A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: DA INTUIÇÃO À FORMALIZAÇÃO[1]

GAIOTI, Lidiane Ribeiro Rodrigues[2]

ZANON, Thiarla Xavier Dal-Cin[3]

RESUMO: Essa pesquisa qualitativa investigou como a resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem dos agrupamentos simples de combinatória de alunos de quatro turmas de 2ª série do ensino médio de uma escola estadual de Cachoeiro de Itapemirim/ES. A partir da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, desenvolveu-se o estudo em duas etapas: verificação de como a resolução de problemas é utilizada em aulas de matemática; e proposição de atividades para o ensino-aprendizagem-avaliação dos agrupamentos simples de combinatória a partir de problemas geradores. A análise dos dados mostrou que a resolução de problemas enquanto metodologia contribuiu para que os estudantes diferenciassem os agrupamentos envolvidos em cada situação, realizassem atividades nas quais tivessem que pensar nas características de cada um dos agrupamentos, e organizassem estratégias de resolução. Além disso, impactou na prática da professora regente quando trabalhou com outros conteúdos de matemática posteriormente à pesquisa.
Palavras-chave: Análise combinatória; Resolução de problemas; Arranjo simples; Ensino médio.

ABSTRACT: This qualitative research investigated how problem-solving can contribute to the learning of basic combinatorics concepts by students in four 2nd-grade high school classes at a state school in Cachoeiro de Itapemirim/ES. Using a teaching-learning-assessment methodology in mathematics through problem-solving, the study was conducted in two stages: examining how problem-solving is used in math classes, and proposing activities for teaching-learning-assessment of basic combinatorial concepts using generative problems. The data analysis revealed that problem-solving as a methodology helped students differentiate the combinatorial concepts involved in each situation, engage in activities that required them to think about the characteristics of each concept, and develop problem-solving strategies. Furthermore, it had an impact on the teaching practice of the instructor when working with other math content following the research.
Keywords: Combinatorial analysis; Problem-solving; Simple arrangement; High school.

1 INTRODUÇÃO

O primeiro contato com a resolução de problemas foi em 2015/1 na disciplina “Resolução de Problemas” no primeiro período da licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), Campus Cachoeiro de Itapemirim. Na ocasião, conheceu-se a heurística de Polya (POLYA, 1973), as definições e os tipos de problema. Analisou-se livros didáticos e desenvolveu-se trabalhos em grupos através dos quais vivenciou-se a prática da resolução de problemas tanto como alunos de graduação quanto como futuros professores

---

[1] Trabalho Final de Curso da Graduação em Licenciatura em Matemática do Ifes Campus Cachoeiro de Itapemirim.

[2] Licenciada em matemática pelo IFES, *Campus* Cachoeiro de Itapemirim. E-mail: lidianer_rodrigues@hotmail.com.

[3] Professora orientadora. Doutora em Educação. Professora do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Ifes *Campus* Cachoeiro de Itapemirim. E-mail: thiarlax@ifes.edu.br.

de matemática. No papel de alunos, resolveu-se um problema matemático por caminhos/estratégias diferentes. Além disso, apresentou-se a resolução de um problema pela heurística de Polya (POLYA, 1973). Como futuros professores, elaborou-se um plano de aula no qual descreveu-se como seria o trabalho com a resolução de problemas em sala de aula.

Assim, percebeu-se no decorrer das aulas na licenciatura, a potencialidade de tal metodologia, pois ela permitiu a reflexão acerca do ensino de matemática e possibilitou que o estudante, de qualquer nível de ensino, elaborasse um plano de resolução para os mesmos. Desse modo, considerou-se a resolução de problemas como uma possibilidade de tornar o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos mais ativo e atrativo. Isto porque parecia evitar que o estudante se limitasse a copiar e repetir fórmulas.

Ao estudar análise combinatória na licenciatura em matemática a partir de uma abordagem de resolução de problemas, entendeu-se o caminho para se chegar às fórmulas dos agrupamentos. Compreendeu-se a formalização delas, pois o professor introduziu cada agrupamento por meio de problemas, levando-nos a questionar e a elaborar planos para resolução. E, após as tentativas e o envolvimento dos alunos, o professor formalizou as ideias com a classe. Desse modo, considera-se ter aprendido combinatória de um modo mais significativo. Nesse sentido, decidiu-se pesquisar sobre a metodologia de resolução de problemas a fim de aplicá-la na educação básica para o ensino do conteúdo em questão.

Por outro lado, quando acompanhou-se aulas de matemática no estágio não obrigatório, percebeu-se que a resolução de problemas não era tratada da maneira como fora vivenciada na licenciatura. Ao trabalhar análise combinatória verificou-se que uma das professoras apresentou as fórmulas de cada agrupamento, mostrou um exemplo e orientou aos alunos que aplicassem as mesmas para resolverem alguns exercícios de fixação. Percebeu-se então que os estudantes ficavam "perdidos" durante a resolução, visto que eles não compreendiam o conteúdo e nem sabiam qual fórmula usar. Além disso, não conseguiam identificar o modelo combinatório (ZANON, 2019; GODINO; BATANERO; NAVARRO-PELAYO, 1996) do problema e pensar em uma maneira coerente para resolvê-los. Pôde-se observar que foi um grande desafio para os estudantes interpretar as situações-problema apresentadas pelo professor e identificar os agrupamentos de combinatória nelas subentendidos.

Por isso, decidiu-se que a análise combinatória seria o objeto matemático desta investigação. Isto porque, além da vivência no estágio não obrigatório, ao estudá-la na educação básica apresentou-se dificuldades semelhantes àquelas demonstradas pelos estudantes das turmas acompanhadas naquela ocasião. Na época, a instrução acerca de tal conteúdo se baseou em aplicação de fórmulas. O comando era "se a ordem importa, usa-se a fórmula do arranjo, caso contrário, aplica-se a fórmula de combinação". No entanto, muitas vezes, identificar se existia ordem ou não, era uma tarefa difícil, uma vez que não se compreendia o que significava cada agrupamento.

Em mapeamento realizado por Zanon (2019) verificou-se nas pesquisas cujos sujeitos foram estudantes do ensino médio que eles relatavam motivos e/ou razões semelhantes às acima mencionadas. Vimos que os pesquisadores também demonstraram preocupação com o ensino de análise combinatória ao afirmar que este acontece com ênfase em fórmulas e procedimentos inviabilizando a compreensão pelos alunos. Diante desse contexto motivou-se a investigar acerca do ensino de combinatória simples por meio da resolução de problemas.

Focaliza-se, assim, nos agrupamentos que não envolvem elementos repetidos. Desse modo, busca-se responder ao seguinte questionamento: *Como a resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática pode contribuir para a aprendizagem de arranjo simples de alunos da 2ª série do ensino médio?* Tem-se o objetivo de verificar como a resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática pode contribuir para a aprendizagem dos agrupamentos simples de combinatória de alunos da 2ª série do ensino médio. De modo mais específico, objetiva-se: (1) observar e descrever o cenário de sala aula no que tange a utilização da resolução de problemas para o ensino e aprendizagem de matemática; e, (2) desenvolver uma proposta de atividades para o ensino dos agrupamentos simples de combinatória a partir de problemas geradores de conhecimento matemático.

Pensou-se nesses objetivos, pois acredita-se que a aprendizagem de combinatória ocorre quando o estudante consegue (i) diferenciar os agrupamentos envolvidos em cada situação; (ii) realizar atividades nas quais tenha que pensar nas características de cada um dos agrupamentos; e (iii) organizar estratégias de resolução. Nesse contexto, acredita-se ainda que a resolução de problemas enquanto metodologia de ensino pode contribuir para a aprendizagem de combinatória. Após esta breve introdução, traz-se, na sequência, o referencial teórico, a metodologia a partir da qual se desenvolveu esta investigação, a análise de dados e as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentam-se os principais referenciais teóricos que sustentam esta pesquisa. Desse modo, aborda-se (1) os aspectos formais referentes à análise combinatória. A partir dos estudos de Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (2016; 1991), Hazzan (1993) e Zanon (2019) enfatiza-se os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação.

Além disso, argumenta-se (2) sobre atributos com base nos estudos de Hershkowitz (1994) e de Zanon (2019), visto que esta última enfatiza o ensino e a aprendizagem de combinatória. Apresenta-se ainda o (3) modelo combinatório implícito, na visão de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), e de Zanon (2019).

Discute-se também a (4) resolução de problemas como perspectiva metodológica. Para tanto, embasa-se em Onuchic e Morais (2014) para apresentar um panorama da resolução de problemas ao longo da história. Utiliza-se Polya (1973) para falar acerca da definição de problema e Branca (1997) para apresentar as diferentes interpretações assumidas pela resolução de problemas. Traz-se Onuchic e Allevato (2014; 2011) para dialogar sobre a metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática através da resolução de problemas, e, sobre problemas geradores. Por fim, a partir dos estudos de Van de Walle (2009) situa-se o planejamento de aulas baseadas na resolução de problemas.

2.1 Análise combinatória

Análise combinatória ou combinatória, "é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (MORGADO et al, 2016, p. 1). Ela envolve os agrupamentos de arranjos, permutações e combinações. Eles podem ser simples, quando não ocorrem repetições de elementos, ou com repetição, quando há repetição de elementos. Além disso, envolve problemas nos quais outras técnicas de contagem se fazem necessárias para resolvê-los, como, por exemplo: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey dentre outras. Segundo Morgado et al., (2016, p. 1) os dois tipos principais de problemas que a combinatória busca resolver envolve "(i) Demonstrar a existência de subconjuntos e elementos de um conjunto finito dado e que satisfaz certas condições; (ii) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas".

Embora os problemas referentes à análise combinatória tenham relação com situações cotidianas, alguns exigem "engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (MORGADO et al, 2016, p. 2). A expressão "compreensão plena" parece-nos estar relacionada ao modelo combinatório implícito ao enunciado do problema, o que é discutido por Batanero et al. (1996). Este pode ser concebido como modos de representações ou esquemas referentes ao enunciado dos problemas combinatórios. Além disso, Zanon (2019) afirma que "a compreensão do modelo combinatório implícito no enunciado conduz todo o processo de resolução de problemas combinatórios" (p. 64). Desse modo, verifica-se o quão importante é a compreensão plena de um enunciado.

Como dito anteriormente, enfatiza-se neste texto, os agrupamentos que não envolvem elementos repetidos. Isto porque se considera que se forem bem compreendidos, a aprendizagem dos agrupamentos com repetição ocorrerá de maneira mais simples. Por isso, a seguir define-se e caracteriza-se os agrupamentos simples (MORGADO et al., 2016; 1991; HAZAN, 1993; ZANON, 2019) a partir de uma listagem de seus atributos (HERSHKOWITZ, 1994; ZANON, 2019).

Princípio Multiplicativo

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que envolve o princípio multiplicativo e o aditivo, "constitui a ferramenta a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem abordados a nível de 2º grau" (MORGADO et al, 1991, p. 18). Pode ser enunciado como "Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy" (MORGADO et al, 1991, p. 18).

Arranjo

Arranjo simples é um dos agrupamentos de combinatória, definido por Hazzan (1993, p. 16) como: "Seja *M* um conjunto com *m* elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2,..., a_m\}$. Denomina-se arranjo dos *m* elementos tomados *r* a *r* ($1 \leq r \leq m$) a qualquer *r*-upla (sequência de *r* elementos) formada com elementos de *M* todos distintos". Ou seja, seja um conjunto com *n* elementos distintos, é possível formar subconjuntos ordenados de *p* elementos distintos selecionados dos *n* elementos do conjunto inicial. Assim, *n* representa o número total de elementos do conjunto e *p* a quantidade de elementos a serem ordenados. A quantidade de elementos resultante desse ordenamento pode ir até uma quantidade *n* de elementos do conjunto dado. No caso em que *n* for igual a *p* obtêm-se um caso particular de arranjo, a permutação.

Consideraremos também o conceito de arranjo que é visto com base em atributos (características) definidos por Zanon (2019, p. 73):

> - é um agrupamento identificado pela análise combinatória;
> - diferencia-se dos outros em função da ordem e da natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas;
> - é indicado por $A_{n,\,p}$;
> - lê-se arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*;
> - *n* indica o número de elementos distintos do conjunto;
> - *p* representa o número de elementos distintos das sequências formadas;
> - *p* pertence aos naturais não nulos, ou seja, diferentes de zero;
> - *p* pode ser menor ou igual a *n*;
> - é calculado pela fórmula $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
> - algebricamente essas características de um arranjo simples podem ser assim

representadas: $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, $\forall\, n \in$ IN*, $\forall\, p \in$ IN*, $p \leq n$.

Permutação

Cada ordenação de *m* elementos, a partir de um conjunto M = {a_1, a_2,..., a_m}, é chamado de *permutação simples* de *m* elementos a todo arranjo em que $r = m$ (HAZZAN, 1993). A partir dessa definição, tomamos a permutação como um caso particular de arranjo simples, ou seja, "todo arranjo em que n = p" (HAZZAN, 1993, p. 18).

Um atributo relevante em uma permutação simples é o fato de que o número de elementos de um conjunto dado é igual à quantidade de posições a serem ocupadas (ZANON, 2019). Desse modo, a literatura (HAZZAN, 1993) define permutação simples como o caso particular de arranjo em que os elementos são tomados *n* a *n*. Desse modo, nota-se que à medida que o número de elementos de um dado conjunto cresce a quantidade de formas de se organizar esses algarismos também aumenta.

Segundo Zanon (2019, p. 75), permutação simples pode ser compreendida como:

> - sendo $p \leq n$, a permutação é um caso particular de arranjo simples; portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos;
> - lê-se permutação simples de *n* elementos tomados *n* a *n*;
> - os *n* elementos da sequência são tomados *n* a *n*;
> - *n* indica o número de elementos distintos;
> - é calculada pela fórmula $P_n = n!$, sintetizada algebricamente em Morgado et al. (1991) pela operação $P_n = n(n-1) \ldots 1 = n!$, construída a partir da fórmula de arranjo simples, pois $P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ assim, $P_n = n\,!$.

Combinação

A combinação consiste em agrupamentos não ordenados, ou seja, a ordem não interfere nos agrupamentos. Nesse sentido, difere-se de arranjos e permutações pela natureza dos elementos. Hazzan (1993, p. 33) define combinação de *n* elementos, tomados *p* a *p*, como "subconjuntos de N constituídos de *p* elementos". Em que N é o conjunto dado, *n* é a quantidade total de elementos de N e *p* a quantidade de elementos que será agrupado *p* a *p*.

Na perspectiva de Zanon (2019, p. 78-79), o conceito de combinação simples pode ser assim compreendido:

> - a ordem dos elementos não é considerada, pois não altera o conjunto formado; - os subconjuntos formados se diferenciam pela natureza dos elementos;
> - encontramos $C_{n,p}$;
> - lê-se combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*;
> - *n* indica a quantidade de elementos do conjunto;
> - *p* representa um número natural menor que ou igual a *n* que sinaliza quantos elementos vão compor os subconjuntos formados;
> - é calculada por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $0 \leq p \leq n$.

Após a definição dos agrupamentos simples de combinatória, passa-se a discorrer sobre atributos e modelo combinatório implícito.

2.2 Atributos

Cada um dos agrupamentos de combinatória possui características específicas que na concepção de Zanon (2019) são denominadas como atributos. A partir dos estudos de Hershkowitz (1994, p. 15), a pesquisadora chama atenção para o fato de que “boa parte da estrutura dos conceitos básicos pode ser considerada como conjunção”. E, tal conjunção é formada pela composição de ideias relevantes que representam um conceito matemático (ZANON, 2019). Desse modo, é possível conjecturar conceitos matemáticos a partir da associação de características relevantes deles.

Zanon (2019) assinala a existência de atributos relevantes e irrelevantes acerca de um conceito matemático. Desse modo, considera-se aqui atributos relevantes como “o conjunto de características que devem ser reconhecidas em um enunciado, a fim de que o modelo combinatório implícito – MCI ao problema seja identificado” (ZANON, 2019, p. 101). Por outro lado, a autora define atributos irrelevantes como “o conjunto de características que não são relevantes para a combinatória em si, mas são úteis à matemática e se apresentam associadas a outros conceitos” (ZANON, 2019, p. 101). Nesse contexto, Zanon (2019) destaca que leitura e interpretação do enunciado são necessárias para que o estudante identifique o MCI e os atributos relevantes que darão suporte ao processo de resolução. A partir dos estudos de Zanon (2019) apresenta-se na tabela abaixo os atributos relevantes de cada agrupamento simples de combinatória.

Tabela 1 – Agrupamentos e atributos relevantes

AGRUPAMENTOS	ATRIBUTOS RELEVANTES
Arranjo	✓ A ordem e a natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas são relevantes; ✓ É conhecido por $A_{n,\ p}$, em que n indica o número de elementos distintos do conjunto e p representa o número de elementos distintos das sequências/subconjunto formados, pertence aos naturais não nulos e pode ser menor que n; ✓ É calculado pela fórmula $A_{n,\ p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutação	✓ É vista como um caso particular de arranjo simples; portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos; ✓ É dada por P_n, em que os n elementos distintos da sequência são tomados n a n; ✓ É calculada pela fórmula $P_n = n!$
Combinação	✓ A ordem dos elementos não é considerada, pois não altera o conjunto formado; portanto, os subconjuntos se diferenciam pela natureza dos elementos; ✓ Geralmente é dada por $C_{n,p}$ ou C_n^p em que n indica a quantidade de elementos do conjunto e p representa um número natural menor ou igual a n que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados; ✓ É calculada pela fórmula $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, 0 \leq p \leq n$.

Fonte: Retirado de Zanon (2019, p. 101)

2.3 Modelo combinatório implícito

Os problemas de combinatória possuem atributos (características) que implicam no processo de resolução (ZANON, 2019). Segundo Batanero et al. (1996) tais características servem para ajudar o resolvedor a identificar o modelo combinatório implícito (MCI) que orienta o processo de resolução e está subjacente, implícito ao problema. São informações que não estão evidentes, e, por isso, os estudantes normalmente apresentam dificuldade para identificar qual operação devem realizar e qual agrupamento combinatório está naquele problema. Desse modo,

> [...] esses modelos podem ser considerados como tipos de representações ou esquemas concretos inerentes às declarações de problemas combinatórios. A distinção entre esses modelos é relevante do ponto de vista matemático, já que o tipo de objetos e representações que intervêm em cada modelo é diferente (amostragem, correspondências, partições de conjuntos, etc.). Isso influenciará necessariamente os procedimentos de resolução e as dificuldades dos grupos [de alunos] ante os diferentes tipos de problemas e técnicas de resolução (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996 citado por ZANON, 2019, p. 67).

Ao se deparar com um problema, o estudante precisa compreender o enunciado. Esse é o primeiro passo da resolução (POLYA, 1973). A partir do momento em que "um indivíduo lê e compreende o enunciado (o texto) de um problema de combinatória, ele passa a analisar o modelo combinatório implícito neste enunciado" (ZANON, 2019, p. 65). Assim, a compreensão do problema influenciará diretamente em sua resolução, possibilitando ao aluno chegar à conclusão referente ao agrupamento envolvido (arranjo, permutação, combinação) e qual operação deverá realizar. Desse modo, poderá pensar em uma possível solução para o problema proposto.

Diante disso, dialoga-se a seguir sobre a resolução de problemas. Trata-se de problemas geradores e da resolução de problemas enquanto metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática.

2.4 Resolução de problemas

Preocupações com a aprendizagem em matemática e o papel da resolução de problemas nesse processo emergiram desde os estudos desenvolvidos por George Polya em 1945 quando foi publicada a obra intitulada "A arte de resolver problemas". Nele, destacava que um problema é algo que precisa ser resolvido e que apresenta alguma dificuldade inicial de modo que não se tenha uma solução imediata. Desse modo, à medida que se conhece procedimentos imediatos para chegar à resolução, esse deixa de ser um problema. Portanto, o que é um problema para uma pessoa em um contexto, pode não ser para outra (POLYA, 1973). Além disso, apresentou quatro passos para se resolver um problema: i) compreender o problema; ii) estabelecer um plano; iii) executar o plano; iv) examinar a solução obtida. Ademais, apresentou problemas nos quais ilustrou cada um dos passos, destacava que o problema impulsiona a atividade matemática (ONUCHIC; MORAIS, 2014).

Por outro lado, a resolução de problemas enquanto pesquisa se fortaleceu nos Estados Unidos, a partir do final da década de 60 com importantes trabalhos como os de Jeremy Kilpatrick que em 1967 publicou uma revisão de pesquisas sobre o tema (ONUCHIC; MORAIS, 2014). Ainda na década de 60, ocorreu nos Estados Unidos um movimento de retorno às bases, ou seja, à "teoria conexionista". Tal teoria psicológica, proposta por Thorndike na década de 1920, defendia que "toda aprendizagem consiste de adição, eliminação e de organização de conexões. Essas conexões são formadas, ou quebradas, ou organizadas, entre situações e respostas" (BROWNELL; 1944 apud ONUCHIC; MORAIS, 2014, p. 19). Ou seja, a partir dessa concepção, o foco do ensino era a transmissão de conhecimento, e o da aprendizagem, era a memorização. Nesse sentido, o aluno era direcionado pelo professor a responder os problemas de uma forma pronta e acabada. Entendia-se resolução de problemas como meta. Ou seja, a meta era ensinar matemática para resolver problemas (BRANCA, 1997).

Enquanto meta "aprender a resolver problemas é a razão principal para o estudo de matemática. Este ponto de vista influencia a natureza de todo o currículo matemático e tem implicações importantes para a prática em sala de aula" (BRANCA, 1997, p. 5). Nesse sentido, o professor ensina um conteúdo matemático e, em seguida, propõe uma lista de problemas para serem resolvidos a partir do que foi ensinado. Ou seja, o ensino de matemática visa à resolução de problemas. E, o maior interesse está na resposta obtida, no resultado encontrado.

Na década de 70, a resolução de problemas passou a ser vista como processo (BRANCA, 1997). Neste momento, houve a valorização dos trabalhos de Polya (1945) cuja ênfase foi dada as quatro etapas de resolução (ONUCHIC; MORAIS, 2014). Nesse momento histórico, o aluno era treinado a resolver problemas. Esse era, portanto, o objetivo do ensino de matemática. Consiste na valorização dos "métodos, procedimentos, estratégias e heurísticas que os alunos usam na resolução de problemas. Essas partes do processo da resolução de problemas são sua essência e, como tal, tornam-se um foco do currículo da matemática" (BRANCA, 1997, p. 5). Nessa perspectiva, além do professor propor os problemas, valoriza-se as etapas de resolução, os processos desenvolvidos pelo estudante para encontrar a solução. Desse modo, essa interpretação de resolução de problema se diferencia da anterior.

Após um longo período de tentativas sem sucesso quanto à aprendizagem dos alunos em matemática, testes internacionais comprovaram o baixo rendimento de crianças norte-americanas, em resolução de problemas matemáticos, quando comparadas a crianças do Oriente, por exemplo. Diante disso, os norte-americanos decidiram modificar o currículo, e agora enfatizariam o retorno do "ensino com compreensão" com o objetivo de que os estudantes desenvolvessem habilidades de resolução de problemas. Assim, a partir da década de 80, com o declínio da matemática moderna, ela começou a ser vista como uma habilidade básica (BRANCA, 1997).

Nesta terceira interpretação de resolução de problemas, são focalizadas as habilidades básicas que um estudante deve desenvolver, por exemplo, aquelas listadas pelo Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES) e pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Desse modo, ensina-se a resolver problemas a fim de que o estudante desenvolva certas habilidades listadas em documentos oficiais. Assim, vê-se que o professor ensina matemática como meta, o aluno aprende a resolver como processo, para enfim, desenvolver uma habilidade básica, que é o conhecimento em si. E essa é a forma como os currículos atuais ainda estão organizados.

No final da década de 80, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) lançou em 1989 os Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar. Em 1991 publicaram Os Padrões Profissionais para o ensino de Matemática. Mais tarde, em 1995 o NCTM lançou Padrões de avaliação para a Matemática Escolar, e em 2000, os Princípios e Padrões para a Matemática Escolar. De acordo Onuchic e Morais (2014) tais documentos tiveram bastante influência quanto à inserção da resolução de problemas no currículo norte-americano, o que repercutiu em currículos do mundo inteiro, inclusive no Brasil. A partir de então, começou-se a pensar na "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" (ONUCHUIC; ALLEVATO, 2011; 2014). Nela, a resolução de problemas passa a ser vista com uma perspectiva metodológica, em que, inicialmente trabalha-se com o problema gerador com vistas a problematizar a situação, para posteriormente, formalizar o conteúdo.

Além das três interpretações anteriores (meta, processo e habilidade básica) para resolução de problemas que tendem a variar em função do planejamento do professor, Onuchic e Allevato (2014; 2011) apresentam a visão de perspectiva metodológica. “Nessa metodologia, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014, p. 44). Tal problema recebe o nome de gerador, “pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento, ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema” (p. 45). As autoras discutem sobre o papel do professor e do aluno nessa metodologia. Pontuam que “os alunos [...] [são] co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80). Nesse sentido,

> [...] ao considerar o ensino – aprendizagem - avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Para melhor organizar a metodologia, Onuchic e Allevato (2014; 2011) apresentam um roteiro em nove etapas. São elas: *preparação do problema* - momento em que se faz a seleção do problema gerador com o objetivo de proporcionar a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento que ainda não foi trabalhado em sala de aula; *leitura individual* - cada aluno recebe uma cópia do problema e solicita-se que faça a leitura individualmente; *leitura em conjunto* - os alunos são orientados a formar grupos e realizar a leitura em conjunto a fim de esclarecer dúvidas que emergir acerca do enunciado do problema. Caso seja necessário, o professor pode auxiliar os alunos na leitura e interpretação; *resolução do problema* - momento em que os estudantes, em seus grupos e de forma participativa e colaborativa darão início à resolução; *observar e incentivar* **-** o professor observa o desempenho dos alunos, enquanto eles buscam resolver o problema. Além disso, incentiva o trabalho colaborativo e age como mediador, permitindo a interação e construção de ideias entre os estudantes; *registros das resoluções no quadro* - nessa etapa, alunos representantes dos grupos, são orientados para irem ao quadro apresentar a resolução; *plenária* - momento em que todos os estudantes são convidados a discutirem sobre as diferentes resoluções registradas no quadro, a fim de defenderem suas ideias e esclarecerem suas dúvidas; *busca do consenso* - após as discussões sobre as resoluções, o professor busca, com o auxílio da turma, chegar a um consenso sobre o resultado correto; e, por fim, a *formalização do conteúdo* - nesse momento, o professor faz o registro formal do conteúdo, organiza as ideias em linguagem matemática e realiza a padronização dos conceitos e procedimentos que foram obtidos através da resolução, demonstrando as propriedades formais do assunto.

Nesse cenário, a avaliação é formativa e "feita, continuamente, durante a resolução do problema" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014, p. 47). Além disso, segundo as autoras, a resolução de problemas enquanto metodologia "faz da compreensão seu foco central e seu objetivo. Com isso não tira a ênfase dada à resolução de problemas, mas amplia-se seu papel no currículo" (p. 48). Portanto, adotamos nesta pesquisa, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação em matemática através da resolução de problemas.

3 METODOLOGIA

Essa pesquisa tem base epistemológica interpretativa, que considera o conhecimento como decorrente da interpretação e compreensão dos fatos observados (FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Assim, "o investigador introduz-se no ambiente educacional com o propósito de compreender sem julgar/intervir. Busca interpretar o significado que o ensino tem para os participantes, em sala de aula" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 54).

Desse modo, desenvolveu-se um estudo de abordagem qualitativa, pois compreendeu o processo de produção do conhecimento no *lócus* da sala de aula de 2ª série do ensino médio. Segundo Flick (2009, p. 20), essa abordagem é "de particular relevância ao estudo das relações sociais devido à pluralização das esferas de vida [...] [que] exige uma nova sensibilidade para o estudo empírico das questões". Sendo assim, é possível, através dela, realizar uma leitura da realidade, neste caso, do ambiente da sala de aula que se investiga. Isto permite emergir inquietações, questionamentos pessoais e possibilidades de pensar o ensino e a aprendizagem dos agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação.

Assim sendo, estudou-se o caso específico de quatro turmas de 2ª série de ensino médio quando resolveram problemas envolvendo os agrupamentos simples de combinatória. Por isso, a abordagem será qualitativa do tipo estudo de caso: "estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento" (GIL, 1988, p. 58). Este é recomendado para estudar casos particulares como o de nossa pesquisa. Além disso, o estudo de caso "busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012,

p. 110). No entanto, esse tipo de pesquisa não permite a generalização nem a manipulação de dados, mas sim, a sua interpretação.

Os sujeitos desta pesquisa foram setenta e nove estudantes de quatro turmas de 2ª série do ensino médio de uma escola estadual de tempo integral, localizada na cidade de Cachoeiro de Itapemirim/ES. Todavia, a análise dos dados será realizada com uma amostra composta por tipos de resoluções distintas para um problema de arranjo simples. Isto foi necessário em função do volume de dados gerados. Os grupos de estudantes foram selecionados mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e frequência às aulas regulares.

A pesquisa aconteceu em duas fases desenvolvidas de acordo com os objetivos específicos mencionados anteriormente. A primeira consistiu na observação e descrição do cenário de sala aula no que tange à utilização da resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem de matemática. Optou-se pela observação como técnica de coleta de dados, uma vez que essa é utilizada para "conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade" (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 190). Além disso, a observação permite que o pesquisador identifique e obtenha "provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento" (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 191). Na ocasião comportamo-nos como observadoras reveladas, pois antes de iniciar a pesquisa apresentou-se os objetivos e explicou-se como seria a metodologia adotada (ZANON, 2019).

A segunda etapa priorizou a elaboração e o desenvolvimento de uma proposta de atividade a partir de problemas geradores de conhecimento matemático (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014; 2011). O planejamento seguiu os passos iniciais descritos por Van de Walle (2009). A saber: (a) identificação do conceito matemático que se pretende trabalhar e articulação clara das ideias que se espera que os alunos aprendam ao final da aula; (b) ter em mente os alunos, no sentido de conhecer suas limitações e verificar se possuem conhecimentos prévios que auxiliarão na compreensão do conteúdo informado no primeiro passo; (c) a escolha da tarefa é o momento em que o professor seleciona/elabora problemas adequados aos alunos. Por mais simples que a tarefa seja, ela pode ser apropriada aos alunos daquele contexto; (d) de posse do conhecimento dos conteúdos matemáticos que o aluno já sabe, o professor pode antecipar o que vai acontecer, pois tem a possibilidade de usar essa informação para pensar em dúvidas e questionamentos que possam surgir.

Neste processo, buscou-se problemas de resolução sem o uso de fórmulas, pois se acredita que esse tipo permite que o estudante liste as possibilidades e os atributos implícitos em cada modelo combinatório subjacente. Assim sendo, devido ao volume de dados gerados, apresenta-se no quadro 1 o problema de arranjo simples cujos dados foram analisados neste estudo. Além dele, traz-se o modelo combinatório implícito e os atributos que se consideram relevantes em cada um. Os demais problemas encontram-se no Apêndice 1.

Quadro 1 – Problemas, modelo combinatório implícito e atributos

PROBLEMA	MODELO COMBINATÓRIO	ATRIBUTOS
VI[4]) De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode ir de A até C, passando por B? (figura 1) Fonte: Adaptado de DANTE, 2014, v. 3, p. 18.	Arranjo simples; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Quantas opções de caminhos a família de Beto tem da cidade A para B? E da cidade B para C? São caminhos iguais? Possuem a mesma localização? - Os caminhos possuem a mesma natureza? A mesma origem? - A família de Beto pode ir direto de A até C? - Como se dá a relação entre os caminhos disponíveis para escolha e os que serão escolhidos para compor o trajeto? - O trajeto muda se a escolha do caminho mudar? Por quê? Obs.: O aluno precisará realizar uma contagem das diferentes formas de montar os trajetos.	- Ao perceber a quantidade de caminhos disponíveis para escolha e a existência de uma sequência na escolha desses, o aluno poderá identificar que existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto segundo a sua natureza, no entanto, nem todos os elementos disponíveis serão utilizados ao mesmo tempo; - Poderá identificar que é um agrupamento ordenado ao perceber que o trajeto muda se a escolha de pelo menos um dos caminhos também mudar, isso devido à natureza dos elementos, pois são caminhos distintos, o que modifica todo o trajeto; - A ordem e a natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas são relevantes; - É conhecido por $A_{n,\ p,}$ em que *n* indica o número de elementos distintos do conjunto e *p* representa o número de elementos distintos das sequências/subconjunto formados, pertence aos naturais não nulos e pode ser menor que *n;* - Pode ser calculado por $A_{n,\ p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2019.

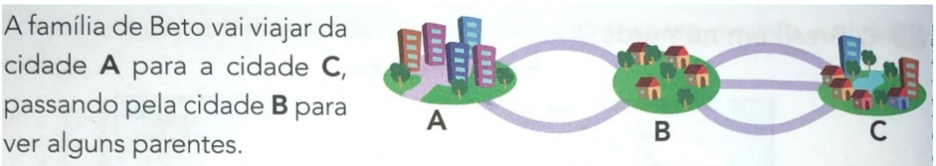
O desenvolvimento da segunda etapa foi realizado em parceria com a professora regente da turma. O tempo previsto foi de seis aulas de 50 minutos. A atividade foi desenvolvida em grupos com três, quatro ou cinco integrantes, isso devido ao número de alunos em cada turma. Primeiramente, intencionava-se apresentar aos alunos três problemas, sendo um de cada agrupamento (problemas I, III e V – ver apêndice 1). No entanto, por orientação da professora, entregou-se um problema de cada vez para leitura individual, e, em

[4] Manteve-se a ordem em que o problema foi trabalhado com os estudantes.

seguida, leitura em grupo. Para cada problema, perguntou-se se todos haviam compreendido o enunciado, primeiro passo para a resolução (POLYA, 1973). Além disso, o entendimento do texto do problema ajuda a identificar o modelo combinatório implícito no mesmo (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ZANON, 2019).

Feito isso, os alunos iniciaram a resolução. Durante este processo, a professora e a pesquisadora mediaram e incentivaram a resolução pelos estudantes, dando-lhes espaço para que levantassem hipóteses e discutissem em grupo. Em seguida, a pesquisadora convidou alunos de grupos que resolveram de formas diferentes para apresentarem sua resolução à turma. Logo após, discutiu-se as resoluções expostas para chegar a um consenso sobre qual seria uma possível resolução para cada problema. O problema VI (ver quadro 1) foi trabalhado de forma distinta. Entregamos aos alunos a situação mostrada na figura 1 e seguimos o roteiro apresentado por Zanon (2019).

Figura 1 – Problema VI apresentado no quadro 1



Fonte: Retirado de Zanon (2019, p. 192).

A partir dela, propuseram-se os seguintes questionamentos: (1) Isto é um problema? Por quê? Visando incentivar os estudantes a pensarem no conceito de problema; (2) O que vocês pensam que deve ser feito para representar a situação dada? Com objetivo de impulsionar o processo de resolução. Esperava-se que sugerissem a inclusão de uma questão que pudesse tornar o problema resolvível; (3) Para provocar os alunos a se envolverem na tarefa, perguntou-se “Qual questão seria essa?” Caso não respondessem ou apresentassem muitas variações, pesquisadora e professora fariam a síntese; (4) Resumir as respostas obtidas com a segunda questão e propor a tarefa: De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode ir de A até C, passando por B? A resposta esperada seria 6, que designa quantidade (ZANON, 2019).

Em seguida, solicitou-se que os alunos agrupassem os problemas que possuíam alguma semelhança entre si, tais como, elementos do enunciado e modo de resolução. Posteriormente, orientou-se que listassem as semelhanças. Nesse momento, foi possível verificar como o sujeito identificou o modelo combinatório e os atributos (ZANON, 2019; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Ao final, encaminhamo-nos para a formalização do arranjo simples, assim como, à generalização da fórmula. Para isso, voltamos ao problema VI (ver quadro 1). Os dados obtidos serão apresentados e analisados a seguir à luz do referencial teórico.

4 ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados, feita a partir dos referenciais teóricos, organizou-se em “Descrição do ambiente de sala de aula”, “A resolução de problemas pelos estudantes” e “Os processos de resolução e a passagem da intuição para a formalização”. A seguir, será abordado cada um dos eixos acima mencionados.

4.1 Descrição do ambiente de sala de aula

A primeira fase da pesquisa desenvolveu-se durante quatro semanas, do dia 19/08/2019 ao dia 13/09/2019. As observações realizadas auxiliaram-nos a responder às seguintes questões: (1) Como os problemas são trabalhados nas aulas de matemática?; (2) Quais relações podem ser vistas entre o objeto matemático e o problema?; (3) Como a resolução dos estudantes é explorada em sala de aula? (4) Como a professora compreende o seu trabalho com a resolução de problemas?.

Quanto à questão 1, notamos que a utilização dos problemas variava entre meta e habilidade básica (BRANCA, 1997). Pois a meta do ensino de matemática, em boa parte das aulas, direcionava os alunos a aprenderem a resolver problemas de matemática (BRANCA, 1997). Evidenciou-se o foco dado às habilidades básicas (BRANCA, 1997) que os estudantes deveriam desenvolver, para atender àquelas listadas pelo Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES). Nesse sentido, era comum após o ensino do objeto matemático, os alunos receberem problemas envolvendo questões do PAEBES e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A maior preocupação dos alunos era em relação à resposta obtida no resultado final. Perguntas como “a resposta dá tanto?” foram frequentes. Percebeu-se que não se importavam se os processos que utilizavam estavam corretos. Notou-se que tal posicionamento dos alunos não valorizava os processos e as etapas de resolução, que segundo Branca (1997) visa o reconhecimento dos procedimentos e estratégias utilizados pelos estudantes ao resolverem um problema de matemática.

Acerca da questão 2 que buscava relações entre o objeto matemático e o problema, notou-se que, de maneira geral, as explicações dos conteúdos aconteciam por meio de aula expositiva, dialogada, atividades de demonstrações práticas (os conteúdos de geometria e trigonometria, por exemplo) e, algumas vezes, por meio de pesquisas realizadas pelos alunos. Quanto ao problema, verificou-se que a professora o usava como meio de verificar a aprendizagem do objeto matemático e que a relação entre ambos tendia a interpretação de resolução de problemas como meta, o que reforça e reafirma as observações anteriores.

No que se refere à questão 3 (Como a resolução dos estudantes é explorada em sala de aula?) entrevistou-se a professora regente a fim de respondê-la. Ela afirmou que

> *A resolução de problemas é primordial na matemática, pois o aluno quando lê e compreende o enunciado da questão, ou seja, interpreta o problema e depois resolve a pergunta significa que ele entendeu o conteúdo. (Emanuelle[5],11/09/19)*

Percebe-se na fala dela uma interpretação para a resolução de problemas que se assemelha àquela que Branca (1997) define como *meta,* pois o problema trabalhado em sala tem o objetivo de orientar a aprendizagem de determinado conteúdo matemático. Isto reforça ainda mais as percepções acerca das questões 1 e 2. Além disso, parece indicar a coerência entre o modo através do qual a professora regente compreende e desenvolve suas aulas utilizando a resolução de problemas.

Em relação à questão 4, a professora disse na entrevista que o seu trabalho com a resolução de problemas "fica significativo quando o aluno resolve uma situação problema e vê a aplicabilidade do conteúdo ministrado" (Emanuelle, 11/09/19). Na fala dela identifica-se a menção às habilidades básicas que os indivíduos precisam para atuar em sociedade, no que tange à transposição do conteúdo matemático para a vida cotidiana (BRANCA, 1997). Além disso, nota-se a relação com os descritores do PAEBES como um modo de validar o trabalho desenvolvido em sala de aula. Identifica-se aqui a preocupação quanto ao ensino de matemática que objetiva a formação de um indivíduo que seja capaz de fazer uma leitura crítico-reflexiva da sociedade, trazendo o pensamento matemático para essa interpretação.

A partir dos dados coletados, pode-se descrever o cenário de sala de aula como um *lócus* de ensino fundamentado nas interpretações de meta e habilidade básica, assinaladas por Branca (1997). Por isso, considerou-se um ambiente propício ao desenvolvimento de uma atividade orientada pela resolução de problemas enquanto perspectiva metodológica, uma vez que a professora se mostrou disposta a vivenciar tal experiência e que os alunos estão habituados a resolver problemas de matemática respaldados nas perspectivas assinaladas. Diante do exposto, acredita-se ter alcançado o primeiro objetivo específico que esta pesquisa se propunha a desenvolver.

4.2 A resolução de problemas pelos estudantes

---

[5] A professora autorizou o uso de seu nome próprio.

A segunda fase desenvolveu-se em seis aulas de 50 minutos em cada uma das quatro turmas de 2ª série de ensino médio, no período de 17 a 26/09/2019. Seguiu-se o roteiro para o trabalho com a metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação através da resolução de problemas proposto por Onuchic e Allevato (2014; 2011). Como dito anteriormente, aplicamos seis problemas envolvendo os agrupamentos simples de arranjo, permutação e combinação (ver apêndice 1). Entretanto, para a análise dos dados nos atentaremos ao problema VI de arranjo simples.

As tarefas referentes a esse agrupamento foram aplicadas na turma de 2ª série 01 nos dias 20 e 23/09/2019 e na 2ª série 02 nos dias 20 e 26/09/2019. Na 2ª série 03, a atividade foi desenvolvida em 23 e 26/09/2019 e na 2ª série 04, em 18 e 24/09/2019. Os trabalhos foram realizados em grupos com três, quatro ou cinco integrantes, em função do número de alunos presentes na sala. No quadro 2 apresentamos os problemas de arranjo e descrevemos os tipos de soluções apresentadas pelos estudantes.

Quadro 2 – Problemas de arranjo simples e tipos de soluções apresentadas pelos estudantes

PROBLEMAS	**TURMAS / TIPOS DE SOLUÇÕES APRESENTADAS**			
	2ª série 01	**2ª série 02**	**2ª série 03**	**2ª série 04**
V) A senha do celular da professora Emanuelle é composta por cinco dígitos. Os dois primeiros são algarismos e os demais são vogais. Os algarismos foram escolhidos a partir da data de nascimento de sua mãe que foi em 1956. Outra informação importante que Emanuelle nos passou é que as vogais não são repetidas. Quais são as possibilidades de senhas para acesso ao celular da professora Emanuelle? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	- 1 grupo resolveu por meio do princípio multiplicativo. - 4 grupos listaram as possíveis senhas que começavam com dois algarismos fixos seguidos da vogal "a" trocando apenas as outras duas vogais. Listaram, também, as possíveis composições distintas com dois algarismos. Assim, chegaram ao total de possibilidades em cada um dos casos e multiplicaram pela quantidade de vogais. - 1 grupo não conseguiu resolver.	- 3 grupos resolveram por meio do princípio multiplicativo. - 3 grupos listaram as possíveis senhas que começavam com dois algarismos fixos seguidos da vogal "a" trocando apenas as outras duas vogais. Listaram, também, as possíveis composições distintas com dois algarismos. Assim, chegaram ao total de possibilidades em cada um dos casos e multiplicaram pela quantidade de vogais. - 1 grupo resolveu das duas formas citadas acima.	- 3 grupos resolveram por meio do princípio multiplicativo. - 1 grupo não terminou.	- 1 grupo resolveu por meio do princípio multiplicativo. - 4 grupos listaram as possíveis senhas que começavam com dois algarismos fixos seguidos da vogal "a" trocando apenas as outras duas vogais. Listaram, também, as possíveis composições distintas com dois algarismos. Assim, chegaram ao total de possibilidades em cada um dos casos e multiplicaram pela quantidade de vogais.
VI) De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode ir de A até C,	- 2 grupos resolveram por meio do princípio multiplicativo.	- 3 grupos resolveram por meio do princípio multiplicativo.	- 1 grupo resolveu por meio do princípio multiplicativo.	- 3 grupos resolveram por meio do princípio multiplicativo.

passando por B? (figura 1) Fonte: Zanon (2019, p. 192).	- 3 grupos enumeraram os caminhos e contaram as possibilidades. - 1 grupo resolveu das duas formas citadas acima.	- 1 grupo enumerou os caminhos e contou as possibilidades. - 2 grupos resolveram das duas formas citadas acima.	- 1 grupo enumerou os caminhos e contou as possibilidades, e na resolução feita no quadro, desenharam os possíveis trajetos. - 1 grupo contou os possíveis trajetos com o caminho de cima e os possíveis para o caminho de baixo e somou as possibilidades.	- 1 grupo registrou somente a resposta, “6 possibilidades”. (cálculo mental) - 1 grupo desenhou os trajetos e contou as possibilidades.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2019.

No quadro acima, observa-se que dos vinte e dois grupos que participaram da quinta atividade: oito resolveram pelo princípio multiplicativo; onze listaram algumas composições de senhas, visualizaram um padrão e multiplicaram as possibilidades; um grupo começou a listar a composição de senhas, não concluiu a tarefa, mas apresentou a resposta correta; e, o último começou a listar as possibilidades de senha, no entanto, não concluiu a tarefa. No dia da atividade VI faltaram todos os componentes de um dos grupos da 2ª série 02 e 03. Sendo assim, dos vinte grupos que resolveram essa atividade, nove solucionaram pelo princípio multiplicativo; quatro enumeraram os caminhos e contaram as possibilidades; três resolveram pelo princípio multiplicativo e enumeraram os caminhos; um enumerou os caminhos e desenhou os trajetos; um grupo fez pelo princípio aditivo; um desenhou os trajetos e contou; e, um registrou somente a resposta 6 (seis).

Centralizando nossa análise no sexto problema, em função do volume de dados, vemos que os tipos de resoluções apresentadas pelos alunos do ensino médio se assemelham àquelas previstas por Zanon (2019) em sua pesquisa desenvolvida com estudantes de licenciatura em matemática, com o objetivo de “identificar estratégias, conhecimentos combinatórios e imagens conceituais evocadas durante este tipo de tarefa” (ZANON, 2019, p.198). No texto, a autora antecipa e lista nove possíveis soluções para o problema dos trajetos (ver quadro 2, item VI), das quais, seis apareceram em nossa pesquisa, são elas:

> *Estratégia 1)* Analisar a ilustração do problema, contar mentalmente as possibilidades e verbalizar ou escrever o número seis como resposta. Envolve visualização e cálculo mental.
> *Estratégia 2)* Analisar a ilustração do problema, enumerar os caminhos nele mesmo e depois contá-los um a um.
> *Estratégia 3)* Pensando pelo princípio aditivo da contagem e usando a mesma lógica de enumerar os caminhos, o estudante poderia considerar que seriam três o número de possibilidades do primeiro conjunto iniciado em 1, trajeto superior da ilustração. Ademais, seriam três o número de possibilidades do segundo conjunto iniciado em 2, trajeto inferior [...] considerando os caminhos (A - B e B - C) como conjuntos disjuntos, a interseção deles é vazia. Neste caso, a união do número de

> elementos dos conjuntos é dada por n (A U B) = n (A) + n (B), em que n (A U B) representa a união do número de elementos (trajetos) que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B; n (A) indica o número de elementos (trajetos) do conjunto A. Desse modo, o conjunto A seria composto pelos trajetos 1,3; 1,4; 1,5. Ou seja, A = {1,3; 1,4; 1,5}. E, n (B) designa o número de elementos (trajetos) do conjunto B, a saber, 2,3; 2,4; 2,5. Então, B = {2;3; 2,4; 2,5}. Assim, pelo princípio aditivo, teríamos: n (A) + n (B) = 3 + 3 = 6 possibilidades. [...]
> *Estratégia 4*) Ainda pelo princípio aditivo da contagem, usando a mesma lógica de enumerar os caminhos, o licenciando poderia apenas observar a imagem e considerar que seriam duas possibilidades de deslocamento de A até B e três possibilidades de B até C. Nessa lógica, efetuaria uma operação de adição considerando que a primeira parcela seria 2 e a segunda 3. Assim, teria: 2 + 3 = 5. Embora seja uma estratégia equivocada de resolução, ela poderia ser obtida da visualização imediata dos trajetos ilustrados no desenho que acompanha o enunciado escrito. Aqui o estudante olhou para os dados e emitiu uma resposta. Parece-nos que quem desenvolve cálculos semelhantes a este, apenas adiciona os trajetos sem pensar nos caminhos que tem para seguir. Também fica sem entender o enunciado e sem compreender o desenho que ilustra os trajetos entre as cidades.
> *Estratégia 5)* Analisar a ilustração e desenhar os caminhos. Durante o processo de desenhar, o estudante poderia ir enumerando os caminhos e, ao final, obter seis como resposta [...]
> *Estratégia 6)* Analisar a ilustração, identificar o número de possibilidades do primeiro deslocamento (duas possibilidades) e multiplicar pelo número de possibilidades do segundo (três possibilidades). Aqui usaria a multiplicação associada à ideia de combinatória (BRASIL, 1997), pois, para cada possibilidade de A, teríamos três em B, ou seja, 2 x 3. Então, organizando os trajetos para que todas as possibilidades fossem obtidas, o estudante também encontraria seis.
> *Estratégia 7)* Nomear os caminhos com símbolos (letras, números, desenhos, entre outros) resguardando as cidades A, B e C. Por exemplo, se nomearmos os trajetos usando outras letras do alfabeto, tais como E, F, G, H, I [...]
> *Estratégia 8)* Utilizar o diagrama da árvore. Nomear os caminhos, fixar a saída na cidade A, considerar como pontos determinados as cidades B e C e alternar os caminhos intermediários (E, F, G, H, I) até esgotar todas as possibilidades. Na sequência, o aluno deve contá-los e informar quantos são.
> *Estratégia 9):* Aplicar a fórmula de arranjo simples (ZANON, 2019, p. 192-195).

A seguir, discute-se o desenvolvimento da atividade e comentam-se as estratégias elencadas por Zanon (2019) apresentando uma solução dos estudantes[6] do ensino médio para exemplificar o tipo de resolução. Os estudantes receberam a imagem do problema VI (ver figura 1) e após a análise delas surgiram algumas indagações tais como "o que é para resolver aqui?". Então foi perguntado:

> *Pesquisadora: Isto é um problema?*
> *Alunos: Não!*
> *Pesquisadora: Por quê?*
> *Aluno 1: Não tá pedindo pra fazer nada!*
> *Aluno 2: Porque parece uma informação, isso não tem nada a ver com a família do Beto.*
> *Aluno 3: Se tivesse uma pergunta seria um problema!*
> *Pesquisadora: Então, o aluno 3 disse que está faltando uma pergunta, certo?*
> *Alunos: Sim!*
> *Pesquisadora: E qual pergunta se encaixaria?*
> *Aluno 4: Qual o caminho mais rápido?*
> *Pesquisadora: Será que pelo desenho a gente consegue ver qual é o caminho mais rápido?*

[6] Nos diálogos os estudantes são identificados por números na ordem em que suas falas aparecem nos diálogos.

Aluno 5 : Acho que não!
Pesquisadora: Alguma outra sugestão?
Aluno 6: Quantos caminhos possíveis do A para o B e do B para o C?
Pesquisadora: Então podemos colocar algo do tipo "De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode ir de A até C, passando por B?"
Alunos: Sim!

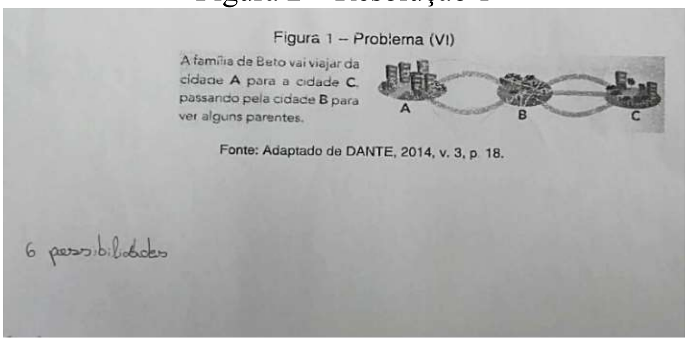
Os grupos iniciaram o processo de resolução. As estratégias que mais apareceram foram as de enumeração dos caminhos (estratégia 2) e de princípio multiplicativo (estratégia 6). Para exemplificá-las, selecionamos as resoluções que julgamos melhor representá-las. As estratégias 1, 3, 5 e 7 apareceram com menos frequência, conforme se mostra a seguir.

O primeiro grupo selecionado iniciou o seguinte diálogo:

Aluno 7: Acho que uma só, agora se você perguntar como, eu consigo falar: de carro, a pé (...)
Pesquisadora: Analise a figura, em relação aos cainhos, o que você pode concluir?
Aluno 8: Vai que a pessoa vai da cidade C e não quer passar pela B?
Pesquisadora: Isso seria possível? Qual caminho ela teria que pegar?
Aluno 7: Ah!...
Pesquisadora: Analise a figura.

Posteriormente, apresentaram esta resolução que ilustra a estratégia 1 mencionada por Zanon (2019).

Figura 2 – Resolução 1



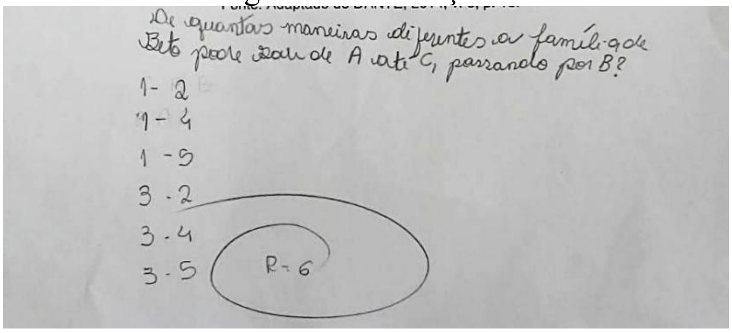
Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

Ao analisar as opções de caminhos o grupo contou mentalmente as possibilidades de trajetos e registrou a resposta. Segundo Zanon (2019), essa estratégia envolve cálculo mental e visualização. O próximo grupo resolveu semelhante à estratégia 2. Durante o processo de resolução, iniciou um diálogo com a pesquisadora:

Pesquisadora: De quantas maneiras ele pode sair daqui para chegar aqui? (apontando para o desenho) Quais caminhos que ele pode pegar?
Aluno 9: O de cima com o de cima, o de cima com o do meio, o de cima com o de baixo. E depois com os de baixo. Na verdade seis!
Aluno 10: É para colocar com letrinha?
Aluno 11: Como assim?
Pesquisadora: Aluno 9, fala o que você havia dito.
Aluno 9: Olha, a gente pode colocar os números, fica mais fácil!

A figura 3 representa a resolução discutida acima e apresentada pelo grupo.

Figura 3 – Resolução 2



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

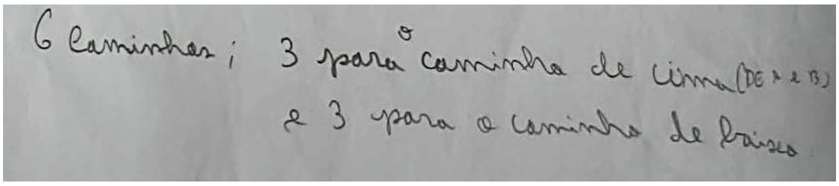
Os estudantes perceberam a quantidade de caminhos disponíveis, e que, dentre eles, só poderiam escolher um de cada vez. Pareceram compreender que havia uma sequência a ser seguida, de A para B e de B para C. Nesse momento, mesmo que intuitivamente, eles mostraram reconhecer que os caminhos são de natureza distinta. E que, além disso, existia uma posição estabelecida para cada caminho. Assim, podemos confirmar o reconhecimento do modelo combinatório implícito (ZANON, 2019), bem como os atributos (HERSHKOWITZ, 1994) referentes ao agrupamento de arranjo simples.

Durante o processo de resolução, pesquisadora e componentes de outro grupo assim dialogaram:

> *Pesquisadora: De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode sair de A para C, passando por B?*
> *Aluno 12: São três.*
> *Pesquisadora: Será? Olhem a figura.*
> *Aluno 12: Ah não, são seis.*
> *Pesquisadora: Como você pensou?*
> *Aluno 12: São dois de A até B, o de cima e o de baixo. Depois têm três.*
> *Aluno 13: têm seis possibilidades, percursos.*
> *Pesquisadora: Como vocês chegaram a essa conclusão?*
> *Aluno 13: três possibilidades para o caminho de cima e três possibilidades para o caminho de baixo.*

Na sequência, apresentaram a seguinte resposta:

Figura 4 – Resolução 3



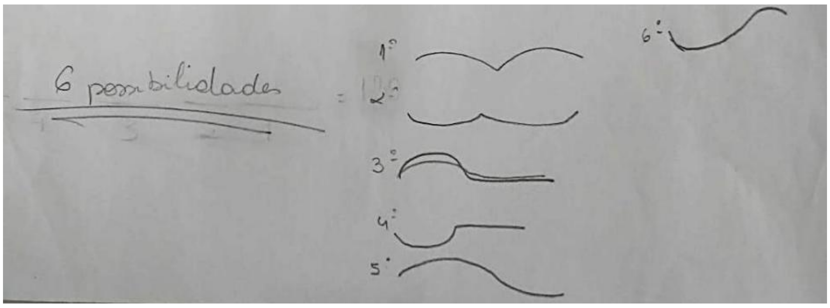
Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

Embora a resolução seja aparentemente simples, ela se assemelha a estratégia 3 (ZANON, 2019) quando o grupo classifica os trajetos de A para C, passando por B, como “caminho de cima” e “caminho de baixo”. Assim, parecem associar a ideia de união entre os caminhos A-B e B-C que, matematicamente, seriam conjuntos disjuntos nos quais a interseção é vazia (ZANON, 2019). O próximo grupo trouxe a seguinte argumentação:

Aluno 14: São 10 possibilidades?
Aluno 15 (externo ao grupo): São 6!
Aluno16 (do grupo): Como 6 possibilidades?
Aluno 17: De C pode ir para A...
Aluno18: Não pode de C para A!
Pesquisadora: Então, vejam o que o problema diz?
Aluno 16: Então, sair de A, dá ABC, depois o A não pode mais.
Pesquisadora: Atente-se aos caminhos. [...]
Aluno 14: Ah, dá para fazer esse caminho com esse, esse com esse [...]

Após o diálogo, os alunos identificaram os trajetos e desenharam aqueles que seriam possíveis, a partir da sequência, ordem, a ser respeitada, uma das características de um arranjo simples. Apresentaram então a solução para o problema (Figura 5) que ilustra a estratégia 5, antecipada por Zanon (2019).

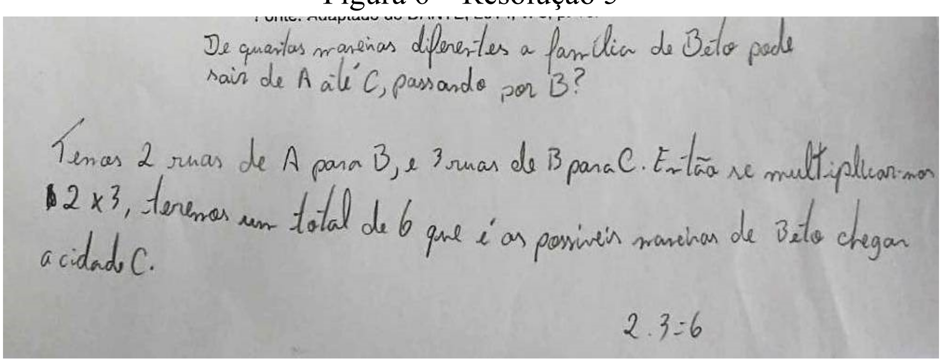
Figura 5 – Resolução 4



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

O grupo seguinte não solicitou a presença da professora e nem da pesquisadora para dialogar acerca do problema. Resolveram segundo a Estratégia 6 (ZANON, 2019) e detalharam o pensamento da seguinte maneira:

Figura 6 – Resolução 5



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

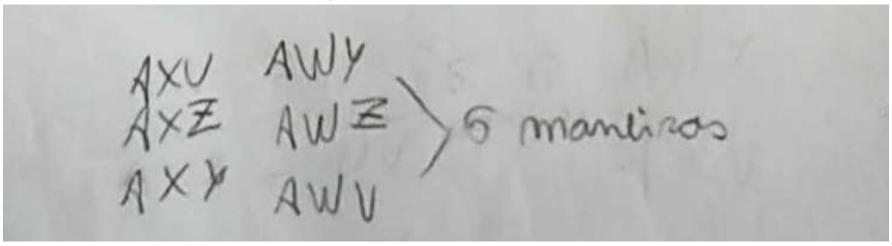
Notou-se que o grupo reconheceu que havia uma sequência a ser considerada e que o total se daria pela multiplicação entre o número de possibilidades para o primeiro e segundo percursos. Desse modo, identificar que eram eventos independentes, conforme Zanon (2019) prevê na estratégia acima mencionada.

O último grupo apresentou resolução semelhante à estratégia 7 (ZANON, 2019). Embora não tenha listado exatamente com as mesmas letras, o raciocínio foi parecido. Assim como Zanon (2019) o grupo considerou que A seria a cidade de partida. No entanto, indicaram por V, W, X, Y e Z os caminhos intermediários. A seguir, apresentamos o diálogo entre o grupo e a pesquisadora.

> *Pesquisadora: Como vocês fizeram?*
> *Aluno 2: Oh, eu fiz assim: de A para X para V, de A para X para Z, de A para X para Y, A para W para Y, A para W para Z e A para W para V, tá certo?*
> *Pesquisadora: Guarde sua resposta que nós vamos conversar sobre ela.*

Em seguida, apontaram sua resolução:

Figura 7 – Resolução 6



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

As estratégias 4, 8 e 9 mencionadas por Zanon (2019) não apareceram na resolução dos estudantes. A quarta estratégia previa uma possível resolução equivocada, essa não apareceu, tendo em vista que todos os grupos de estudantes, mesmo que a partir de resoluções diferentes, chegaram à resposta esperada. A oitava estratégia, que se refere à utilização do diagrama da árvore também não emergiu nas soluções dos estudantes. Talvez isso tenha acontecido pelo fato de não ser comum o trabalho com ela em sala de aula. Não se verificou também a nona estratégia, que versa sobre a aplicação da fórmula de arranjo simples, uma vez que os alunos ainda não haviam estudado os agrupamentos simples de combinatória, sendo a atividade desenvolvida nessa pesquisa uma introdução para o conteúdo. Por tudo isso, acredita-se ter alcançado o segundo o objetivo específico proposto para esta pesquisa, pois se partiu de um problema gerador (ONUCHIC, ALLEVATO, 2014; 2011) para que a formalização de arranjo simples seguisse da intuição para a generalização de um procedimento de cálculo. Este processo que será comentado a seguir.

4.3 Os processos de resolução e a passagem da intuição para a formalização

Após o registro das resoluções no quadro realizou-se a plenária, momento no qual se discutiu sobre as diferentes resoluções apresentadas. Os estudantes defenderam suas ideias e esclareceram suas dúvidas chegando ao consenso de que existiam 6 (seis) possibilidades de trajetos saindo da cidade A, passando por B para chegar em C. Sendo assim, relata-se como a formalização do conteúdo foi conduzida (ONUCHIC, ALLEVATO, 2014; 2011).

Antes de iniciar a formalização de arranjo simples, foi solicitado aos alunos que agrupassem os problemas que eles consideravam semelhantes entre si (elementos do enunciado, forma de resolução dentre outros). Cada grupo listou as semelhanças e a pesquisadora sistematizou a partir do que os estudantes apontaram a caracterização dos agrupamentos simples de permutação, arranjo e combinação. Nesse momento, verificou-se que os alunos identificaram o modelo combinatório e os atributos (ZANON, 2019; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996) de cada problema trabalhado.

Como os alunos não haviam estudado o conteúdo de análise combinatória iniciou-se a aula de formalização apresentando a definição de fatorial de um número. A partir dos diálogos estabelecidos entre os presentes, a pesquisadora se apropriou das ideias de Morgado et al. (2016; 1991) para destacar que o fatorial de um número é definido como o produto de um número natural, não nulo, *n* por todos os seus antecessores, até o número 1, e é indicado por "!". Apresentou-se as convenções (0! = 1; 1! = 1) e indagou-se os alunos sobre como poderiam resolver 3!. A partir da definição dada, responderam que bastava multiplicar o número 3 por seus antecessores obtendo "3 x 2 x 1= 6". Propôs-se então o cálculo de 2! e 4!. Destacaram que seria 2 e 24, respectivamente. Então, falou-se que nem sempre haveria necessidade de resolver o fatorial até chegar em 1. Informou-se que, quando fosse conveniente, poderia ser finalizado com o símbolo do fatorial. Então, exemplificou-se que 4! poderia ser escrito como 4 x 3!. Também se chamou a atenção dos estudantes para o fato de que, como o fatorial de um número é a multiplicação por seus antecessores poderia ser escrito como 3 x (3-1) x (3-2)!. Com base nisso, perguntou-se aos alunos como seria possível representar o fatorial de um número *n.* A resposta obtida foi que n!= n x (n-1) x (n-2) x ... x 1. Desse modo, concluíram também que poderia ser escrito como n!= n x (n-1)!.

O próximo ponto abordado foi o princípio fundamental da contagem. A partir de Morgado et al. (2016; 1991) ele foi definido como um evento composto por *n* etapas sucessivas e independentes de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y e que as possibilidades de um evento ocorrer obtêm-se a partir do produto entre x e y. Nesse momento, voltou-se ao problema dos trajetos e a pesquisadora indagou:

Pesquisadora: Qual era a condição estabelecida pelo problema?
Aluno: Sair de A, passando em B para chegar em C.
Pesquisadora: São caminhos iguais? Possuem a mesma origem?
Alunos: Não! São caminhos diferentes, saindo da cidade A um vai por cima e o outro por baixo.
Pesquisadora: Eu posso sair de C para A? Por quê?
Alunos: Não! Porque o problema disse que tem que sair de A.
Pesquisadora: Podemos dizer que esse problema se constitui de etapas sucessivas e independentes. Olhem só! Se eu escolher um caminho saindo de A, essa decisão vai interferir na escolha do caminho saindo de B?
Alunos: Não!
Pesquisadora: Então podemos dizer que são etapas sucessivas e independentes. Então, quantos caminhos saem da cidade A? E da cidade B?
Alunos: dois caminhos e três caminhos.
Pesquisadora: Com base na definição de princípio fundamental da contagem podemos concluir que a primeira etapa constitui-se de duas opções de escolha e a segunda constitui-se de três possibilidades. Então qual será o total de evento possível? Evento seria o conjunto dessas etapas.
Aluno: 2 x *3*
Pesquisadora: Sim! Devemos multiplicar as possibilidades da primeira etapa pelas possibilidades da segunda etapa. Então, 2 x *3= 6 possibilidades.*

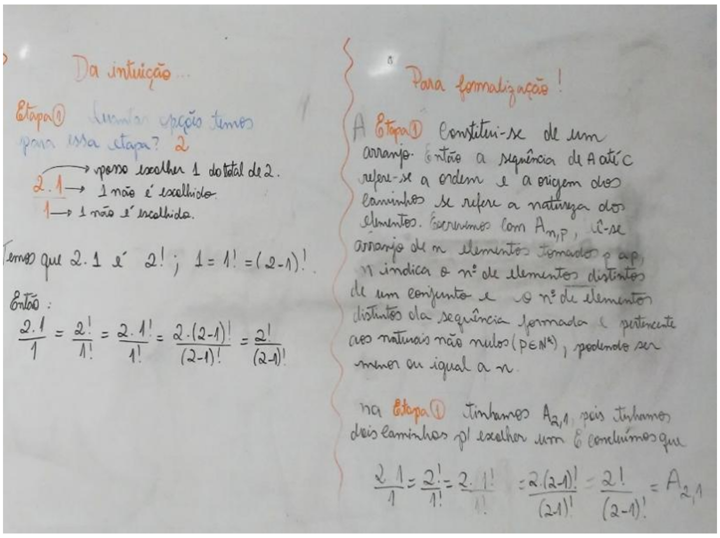
A partir do diálogo, chamou-se a atenção dos alunos para as principais características de um arranjo simples que se refere à ordem e a natureza dos elementos, a existência de uma sequência a ser obedecida e que os caminhos possuíam natureza diferente. Alguns grupos resolveram, intuitivamente, pelo princípio fundamental da contagem sem saberem que se tratava de etapas sucessivas e independentes. Em seguida iniciou-se um diálogo a fim de se chegar à generalização da fórmula de arranjo simples.

Pesquisadora: Vocês se lembram de quando separaram os problemas e classificaram quanto às semelhanças?
Alunos: Sim!
Pesquisadora: Então nós enquadramos os problemas em três classes, arranjo, permutação e combinação. Quais foram às características que vocês listaram para o problema VI?
Aluno: Tinha uma ordem a seguir e elementos diferentes.
Pesquisadora: Certo! Então o problema impõe que devia sair de A, uma ordem estabelecida, e a origem dos caminhos são distintas. Por isso temos arranjo simples. Então, em cada etapa será possível identificar um arranjo, por que em cada etapa os caminhos são diferentes. Todos os caminhos são tomados juntos?
Alunos: Não! São tomados um de cada vez.
Pesquisadora: Essa é outra característica de arranjo simples. Então, em relação à primeira etapa, quantas opções a gente tinha?
Alunos: duas opções.
Pesquisadora: Se escolhermos uma opção, quantas não serão escolhidas?
Aluno: uma.
Pesquisadora: Na análise combinatória, mais especificamente, no princípio multiplicativo lidamos com multiplicação [...] quando queremos retirar uma quantidade que está multiplicando basta dividirmos, pois a divisão é o inverso da

> *multiplicação. Então, se eu não escolhi 1 caminho, devo retirar o que não foi escolhido, ou seja, dividir pela quantidade que não escolhi, no caso 1.Notem que 2* x *1 = 2, levando para linguagem de fatorial seria 2! [...]*

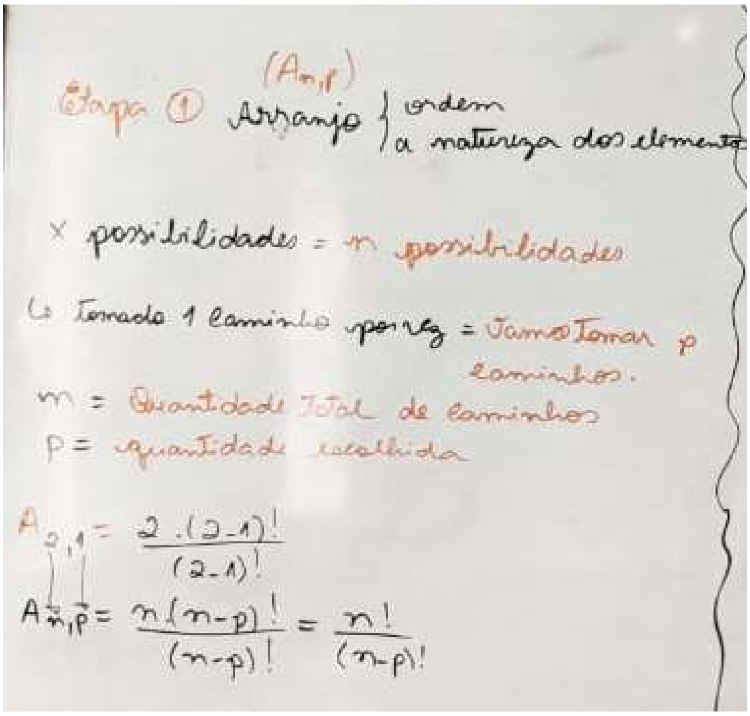
Assim, a pesquisadora continuou a desenvolver o raciocínio de fatorial a partir da resolução que os alunos propuseram pelo princípio fundamental da contagem. As figuras 8 e 9 ilustram as demonstrações.

Figura 8 - Formalização



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

Figura 9 - Formalização



Fonte: Arquivo das pesquisadoras, 2019.

Após chegar à fórmula de arranjo, expandiu-se para as de permutação e combinação a partir do entendimento daquela de arranjo. Desse modo, concluiu-se o último passo descrito por Onuchic e Allevato (2014; 2011). Nesse passo notou-se que os alunos ficaram bem atentos. Durante todo o processo de resolução dos problemas eles questionaram se haveria uma maneira mais rápida para chegar às soluções e no último passo da pesquisa eles presenciaram a existência de fórmulas para cada um dos agrupamentos e que elas, isoladamente, talvez não fossem interpretadas e compreendidas. Contudo, partindo da resolução que fizeram por intuição ficou mais claro identificar os elementos que compunham a fórmula de arranjo simples.

4.4 Impactos e resultados da prática desenvolvida

Em diálogos posteriores às aulas, indagou-se aos estudantes acerca da forma como percebiam que a atividade desenvolvida havia contribuído para a aprendizagem deles sobre os conteúdos de arranjo, permutação e combinação. Na ocasião, eles disseram que:

> *Eu consegui fazer a ligação entre as questões e as fórmulas, entender o porquê [...] (Aluno 14, em 03/10/19)*
>
> *Bom eu acho que a atividade foi importante porque a partir de exemplos mais simples a gente conseguiu chegar numa fórmula, e às vezes a gente só enxerga as fórmulas e não entende como elas são feitas, e como chegar nessas fórmulas. E a partir do momento em que eu entendo uma fórmula eu fico feliz, pelo menos eu fico feliz! (Aluno 15, em 03/10/2019)*
>
> *Eu gostei porque a gente não precisa ficar usando as fórmulas toda hora, porque dá pra fazer de outras formas e é mais rápido e mais simples. (Aluno 19, em 03/10/2019)*
>
> *A forma com que o conteúdo foi passado, os problemas primeiro, ajudou a clarear na hora da explicação e a gente conseguiu pegar melhor. (Aluno 18, em 03/10/2019)*
>
> *Nós aprendemos a resolver de outras formas, além das fórmulas. (Aluno 11, em 03/10/2019)*
>
> *Gostei muito da atividade, porque foi uma coisa diferente, eu nunca tinha visto, foi muito legal, foi mais fácil e eu aprendi a matéria e achei que foi muito bacana, uma aula diferente, muito interessante. (Aluno 21, em 03/10/2019)*
>
> *Sem as fórmulas estava bem melhor. Foi um modo de a gente aprender a fazer sem a fórmula. (Aluno 22, em 03/10/2019)*
>
> *Acho que antes de começar a ver a teoria já deu uma base, para começar. (Aluno 23, em 03/10/2019)*
>
> *O trabalho em grupo foi muito bom, pois quem sabia ajudava o que não sabia. (Aluno 24, em 03/10/2019)*
>
> *Quebrou um pouquinho o receio, porque tipo, antes a gente recebia as fórmulas e tinha que aprender a aplicar, agora a gente aprendeu a aplicar antes de receber as fórmulas, então, quando a gente olha para fórmula normalmente a gente se assusta, só que dessa vez não, a gente sabia o que fazer com a fórmula, sabia o que ia acontecer. (Aluno 25, em 03/10/2019)*
>
> *A metodologia foi muito diferente, ajudou a gente bastante a aprender de outras formas, entendeu, porque a gente tá sempre acostumado a ver um problema no quadro e depois tentar resolver, só que dessa vez tentando antes de ver as fórmulas desenvolveu muito mais a nossa capacidade de raciocinar esses exercícios. (Aluno 26, em 03/10/2019)*

> *Como a aplicação ela foi diferente do comum, ela dá uma oportunidade para os alunos que não entendiam do método antigo terem uma nova oportunidade de entender a matéria, funcionou para um monte de gente. (Aluno 27, em 03/10/2019)*
> *Eu também gostei muito porque, já que você não deu a fórmula no começo, a gente teve muito que usar a lógica, antes de pegar realmente a fórmula e entender o que estava acontecendo a gente já teve que exercitar um pouquinho disso para identificar o diferencial dessa matéria. (Aluno 28, em 03/10/2019)*
> *Me ajudou bastante na percepção de como interpretar os problemas, porque eu vi de uma maneira bem mais clara, mais fácil de entender. (Aluno 29, em 03/10/2019)*
> *Eu achei que como você passou a atividade antes de explicar a matéria mesmo, ficou mais fácil, porque a gente entendeu melhor, ah eu não sei explicar, mas eu achei que foi mais fácil da gente ir tentando fazer como quem não sabia e depois que colocou a fórmula. Eu acho que ajudou. (Aluno 30, em 03/10/2019)*

Pode-se identificar algumas das contribuições dessa metodologia para a aprendizagem a partir da fala dos estudantes, como, por exemplo, “eu também gostei muito porque, já que você não deu a fórmula no começo, a gente teve muito que usar a lógica, antes de pegar realmente a fórmula”, e, “a metodologia foi muito diferente [...] sempre acostumado a ver um problema no quadro e depois tentar resolver, só que dessa vez tentando antes de ver as fórmulas desenvolveu muito mais a nossa capacidade de raciocinar esses exercícios”, dentre outras, nas quais os alunos expressaram a sua satisfação por terem participado de uma atividade desenvolvida através da resolução de problemas.

Além dos relatos dos alunos, presenciou-se em uma aula posterior às atividades que a professora regente da turma trabalhou com o problema gerador para iniciar o conteúdo de sistemas lineares. Verificou-se, portanto, que, de certa forma, ela percebeu que a metodologia contribuiu para a aprendizagem de seus alunos e mostrou-se disposta a vivenciar tal experiência.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quanto à questão de pesquisa *Como a resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática pode contribuir para a aprendizagem de arranjo simples de alunos da 2ª série do ensino médio?* verificou-se que a resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática pode contribuir para a aprendizagem dos agrupamentos simples de combinatória de alunos da 2ª série do ensino médio. Observou-se de modo semelhante à Zanon (2019) que os estudantes diferenciaram os agrupamentos envolvidos em cada situação, realizaram atividades nas quais tiveram que pensar nas características de cada um dos agrupamentos, e organizaram estratégias de resolução (ZANON, 2019).

A partir dos resultados dessa pesquisa pôde-se verificar que a utilização de resolução de problemas enquanto metodologia para o ensino de matemática contribuiu para que os estudantes realizassem atividades nas quais tiveram que refletir sobre as características de cada um dos agrupamentos, diferenciando-os. Além disso, organizaram estratégias de resolução, sendo estimulados a pensar logicamente, e a exercerem o trabalho em grupo. Por isso, acredita-se que a metodologia tenha contribuído para a aprendizagem dos agrupamentos simples de combinatória de alunos da 2ª série do ensino médio. Além disso, impactou na prática da professora regente quando trabalhou com outros conteúdos de matemática posteriormente à pesquisa.

Foi gratificante perceber a potencialidade de tal metodologia, na medida em que foi possível visualizar as diferentes resoluções apresentadas pelos estudantes. Percebeu-se que tal metodologia contribuiu para estimular a capacidade lógica dos alunos, pois mesmo sem conhecer o conteúdo e as fórmulas eles conseguiram resolver os problemas propostos. Sendo assim, consideramos ter respondido a nossa questão problema. Espera-se que a resolução de problemas enquanto metodologia esteja cada vez mais presente nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 4 – 12.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3ª. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FLICK, U. **Introdução à metodologia de pesquisa:** um guia para iniciantes. Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Arthmed, 2009.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo, Editora Atlas S.A., 1988

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5:** combinatória, probabilidade. 6ª. ed. São Paulo: Atual, 1993

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, 1994.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo : Atlas, 2003.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**.10. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2016.

_________. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas**:teoria e prática. Local: Paco, 2014, p. 35-52.

_________.Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro, UNESP, v. 25, n. 41, p. 71 - 98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. de La R.; MORAIS, R. dos S. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas In: JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Local: Paco, 2014, p. 17-34.

POLYA, G. **How to solve it**: A new aspect of mathematical method. 2a. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1973. (A obra foi publicada originalmente em 1945.)

VAN DE WALLE, J. A**. Matemática no ensino fundamental**:formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009, p. 82 - 92.

ZANON, T. X. D.**Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**.2019. 333f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

APÊNDICE 1 – Problemas, modelo combinatório implícito e atributos

Quadro 2 – Problemas, modelo combinatório implícito e atributos

PROBLEMAS	MODELO COMBINATÓRIO	ATRIBUTOS
I) Pedro, Karolayne, Larissa e Alex apresentarão um trabalho. Eles posicionaram 4 cadeiras de frente para turma, pois, para a apresentação, desejam se organizar, de modo que cada um sente em uma. No final da apresentação, a professora fará uma fotografia desses alunos. Como eles podem acomodar-se nessas quatro cadeiras? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	Permutação simples; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Quantos lugares há? - Quantas pessoas sentarão nas cadeiras? - E quantas participarão da foto? - Como se dá a relação entre aluno e cadeira? - A foto muda se as pessoas sentarem em posições diferentes? Por quê? Obs: O aluno precisará realizar	- Ao perceber a quantidade de pessoas e lugares a ser ocupado, o aluno poderá identificar que existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto; - Poderá identificar que é um agrupamento ordenado ao perceber que a foto muda se a posição das pessoas dispostas nas cadeiras também mudar; - Agrupamento ordenado: Sendo $p \leq n$, a permutação é um caso particular de arranjo simples; Portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos;

	uma contagem das diferentes posições que podem ser ocupadas;	- Utiliza todos os elementos da amostra; - Pode ser calculada pela fórmula $P_n = n!$
II) Beatriz, ao organizar seu fichário, percebeu que ainda havia quatro divisórias livres. No entanto, faltava organizar as disciplinas de Biologia, História, Português e Matemática. Sabendo que as disciplinas, já organizadas, não podem ser alteradas, como Beatriz pode, então, dispor em seu fichário as que ainda faltam? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	Permutação simples; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Há quantas divisórias livres? - Quantas disciplinas faltam organizar? - E quantas divisórias serão utilizadas? - Como se dá a relação entre divisória e disciplina? - A organização do fichário muda se as disciplinas forem postas em posições diferentes? Por quê? Obs.: O aluno precisará realizar uma contagem das diferentes posições que podem ser ocupadas;	- Ao perceber a quantidade de disciplinas e divisórias a ser ocupadas, o aluno poderá identificar que existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto; - Poderá identificar que é um agrupamento ordenado ao perceber que a organização do fichário muda se a posição das disciplinas dispostas nas divisórias também mudar; - Agrupamento ordenado: Sendo $p \leq n$, a permutação é um caso particular de arranjo simples; Portanto, diferencia-se pela ordem dos elementos; - Utiliza todos os elementos da amostra; - Pode ser calculada pela fórmula $P_n= n!$
III) Uma escola do interior de Cachoeiro de Itapemirim desenvolveu um simulado envolvendo cinco questões de matemática do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES). Ao resolvê-lo, Victor notou que não daria tempo de concluir todas as questões. Assim, ele optou por fazer três delas. Como essa escolha pode ser feita? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	Combinação; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Quantas questões há? - Quantas questões serão escolhidas? - Como se dá a relação entre o total de questões e a quantidade a ser escolhida por Victor? - A ordem de escolha das questões fará diferença? Por quê? Obs: O aluno precisará realizar uma contagem das possíveis composições de escolha de três questões;	- Ao perceber a quantidade total de questões e as que serão escolhidas, o aluno poderá identificar que não existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto; - Poderá identificar que é um agrupamento não ordenado ao perceber que independente da ordem de escolha das questões, as escolhidas serão resolvidas. - Agrupamento não ordenado, a ordem dos elementos não altera o conjunto formado; - Geralmente é dada por $C_{n,\ p}$ ou C^p_n em que *n* indica a quantidade de elementos do conjunto e *p* representa um número natural menor ou igual a *n* que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados; - Pode ser calculada por $C^p_n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
IV) Na Escola Viva "Liceu Muniz Freire" há cinco professores de matemática, dois homens e três mulheres. Além desses, há também dois professores de biologia, sendo uma mulher e um homem. Alguns deles serão escolhidos para compor a comissão organizadora da Feira de Ciências. Nessas condições: a) Quais e quantas comissões podem ser formadas com duas mulheres?	Combinação; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Há quantos professores? - Quantos serão escolhidos para compor a comissão? - Como se dá a relação entre o total de professores e a quantidade que irá compor a comissão? - A ordem de escolha dos	- Ao perceber a quantidade total de professores e quantos serão escolhidos para compor a comissão, o aluno poderá identificar que não existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto; - Poderá identificar que é um agrupamento não ordenado ao perceber que independente da ordem de escolha dos professores, os escolhidos farão parte da

b) Quais e quantas comissões podem ser formadas por dois homens? c) Quais e quantas comissões podem ser formadas considerando que haja três mulheres e dois homens? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	professores fará diferença? Por quê? Obs.: O aluno precisará realizar uma contagem das possíveis comissões que podem ser formadas;	comissão. - Agrupamento não ordenado, a ordem dos elementos não altera o conjunto formado; - Geralmente é dada por $C_{n,\ p}$ ou $C^p{}_n$ em que *n* indica a quantidade de elementos do conjunto e *p* representa um número natural menor ou igual a *n* que sinaliza quais elementos vão compor os subconjuntos formados; - Pode ser calculada por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
V) A senha do celular da professora Emanuelle é composta por cinco dígitos. Os dois primeiros são algarismos e os demais são vogais. Os algarismos foram escolhidos a partir da data de nascimento de sua mãe que foi em 1956. Outra informação importante que Emanuelle nos passou é que as vogais não são repetidas. Quais são as possibilidades de senhas para acesso ao celular da professora Emanuelle? (Fonte: produzido pelas pesquisadoras)	Arranjo simples; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - A senha é composta por quantos dígitos? - Existe alguma exigência para compor a senha? - Os elementos que constituem a senha são de mesma natureza? - Como se dá a relação entre os elementos disponíveis e os que serão escolhidos para compor a senha? - A senha muda se os elementos escolhidos mudarem de posição? Por quê? Obs.: O aluno precisará realizar uma contagem das diferentes posições que podem ser ocupadas, para isso poderá observar que existe um padrão a ser seguido para cada senha distinta;	- Ao perceber a quantidade de elementos disponíveis para escolha e a posição de cada dígito que compõe a senha, o aluno poderá identificar que existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto segundo a sua natureza, no entanto, nem todos os elementos disponíveis serão utilizados ao mesmo tempo; - Poderá identificar que é um agrupamento ordenado ao perceber que senha muda se a posição dos elementos que a constituem também mudar; - A ordem e a natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas são relevantes; - É conhecido por $A_{n,\ p}$, em que *n* indica o número de elementos distintos do conjunto e *p* representa o número de elementos distintos das sequências/subconjunto formados, pertence aos naturais não nulos e pode ser menor que *n;* - Pode ser calculado por $A_{n,\ p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
VI) De quantas maneiras diferentes a família de Beto pode ir de A até C, passando por B? (figura 1) Fonte: Zanon (2019, p. 192).	Arranjo simples; - Questões que podem ser feitas para auxiliar o estudante na compreensão desse modelo e na identificação dos atributos: - Quantas opções de caminhos a família de Beto tem da cidade A para B? E da cidade B para C? São caminhos iguais? Possuem a mesma localização? - Os caminhos possuem a mesma natureza? A mesma origem? - A família de Beto pode ir direto de A até C? - Como se dá a relação entre os caminhos disponíveis para escolha e os que serão escolhidos para	- Ao perceber a quantidade de caminhos disponíveis para escolha e a existência de uma sequência na escolha desses, o aluno poderá identificar que existe uma posição determinada para cada objeto do conjunto segundo a sua natureza, no entanto, nem todos os elementos disponíveis serão utilizados ao mesmo tempo; - Poderá identificar que é um agrupamento ordenado ao perceber que o trajeto muda se a escolha de pelo menos um dos caminhos também mudar, isso devido à natureza dos elementos, pois são caminhos distintos, o que

	compor o trajeto? - O trajeto muda se a escolha do caminho mudar? Por quê? Obs.: O aluno precisará realizar uma contagem das diferentes formas de montar os trajetos.	modifica todo o trajeto; - A ordem e a natureza dos elementos que compõem as sequências desejadas são relevantes; - É conhecido por $A_{n,\ p,}$ em que *n* indica o número de elementos distintos do conjunto e *p* representa o número de elementos distintos das sequências/subconjunto formados, pertence aos naturais não nulos e pode ser menor que *n;* - Pode ser calculado por $A_{n,\ p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras, 2019.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - CAMPUS CACHOEIRO DE ITAPEMIRIM

Rodovia BR-482 (Cachoeiro-Alegre) – Fazenda Morro Grande – Caixa Postal 527, 29300-970 – Cachoeiro de Itapemirim – ES, 28 3526-9000

FOLHA DE APROVAÇÃO

LIDIANE RIBEIRO RODRIGUES GAIOTI

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: DA INTUIÇÃO À FORMALIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 16 de dezembro de 2019.

COMISSÃO EXAMINADORA

Professora Doutora Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon

Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim

Orientadora

Professor Doutor Jorge Henrique Gualandi

Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim

Professora Mestra Fernanda Soares da Silva Bonato

Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
SISTEMA INTEGRADO DE PATRIMÔNIO, ADMINISTRAÇÃO E CONTRATOS

FOLHA DE ASSINATURAS

Emitido em 16/12/2019

FOLHA DE APROVAÇÃO-TCC Nº 2/2019 - CAI-CCLM (11.02.18.01.08.02.03)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 28/08/2023 11:55)
JORGE HENRIQUE GUALANDI
PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO
CAI-CCLM (11.02.18.01.08.02.03)
Matrícula: 1811993

(Assinado digitalmente em 25/08/2023 16:16)
THIARLA XAVIER DAL CIN ZANON
PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO
CAI-CCLM (11.02.18.01.08.02.03)
Matrícula: 1986360

gov.br
Documento assinado digitalmente
FERNANDA SOARES DA SILVA BONATO
Data: 30/08/2023 14:03:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Visualize o documento original em https://sipac.ifes.edu.br/documentos/ informando seu número: **2**, ano: **2019**, tipo: **FOLHA DE APROVAÇÃO-TCC**, data de emissão: **25/08/2023** e o código de verificação: **8280a6d496**