da proposta de ensino. Uma observação acerca da Matemática Grega. Relação entre variável e incógnita por intermédio de representações algébricas modernas.</i>	
1 Identificação	Instituição: Escola Municipal de Ensino Fundamental “Adwalter Ribeiro Soares”. Município: Colatina/ES. Data: 27/10/2015. Turma: 9º Ano (A, B e C). Turno: Matutino. Hora/Aula: 50 minutos. Professor: Tiago Bissi.
2 Assunto Abordado	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Os primeiros passos para o pensar algébrico por intermédio da Matemática grega; ▪ Números <i>perfeitos</i>, <i>abundantes</i> e <i>deficientes</i>; ▪ Noção de incógnita e variável e de generalização algébrica por meio da última proposição do nono livro de Euclides.
3 Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Estimular o pensamento algébrico por meio da Matemática grega (incógnita e variável); ▪ Compreender e conjecturar acerca dos números <i>perfeitos</i>, <i>abundantes</i> e <i>deficientes</i>.
4 Metodologia	<p>Num primeiro momento, far-se-á a apresentação do professor e de suas propostas quanto as aulas a serem ministradas, bem como, suas pretensões e a importância do pensar histórico arraigado à Matemática.</p> <p>No segundo momento, os alunos deparar-se-ão com informações históricas importantes acerca da Grécia Antiga (Apresentação em Slides que consta como Apêndice A deste Plano de Aula) bem como dos misticismos e de suas correlações com a Matemática que era corrente na época.</p> <p>No terceiro momento, ainda com a presença dos slides, o professor distribuirá cartões (Apêndice B deste Plano de Aula) contendo números de 1 a 30. Os alunos, em dupla, deverão descobrir os fatores e classificá-los em classes de equivalência (<i>perfeitos</i>, <i>abundantes</i> e <i>deficientes</i>) mediante as explicações do professor. Ao término, nos três itens finais (<i>a</i>, <i>e b</i>) os alunos deverão conjecturar acerca do que foi percebido mediante a decomposição em fatores e a divisão em classes. Neste momento, é muito importante que o professor faça uma mediação, explorando as possibilidades aritméticas e algébricas possíveis, ouvindo os alunos e as suas reflexões.</p> <p>No quarto momento, para iniciar, com a linguagem algébrica usual, será apresentada a proposição de Euclides, que diz: “Se $2^n - 1$ é um número <i>primo</i>, então $(2^n - 1)(2^n - 1)$ é um número perfeito”. Tal proposição é um terreno fecundo para explorar a noção de incógnita e variável, bem como, conceitos aritméticos.</p> <p>Por fim, os alunos serão convidados a escreverem em seus diários de aprendizagem.</p>
5 Recursos Metodológicos	Quadro; Giz; Projetor; Cartão contendo números de 1 a 30.
6 Avaliação	A avaliação acontecerá mediante a participação dos alunos na aula.

Referências	<p>EVES, H. Introdução à História da Matemática. 5ed. São Paulo: UNICAMP, 2011.</p> <p>FOSSA, J.A.; Ensaio sobre a Educação Matemática. 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.</p> <p>KATZ, V. J. História da Matemática. Tradução: António Manuel Baptista, Natália Bebiano, Ana Sampaio e Filipe Duarte. 2ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.</p> <p>ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.</p>
--------------------	---

APÊNDICE A
Slides utilizados

Prefeitura Municipal de Colatina
Secretaria de Educação

A Matemática Grega: Números Perfeitos, Abundantes e Deficientes.

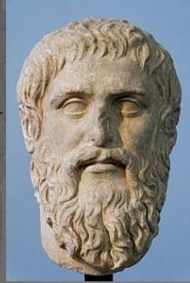
Professor: Tiago Bissi
Escola: Adwalter Ribeiro Soares

Colatina/ES

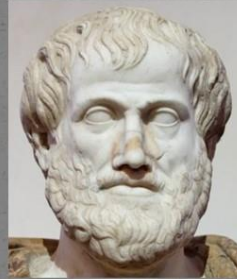
Apêndices



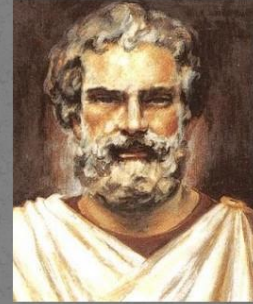
Grécia: O Misticismo e a Matemática



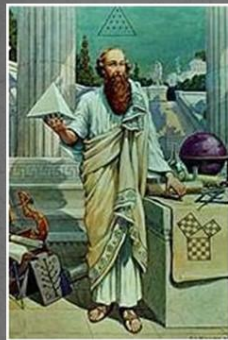
Platão, 347 a. C



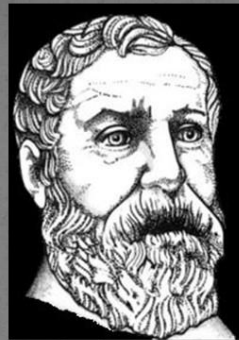
Aristóteles, 322 a. C



Tales de Mileto, 347 a. C



Pitágoras 571, a. C



Heron de Alexandria, 70 d. C

Euclides de Alexandria,
300 a. C



Números Perfeitos, Abundantes e Deficientes.

- Esses números apresentam ligações místicas essenciais a especulações numerológicas;
- Um número se diz **PERFEITO** se é igual a soma de seus divisores *próprios*;
- Um número se diz **DEFICIENTE** se excede a soma de seus divisores próprios;
- Um número se diz **ABUNDANTE** se é menor que a soma de seus divisores próprios.



Imagem de um computador **semelhante** aos que foram utilizados na busca de números perfeitos

- $n = 9689, 9941, 11\,213, 19937, 21701, 23209\dots$
- Conhecemos hoje 30 números perfeitos;
- A contribuição de Euclides com a sua fórmula (obviamente ela não foi escrita na linguagem matemática que hoje conhecemos) , foi, inegavelmente importante nos processos computacionais algorítmicos.
- O último número perfeito foi encontrado em 1985, no supercomputador Cray X-Mp de dez milhões de dolares

Números muito grandes...

- Até 1952, conheciam-se apenas 12 números perfeitos, todos pares;
- Todos os números dados pela fórmula de Euclides, são pares;
- A existência ou não de números perfeitos ímpares é uma questão em aberto na **Teoria dos Números**;
- Em 1952, com a ajuda de um computador digital , descobriram-se mais cinco números perfeitos, correspondentes a $n = 521, 607, 1279, 2203$ e 2281 na fórmula de Euclides.
- Em 1957, com outra máquina, obtiveram um valor perfeito para $n = 3217$.
- 1961: Máquina IBM 7090: $n = 4253$ e $n = 4423$. Não há registros de outros números perfeitos para $n < 5000$

Euclides de Alexandria

- A última proposição do nono livro dos *Elementos* de Euclides prova que se...

“Se $2^n - 1$ é um número primo, então $(2^n - 1)(2^n)$ é um número perfeito”

VAMOS TENTAR??????

- Assim sendo, diante do misticismo e das crenças gregas ...

Deus criou o mundo em seis dias, um número perfeito, pois, $1 + 2 + 3 = 6$. (EVES, 2011)

Toda a raça humana descende das oito almas da Arca de Noé, sendo essa criação imperfeita, pois 8 é deficiente, já que $1 + 2 + 4 = 7 < 8$ (EVES, 2011)



- Supercomputador do modelo Cray X-Mp

Referências

- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5ed. Campinas: UNICAMP, 2011.
- FOSSA, John A. **Ensaio sobre Educação Matemática**. 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

APÊNDICE B
Cartão entregue aos alunos

ALUNOS:						
DATA:						
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: NÚMEROS PERFEITOS, ABUNDANTES E DEFICIENTES						
N. º	Fatores	Classe		N. º	Fatores	Classe
1				16		
2				17		
3				18		
4				19		
5				20		
6				21		
7				22		
8				23		
9				24		
10				25		
11				26		
12				27		
13				28		
14				29		
15				30		
<p>Nas classes use D para deficiente; P para perfeito e A para abundante. Faça com bastante atenção.</p> <p>O que podemos conjecturar a respeito: a) Dos números primos? b) dos números abundantes?</p>						

APÊNDICE B – Plano de Aula 2

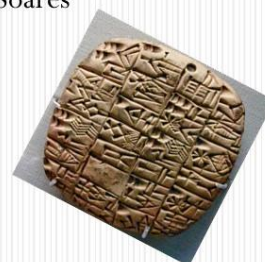
<i>Plano de Aula 2: Primeiros registros históricos da Matemática: Antiguidade Oriental – Egito e Mesopotâmia. Fontes históricas e primeiras aproximações com a Matemática praticada no Antigo Egito</i>	
1 Identificação	Instituição: Escola Municipal de Ensino Fundamental “Adwalter Ribeiro Soares”. Município: Colatina/ES. Data: 29/10/2015. Turma: 9º Ano (A, B e C). Turno: Matutino. Hora/Aula: 50 minutos. Professor: Tiago Bissi.
2 Assunto Abordado	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Matemática praticada na Antiguidade Oriental; ▪ Contextualização histórica e importância das civilizações para o caminhar da Matemática; ▪ Sistema de Multiplicação egípcio.
3 Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Apresentar a Matemática da Antiguidade Oriental como um dos caminhos para se fazer Matemática em sala de aula; ▪ Utilizar o método de multiplicação egípcio a fim de elucidar métodos alternativos e reconhecimento de pensamentos variados, tendo como propósito, afastar a visão algorítmica moderna como sendo única e hermética; ▪ Reconhecer fontes históricas e a sua importância para a humanidade.
4 Metodologia	<p>Com o auxílio de Slides (Apêndice A deste plano de aula) o professor deverá explanar acerca das Antiguidades Orientais – Egito e Mesopotâmia, com ênfase na sua Matemática e correlações com o momento histórico vivido; tudo isso, perpassado por uma relação dialógica professor-aluno que seja favorável a construção do conhecimento.</p> <p>Nesta aula, os alunos conhecerão os hieróglifos matemáticos e um vídeo que mostra a representação dos números.</p> <p>Os alunos serão apresentados e convidados a resolver multiplicações pelo método de duplicação dos egípcios.</p> <p>Os minutos finais serão dedicados à escrita no Diário de Aprendizagem.</p>
5 Recursos Metodológicos	Quadro; Giz; Projetor.
6 Avaliação	A avaliação acontecerá mediante a participação dos alunos na aula.
Referências	<p>A HISTÓRIA do número 1. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ> Acessado em 15/10/15 (Minutos: 12:50 - 14:55)</p> <p>ALMEIDA, M.C. Origens da Matemática: a pré-história da Matemática o neolítico e o alvorecer da história. 2ed. Curitiba: Progressiva, 2011.</p> <p>EVES, H. Introdução à História da Matemática. 5ed. São Paulo: UNICAMP, 2012.</p> <p>KATZ, V. J. História da Matemática. Tradução: Antônio Manuel Baptista, Natália Bebian, Ana Sampaio e Filipe Duarte. 2ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.</p> <p>ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.</p>
Apêndices	

APÊNDICE A
Slides utilizados

Prefeitura Municipal de Colatina
Secretaria Municipal de Educação

Matemática e antiguidade oriental: Egito e Mesopotâmia

Professor: Tiago Bissi
Escola Adwalter Ribeiro Soares

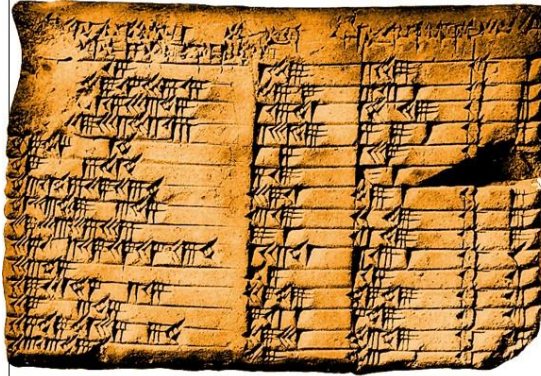


Colatina - ES

A Matemática da Mesopotâmia



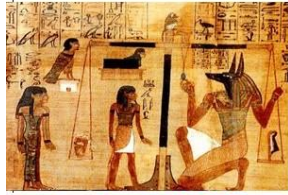
Os registros mesopotâmicos



row	u	d	d^2	u^2	$L = d^2 - u^2$	$\ell = \sqrt{L}$	e^2
1	119	169	28561	14161	14400	120	14400
2	3367	11521	132733441	11336669	121396752	11018	[121396324]
3	4601	6649	44209201	21169201	23040000	4800	23040000
4	12709	16541	343766661	161518661	182250000	13500	182250000
5	85	97	9409	4225	5184	72	5184
6	319	481	231361	101761	129600	360	129600
7	2291	3541	12538661	5248661	7290000	2700	7290000
8	799	1249	1560001	636401	921600	960	921600
9	541	769	591361	292681	298680	546	[298116]
10	4961	6161	66601921	24611521	41990400	6480	41990400
11	45	75	5625	2025	3600	60	3600
12	1679	2929	8579041	2819041	5760000	2400	5760000
13	25921	289	63521	67189241	-671814720	[-]	[-]
14	1771	3229	10428441	3136441	7290000	2700	7290000
15	96	83	2809	3136	-327	[-]	[-]



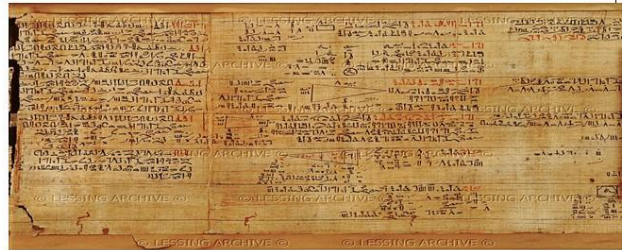
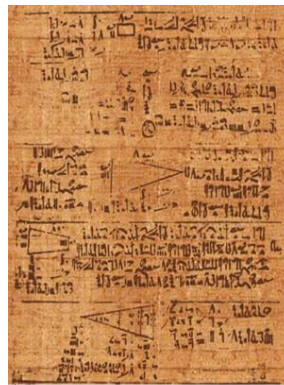
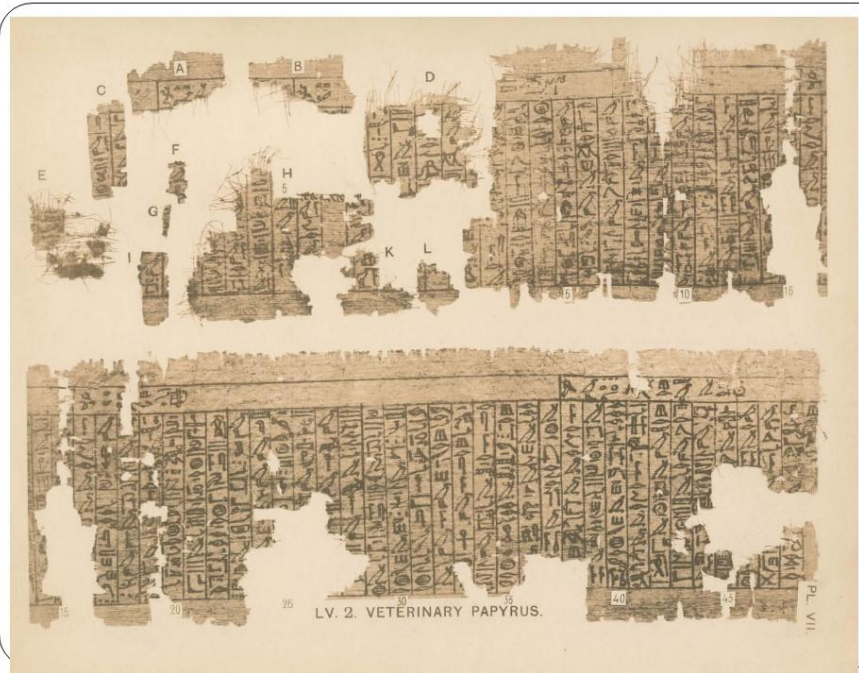
A Matemática no Egito Antigo

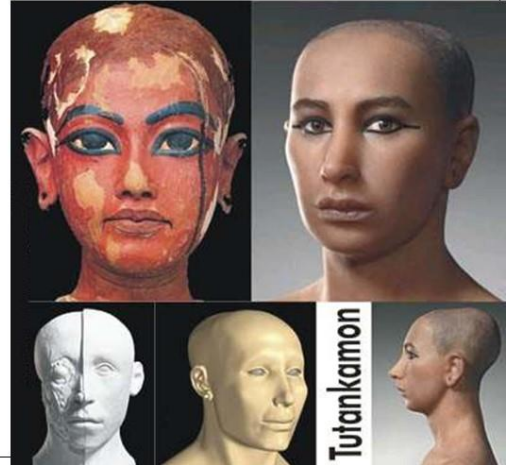


Alexandria



Cairo





ESCRITA

Hieróglifos		Hierático		Demótico

Sistema de Numeração



Como era realizada a multiplicação no Egito Antigo

- O algoritmo egípcio para a multiplicação baseava-se num processo de duplicações sucessivas.
- Para multiplicar dois números a e b o escriba registraria primeiro o par $1, b$. Depois duplicaria sucessivamente cada número do par, até que a duplicação seguinte levasse o primeiro elemento a exceder a .
- Posteriormente, tendo determinado as potências de 2 que somados são iguais a a , o escriba adicionaria os múltiplos correspondentes de b para obter a resposta. (KATZ, 2008)

- Exemplo: 12×13

12	13
1	13
2	26
\4	\52
\8	\104
Total: \12	\156

Vamos multiplicar como os antigos egípcios?

Junte-se em dupla com um colega e resolva as seguintes multiplicações pelo método das duplicações.



- a) 17×12
- b) 135×2
- c) 250×21
- d) 28×48

Representação de um escriba do antigo Egito.

Referência

- KATZ, Victor J. **A history of Mathematics: An Introduction**. 3 ed. Chicago: Pearson Education, 2008.

APÊNDICE C – Plano de Aula 3

Plano de Aula 3: A Matemática no Egito Antigo. Os problemas de <i>aha</i>. Aproximações com a linguagem algébrica moderna e a falsa posição – Ênfase no Papiro Rhind.	
1 Identificação	Instituição: Escola Municipal de Ensino Fundamental “Adwalter Ribeiro Soares”. Município: Colatina/ES. Data: 05/11/2015. Turma: 9º Ano (A, B e C). Turno: Matutino. Hora/Aula: 50 minutos. Professor: Tiago Bissi.
2 Assunto Abordado	<ul style="list-style-type: none"> ▪ A Matemática no Antigo Egito; ▪ Os problemas de <i>aha</i>; ▪ Resolução de Equações Algébricas por métodos variados
3 Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Reforçar a noção de incógnita e variável; ▪ Apresentar e resolver os problemas de <i>aha</i> pela falsa posição.
4 Metodologia	<p>Nesta aula, a tônica será dada aos problemas do Papiro de Rhind, conhecidos como problemas de <i>aha</i> (Apêndice A deste plano de aula). Apresentar a representação semiótica de <i>aha</i> contida no Papiro Rhind. (Apêndice B deste plano de aula).</p> <p>Num primeiro momento, pedir aos alunos que resolvam o problema 24 da maneira que acharem conveniente (notação algébrica, tentativa e erro e etc). Corrigir o problema no quadro, contemplando as ideias que possam surgir na sala de aula.</p> <p>Após esse momento, o professor apresentará o método egípcio mais famosos de resolução – a falsa posição – mostrando o pensamento da época e destacando a importância do escriba. Por fim, juntamente com os alunos, generalizar a falsa posição por uma fórmula algébrica moderna e pedir aos alunos que resolvam os demais problemas utilizando ambos os métodos apresentados. Discutir acerca da praticidade e, principalmente, do pensamento matemático existente na época.</p> <p>Minutos finais dedicados à escrita no diário de aprendizagem.</p>
5 Recursos Metodológicos	Quadro; Giz; Folha contendo os problemas de <i>aha</i> do Papiro Rhind.
6 Avaliação	A avaliação acontecerá mediante a participação dos alunos na aula.
Referências	<p>KATZ, V. J. História da Matemática. Tradução: António Manuel Baptista, Natália Bebiano, Ana Sampaio e Filipe Duarte. 2ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.</p> <p>ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.</p> <p>SÁ, I. P. de. A Magia da Matemática: atividades investigativas, curiosidades e história da matemática. 3ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.</p>
Apêndices	

APÊNDICE A
Os problemas de aha

História da Matemática
A Matemática do Papiro Rhind

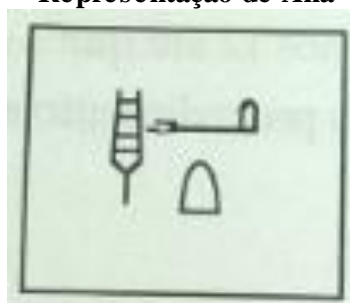
Problema 24 do Papiro Rhind: Uma quantidade e seu $\frac{1}{7}$ somados fazem 19.
Qual a quantidade?

Problema 25 do Papiro Rhind: Uma quantidade e sua metade somadas fazem
16. Qual a quantidade?

Problema 26 do Papiro Rhind: Uma quantidade e seu $\frac{1}{4}$ somados fazem 15.
Qual a quantidade?

Problema 27 do Papiro Rhind: Uma quantidade e seu $\frac{1}{5}$ somados fazem 21.
Qual a quantidade?

APÊNDICE B
Representação de Aha



Fonte: Roque (2012)

APÊNDICE D – Plano de Aula 4

Plano de Aula 4: A Matemática do Papiro Rhind – Problema de <i>aha</i>. Relação com função polinomial do primeiro grau (ênfase na função linear). Resolução Gráfica.	
1 Identificação	Instituição: Escola Municipal de Ensino Fundamental “Adwalter Ribeiro Soares”. Município: Colatina/ES. Data: 05/11/2015 e 30/11/2015 Turma: 9º Ano (A, B e C). Turno: Matutino. Hora/Aula: 50 minutos. Professor: Tiago Bissi.
2 Assunto Abordado	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Noção de Função (polinomial do primeiro grau, ênfase na função linear) – Representação algébrica, Geométrica e Gráfica; ▪ Domínio e Imagem de uma função.
3 Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fazer conexões entre os problemas de <i>aha</i> e sua representação como função – forma algébrica e geométrica; ▪ Resolver os problemas de <i>aha</i> observando a possibilidade de revisita-los sob outra ótica – Resolução Geométrica por meio de semelhança de triângulos formado a partir da representação gráfica da função linear que eles – problemas de <i>aha</i> – se configuram na nossa notação moderna.
4 Metodologia	<p>Iniciar a aula lembrando alguns assuntos históricos tratados anteriormente. Fazer uma explicação, ainda incipiente, acerca de função (representação algébrica, domínio e imagem). Para contextualizar, utilizar a expressão algébrica $2^n - 1$ (proposição de Euclides), fazendo uma associação entre n e uma variável aleatória, do tipo, $y = f(n)$. Neste momento, fazer a representação geométrica. Durante a explanação, o professor deverá comentar alguns pontos acerca da história da função, como a questão de nomenclatura, representações e etc.</p> <p>No segundo momento, apropriar-se de uma função polinomial do primeiro grau do tipo linear (Sugestão: $f(x) = 3x$) e explorar domínio, imagem, representação gráfica e reforçar que funções do tipo $y = f(x) = ax$ ($a \neq 0$), passam, necessariamente, pelo ponto $O(0,0)$ – origem do sistema coordenado.</p> <p>Explorar, inicialmente, o problema de <i>aha</i> de número 24. Associá-lo uma função polinomial de primeiro grau do tipo linear, utilizar um valor falso (domínio) para a obtenção da imagem.</p> <p>Posteriormente, o professor, junto a classe, observará que na construção do segmento de reta, formar-se-ão triângulos semelhantes. A partir deles descobrir o valor de <i>aha</i>. Minutos finais dedicados à escrita no diário de aprendizagem.</p>
5 Recursos Metodológicos	Quadro; Giz; Folha contendo os problemas de <i>aha</i> do Papiro Rhind.
6 Avaliação	A avaliação acontecerá mediante a participação dos alunos na aula.
Referências	<p>IEZZI, G. <i>et al. Matemática</i>. Vol. Único. São Paulo: Atual, 1997.</p> <p>SÁ, I. P. de. <i>A Magia da Matemática: atividades investigativas, curiosidades e história da matemática</i>. 3ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.</p>

APÊNDICE E – Solicitação de autorização para pesquisa de mestrado



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
 INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
 CAMPUS VITÓRIA
 Avenida Vitória, 1729 – Jucutuquara – 29040-780 – Vitória – ES
 27 3331-2110

Ofício nº 018-2015-Programa Educimat

Vitória – ES, 02 de outubro de 2015

Ilma Sra.
 Maria Auxiliadora Torezani
 Secretária Municipal de Educação
 Secretaria Municipal de Educação de Colatina/ES


Assunto: Solicitação de autorização para Pesquisa de Projeto de Mestrado do Curso de Mestrado Profissional do Programa Educimat do IFES

Senhora Secretária;

Vimos por meio deste documento apresentar **TIAGO BISSI**, aluno regular do Curso de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática; orientado pela professora **Dra. Ligia Arantes Sad**, credenciada em nosso Programa de Pós- graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) – Campus Vitória. Ele desenvolve o Projeto de Pesquisa intitulado: **“Álgebra e História da Matemática: Uma proposta de ensino a partir da Matemática do Antigo Egito”**. Trata-se de uma pesquisa que tem por objetivo utilizar a História da Matemática na sala de aula, de modo a trazer maior significado ao ente matemático envolvido - álgebra. A sua relevância está pautada nas ancoragens teóricas de autores como Radford, Mendes e D'Ambrosio, ao afirmarem que a História na Educação Matemática é essencial para a construção do pensamento matemático do aluno. O período de realização da pesquisa será entre outubro e novembro de 2015 e tem como público alvo as turmas do nono ano da EMEF Adwalter Ribeiro Soares situada à Rua Sérgio Bernardina, s/n, Bairro Santa Terezinha – Colatina/ES.

Aproveitando a oportunidade para renovar nossos votos de elevada estima e consideração, bem como nos colocarmos à disposição para quaisquer esclarecimentos a esse respeito.

Atenciosamente;


Sidnei Quezada Meireles Leite
 Coordenador do Programa Educimat
 Mat. SIAPE 1142323/ Campus Vitória/IFES
 Port. IFES Nº 1.948/ 2013

Recebido em
 22/10/15
 (P)

APÊNDICE F – Ofício de Aceite



ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
PREFEITURA MUNICIPAL DE COLATINA
Secretaria Municipal de Educação
Rua Melvin Jones, 50 – Esplanada – Colatina – ES – 29.702.110 - Tel: 3177-7064

OF.SEMED Nº 1.766/2015

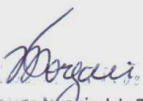
Colatina, 23 de outubro de 2015.

Prezado Coordenador,

Em resposta ao Ofício Nº. 018/2015 - Programa Educimat,, encaminhado a esta Secretaria no início do mês de outubro do corrente ano, informamos que não nos opomos ao desenvolvimento da pesquisa do Mestrando **TIAGO BISSI**, a ser desenvolvida nos meses de outubro e novembro de 2015, na EMEF “Adwalter Ribeiro Soares”.

Apresentamos votos de consideração e apreço.

Atenciosamente,


Sidnei Quezada Meireles Leite
Secretaria Municipal de Educação
Dec. Nº 12.980/09

Ao Senhor
SIDNEI QUEZADA MEIRELES LEITE
Coordenador do Programa Educimat
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes *campus* Vitória

APÊNDICE G – Carta de apresentação à escola



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
 INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
 CAMPUS VITÓRIA
 Avenida Vitória, 1729 – Bairro Jucutuquara – 29040-780 – Vitória – ES
 27 3331-2110

CARTA DE APRESENTAÇÃO

Vitória, 02 de outubro de 2015.


Ilma Sra.
Silvia Helena Moraes Bianco
Diretora da EMEF – Adwalter Ribeiro Soares

Prezada Sra Diretora,

O aluno do Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Campus Vitória do Ifes – Programa Educimat, **TIAGO BISSI**, pretende desenvolver uma pesquisa intitulada “**ÁLGEBRA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ENSINO A PARTIR DA MATEMÁTICA DO ANTIGO EGITO**”. Trata-se de uma pesquisa que tem por objetivo utilizar a História da Matemática na sala de aula, de modo a trazer maior significado ao ente matemático envolvido - álgebra. A sua relevância está pautada nas ancoragens teóricas de autores como Radford, Mendes e D'Ambrosio, ao afirmarem que a História na Educação Matemática é essencial para a construção do pensamento matemático do aluno. O período de realização da pesquisa será entre outubro e novembro de 2015. e tem como público alvo as turmas do nono ano da **EMEF Adwalter Ribeiro Soares situada à Rua Sérgio Bernardina, s/n, Bairro Santa Terezinha – Colatina/ES**. Por esse motivo, solicitamos a V.Sa. autorização para a realização desta pesquisa nas turmas do 9º (nono) ano da **EMEF Adwalter Ribeiro Soares situada à Rua Sérgio Bernardina, s/n, Bairro Santa Terezinha – Colatina/ES** no período de outubro a novembro de 2015.

Aproveitando a oportunidade para renovar nossos votos de elevada estima e consideração, bem como nos colocarmos à disposição para quaisquer esclarecimentos a esse respeito.

Atenciosamente;


Sidnei Quezada Meireles Leite
 Coordenador do Programa Educimat
 Mat. SIAPE 1142323/ Campus Vitória/IFES
 Port. IFES Nº 1.948/2013

Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
 Campus Vitória – Instituto Federal do Espírito Santo
 Av. Vitória, 1729, Jucutuquara, Prédio Administrativo, 3º andar, Sala 03, Vitória ES. CEP 2904-780
 Tel.: (27) 3331-2208 – E-mail: educimat@ifes.edu.br

APÊNDICE H – Termo de consentimento livre e esclarecido



INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – CAMPUS VITÓRIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA –
EDUCIMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Silvia Helena Moraes Bianco, RG nº 469.597 SSP/ES autorizo a realização de entrevistas, a utilização de dados coletados e intervenções em sala de aula, a fim de fornecer subsídios para a realização da dissertação de título provisório “Álgebra e História da Matemática: Uma proposta de ensino a partir da Matemática do Antigo Egito”, desenvolvido pelo pesquisador TIAGO BISSI. Afirmo estar ciente e esclarecida da pesquisa, bem como da garantia de sigilo e liberdade para desistir da mesma em qualquer momento.

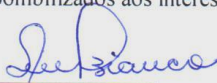
Em qualquer etapa do estudo, terei acesso ao pesquisador responsável, TIAGO BISSI, carteira de identidade nº1.984.313 - ES, que pode ser encontrado no endereço Rua João da Mata, 240, Alto Vila Nova – Colatina, ES, CEP: 29702-270; no telefone (27) 99730-9400 e no email: tiagobissi@hotmail.com.

As informações obtidas pelo pesquisador serão tratadas de maneira ética e sigilosa, garantindo a não identificação dos envolvidos. Não haverá exposição de imagem dos alunos, apenas fotos dos mesmos realizando as atividades, sem a identificação, tão somente para fins de análise de dados e divulgação de resultados dessa pesquisa em sites institucionais, eventos da área, relatórios de atividades e artigos científicos. Estou ciente de que a privacidade do alunado será respeitada, ou seja, os nomes ou qualquer outro dado ou elemento que possa identificá-los, será mantido em sigilo. Para tanto, far-se-á uso de codinomes. Apenas o nome da escola será identificado. Os professores envolvidos também terão a identidade preservada.

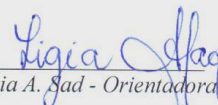
Os materiais coletados ficarão sob a responsabilidade do pesquisador por 5 (cinco) anos. Os mesmos não serão utilizados em prejuízo econômico ou financeiro a qualquer dos envolvidos. Como voluntário, durante ou depois da pesquisa é garantido o anonimato das informações fornecidas.

Os pesquisadores responsáveis pelo referido projeto são Tiago Bissi e Prof.^a Dr.^a Lígia Arantes Sad, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - IFES e com eles poderei manter contato pelos e-mails: tiagobissi@hotmail.com e sadli@terra.com.br

Tendo sido orientado quanto ao teor de tudo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em permitir a participação dos alunos do 9º Ano na pesquisa, garantido, como já mencionado, todo o sigilo e ética necessária dos dados coletados. Ao término da pesquisa, os resultados serão disponibilizados aos interessados na forma de dissertação e Produto Educativo.


Diretora da Unidade
Escolar


Tiago Bissi – Pesquisador


Lígia A. Sad - Orientadora

Silvia Helena Moraes Bianco
Diretora Escolar - Aut. 043/2015
Dec. Municipal N.º 17.962/2014
EMEF "Adwalter Ribeiro Soares"

Colatina, 22 de Outubro de 2015

APÊNDICE I – Modelo de Diário de Aprendizagem

DIÁRIO DE APRENDIZAGEM

Nome: _____ Turma: _____

Registre nessa folha as suas considerações sobre a aula. O que você mais gostou? O que gostaria de saber mais e etc. Fique a vontade para escrever. (Obs.: o seu nome servirá apenas para identificar a sua escrita. Em momento algum ele será mencionado no trabalho)

Obrigado! ☺
Professor: Tiago Bissi.

- Aula 1: Data ____/____/2015. Assunto abordado: _____

- Aula 2: Data ____/____/2015. Assunto abordado: _____

- Aula 3: Data ____/____/2015. Assunto abordado: _____

- Aula 4: Data ____/____/2015. Assunto abordado: _____

APÊNDICE J – Roteiro de entrevista com o professor

ROTEIRO DE ENTREVISTA COM O PROFESSOR**Identificação do professor**

- 1) Nome:
- 2) Sexo: () Masculino () Feminino 3) Idade:
- 4) Tempo de magistério:
- 5) Em quantas escolas trabalha: 6) Carga Horária semanal:

Formação

- 4) Possui graduação em Licenciatura em Matemática? Qual o ano de conclusão?
- 5) Possui Pós-Graduação? Em caso afirmativo, qual o curso concluído, e, qual o ano de conclusão?

Questões relativas ao problema de pesquisa

- 6) Na sua formação, você teve como disciplina obrigatória a História da Matemática? Em caso afirmativo, como esta disciplina foi conduzida, (científica, pedagógica) e, como era a sua relação com ela?
- 7) Você usa recursos didáticos diferenciados em sua aula? Quais?
- 8) Os seus alunos já esboçaram alguma vontade em conhecer a História da Matemática?
- 9) Você trabalha/trabalhou com a História da Matemática em sala de aula? De que forma?
- 10) O que você acha a respeito da inserção da História da Matemática nas aulas de Matemática? Quais as contribuições que ela pode oferecer no processo de ensino e aprendizagem?
- 11) Como é organizado o currículo da escola em relação à disciplina de Matemática? Nele é abordado aspectos históricos ligados à Matemática? E o livro didático, aborda a História da matemática?
- 12) Jean Dieudonné, matemático francês do século XX, fez a seguinte afirmação: “Creio que não é possível compreender as matemáticas de hoje se não tiver pelo menos uma ideia sumária de sua história”. Você concorda com a ideia exposta por Jean Dieudonné? De que forma?