

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
BACHARELADO EM FÍSICA

JOSIANNE CATARINA DE SOUSA RODRIGUES DOS SANTOS

**RADIAÇÃO GRAVITACIONAL E SUA
ANALOGIA COM A RADIAÇÃO
ELETROMAGNÉTICA**

Cariacica

2019

JOSIANNE CATARINA DE SOUSA RODRIGUES DOS SANTOS

**RADIAÇÃO GRAVITACIONAL E SUA
ANALOGIA COM A RADIAÇÃO
ELETROMAGNÉTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Bacharelado em Física do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Fernando José Lira Leal

Cariacica

2019

(Biblioteca do *Campus* Cariacica do Instituto Federal do Espírito Santo)

S237r Santos, Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos.

Radiação gravitacional e sua analogia com a radiação eletromagnética /
Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos Santos – 2018.

86 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Fernando José Lira Leal.

Monografia (graduação) – Instituto Federal do Espírito Santo, Curso de
Bacharelado em Física, 2018.

1. Relatividade geral (Física). 2. Ondas gravitacionais. 3. Ondas
eletromagnéticas. I. Leal, Fernando José Lira. II. Instituto Federal do Espírito
Santo – campus Cariacica. III. Título.

CDD 21: 530

(Bibliotecária: Luciana Dumer CRB6-ES nº 662)

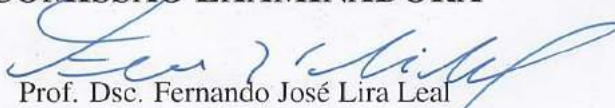
JOSIANNE CATARINA DE SOUSA RODRIGUES DOS SANTOS

**RADIAÇÃO GRAVITACIONAL E SUA
ANALOGIA COM A RADIAÇÃO
ELETROMAGNÉTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenadoria do Curso de Bacharelado Físicado
Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito
parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

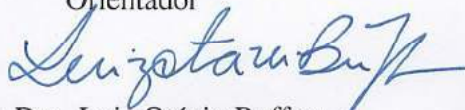
Aprovado em 24/04/2019 .

COMISSÃO EXAMINADORA


Prof. Dsc. Fernando José Lira Leal

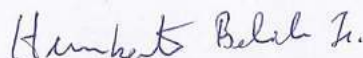
Instituto Federal do Espírito Santo

Orientador



Prof. Dsc. Luiz Otávio Buffon

Instituto Federal do Espírito Santo



Prof. Dsc. Humberto Belich Junior

Universidade Federal do Espírito Santo

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Declaro, para fins de pesquisa acadêmica, didática e tecnico-científica, que o presente Trabalho de Conclusão de Curso pode ser parcialmente utilizado desde que se faça referência à fonte e aos autores.

Cariacica, em 24 de Abril de 2019

Josianne Catarina de Sousa Rodrigues dos Santos

Fernando José Lira Leal

Acima de tudo agradeço a Deus por ter me mostrado um caminho maravilhoso, por ter me amparado nos momentos difíceis, acalmado meu coração para que eu nunca desistisse do meu sonho. Agradeço a minha família por todo apoio durante toda essa caminhada, em especial a minha mãe Joana, ao meu marido Daniel e a minha irmã Geisi por aguentarem todas as minhas reclamações e desesperos ao longo desses anos e ao meu pai Gésio, que apesar de tudo está sempre ao meu lado. Agradeço a minha princesa Mirian Christine, pois pela minha filha eu nunca desisti e nunca desistirei. E não poderia deixar de agradecer a maioria dos meus professores por todo apoio, toda paciência, toda ajuda e todo aprendizado ao longo desses anos, em especial, ao meu orientador Prof. Dsc. Fernando Leal e ao Prof. Dsc. Luiz Otávio Buffon. Também não poderia deixar de agradecer aos meus colegas de curso, em especial aos meus amigos Nathanael, Karoline e Isys que me deram muito apoio ao longo dessa jornada. E as minhas xuxus Bruna e Luiza que sempre vibraram comigo e me apoiam, minhas amigas de ontem, hoje e sempre. E ao Instituto Federal do Espírito Santo, campus Cariacica, e toda sua equipe, pela oportunidade de um ensino excepcional, pelo apoio e por todo auxílio durante todo o curso.

"A matéria determina como o espaço se curva e o espaço determina como a matéria se move."

(Wheeler, John A.)

RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi proposta por Albert Einstein em 1915. Esta teoria propõe uma generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas que incluam campos gravitacionais e se baseia em alguns postulados. Contudo, para a sua construção, é necessário todo o entendimento da álgebra tensorial e da construção de estudo do espaço curvo, não mais contido no espaço euclidiano, mas com espaços curvos gerais e que sejam válidos em qualquer referencial. A partir da construção da TRG e da equação de campo da Relatividade Geral de Einstein que se previu inicialmente a existência das ondas gravitacionais. Estas foram finalmente detectadas em 14 de setembro de 2015, nos EUA, tem características específicas, mas com algumas semelhanças com as ondas eletromagnéticas. Assim, o presente trabalho de conclusão de curso visa apresentar de forma didática e parcialmente minuciosa a construção desta teoria, motivado pela sua descoberta em 2015, finalizando com as formas bem peculiares de interação com a matéria e de polarização da radiação gravitacional, diferente da radiação eletromagnética.

Palavras-chave: relatividade geral, ondas gravitacionais, ondas eletromagnéticas.

ABSTRACT

In 1915, the general relativity theory (TRG) was proposed by Albert Einstein. This theory is a generalization of the relativity principle of motion for systems where include gravitational field and is based on a few postulates. However, to the construction of the TRG is required the study about the algebra tensor calculus and the study of curved space, but this space no more is contained in the Euclidean space, but the study the general curved space and this one must be valid in any referential. After the construction of TRG and the Einstein field equations of general relativity, Einstein predicted the existence of gravitational waves. The prediction was finally detected on September 14, 2015, in the USA. This waves has specific characteristics, but with some similarities with electromagnetic waves. Therefore, this work show didactically and partially meticulous the construction of this theory, and the motivation for this was the detected of the gravitational waves in 2015, and this work finishing with the interaction the waves with the matter and its polarization, being that this characteristic is different of the electromagnetic radiation.

Keywords: general relativity, gravitational waves, electromagnetic waves.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1–	Espaço Curvo	13
Figura 2–	Coordenadas Curvilíneas	14
Figura 3–	Vetores unitários e ortogonais aos vetores de base	15
Figura 4–	Funções do ponto P	23
Figura 5–	Representação de algumas trajetórias da partícula com coordenada generalizada $q(t)$	27
Figura 6–	Trajétória no espaço curvo bidimensional	34
Figura 7–	Transporte paralelo de um vetor	36
Figura 8–	Transporte paralelo no plano	44
Figura 9–	Transporte paralelo no espaço curvo	45
Figura 10–	Força gravitacional de Newton entre dois corpos massivos	52
Figura 11–	Separação infinitesimal entre duas partículas Espaço Curvo	77
Figura 12–	Desvio geodésico na superfície de diferentes curvaturas	79
Figura 13–	Efeito da onda gravitacional em um anel de partículas de teste	82
Figura 14–	Orientações relativas do detector e a direção de propagação da onda (Incoming wave)	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ÁLGEBRA TENSORIAL	13
2.1	ESPAÇO CURVO	13
2.2	ALGUMAS PROPRIEDADES DAS COMPONENTES DO TENSOR MÉTRICO g_{ij}	16
2.3	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	18
2.4	VETORES CONTRAVARIANTES E COVARIANTES	20
2.5	VETORES COMO OPERADORES	22
3	PRINCÍPIO VARIACIONAL	26
3.1	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	26
3.1.1	Partícula Livre	27
3.1.2	Partícula Livre no Espaço Curvo	30
3.1.3	Conexão entre a Dinâmica e a Geometria	33
4	CONEXÃO E DERIVADA COVARIANTE	36
4.1	DERIVADA COVARIANTE	37
4.1.1	Conexão Riemanniana ou Conexão de Christoffel	41
4.2	CURVATURA	44
4.2.1	Tensor de Riemann	46
5	INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL	50
5.1	PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE GERAL	50
5.2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	52

6	ONDAS GRAVITACIONAIS E SUA ANALOGIA COM ONDAS ELETRO-MAGNÉTICAS	60
6.1	LINEARIZAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL	60
6.2	ENERGIA E MOMENTO LINEAR DE UMA ONDA GRAVITACIONAL	73
6.3	INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL COM A MATÉRIA E A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS	75
6.3.1	Desvio Geodésico	77
7	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Escolher o tema e o título de um trabalho de conclusão de curso (TCC) não é fácil, ainda mais com o universo esplêndido que é a física. No final do ano de 2015, uma grande descoberta por um grupo de cientistas e colaboradores, por intermédio do Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (LIGO, em inglês) detectaram pela primeira vez uma das previsões de um grande cientista do século XX. Em 12 de fevereiro de 2016, após várias análises, foi publicado na revista *Physical Review Letters* esta grande e extraordinária notícia, que revolucionou a física do século XXI, 100 anos após a previsão teórica (ABBOTT et al., 2016). Este foi o estímulo necessário para a escolha de um tema para o TCC do curso de bacharelado em física que ainda nem havia começado, pois com a orientação e ideias de um ilustre professor, uma aluna do curso de Licenciatura em Física, no fim de sua primeira graduação, já tinha um objetivo para um futuro ainda incerto. Na mesma época, já havia iniciado o estudo do eletromagnetismo em suas reuniões de iniciação científica e esta grande descoberta das ondas gravitacionais motivou ainda mais a pesquisa e o aprendizado, estimulando ainda mais para a escolha de um título que, além de mostrar toda a construção teórica para o entendimento da radiação gravitacional, ainda proporciona condições de realizar uma analogia com a radiação eletromagnética, com todas as devidas orientações e referenciais teóricos. A grande previsão teórica das ondas gravitacionais foi realizada por Albert Einstein, um físico alemão com ideias extraordinárias, que revolucionaram e ampliaram a visão do universo. Em 1905 Einstein propôs a teoria da relatividade restrita, no qual as ideias descobertas foram generalizadas para sistemas que incluam campos gravitacionais. Assim, em 1915, uma nova teoria foi proposta: a teoria da relatividade geral (TRG). A partir desta teoria foi formulada a equação de campo de Einstein e, em 1916, foi prevista a existência de ondas gravitacionais, decorrentes da solução desta equação, onde Einstein mostrou que objetos massivos acelerados distorciam o espaço-tempo causando a irradiação de ondas na forma de radiação gravitacional. Essas oscilações viajam à velocidade da luz através do universo, levando informações sobre suas origens, bem como pistas valiosas sobre a natureza da própria gravidade (ABBOTT et al., 2016). Por muito tempo, esta teoria não havia sido comprovada, contudo com o evento conhecido como GW150914, em 14 de setembro de 2015, as ondas gravitacionais foram finalmente detectadas, por intermédio da La-

ser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), (ABBOTT et al., 2016), (BASSALO; CATTANI, 2016). Com a conclusão do curso de Licenciatura em Física e o início do curso de Bacharelado em Física pelo IFES, campus Cariacica, algumas dificuldades foram enfrentadas e as obrigações ficaram ainda maiores, pois além do árduo estudo e instruções do seu professor orientador, a estudante foi aprovada em 1º lugar como professora de Física da rede estadual de ensino do Espírito Santo e posteriormente foi uma das quatro aprovada no mestrado acadêmico da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), o que ocasionou o atraso em sua defesa, mas em nenhum momento ocorreu desvalorização e trabalho duro para o entendimento de seu projeto, pelo contrário, muitos foram os desafios e maior ainda a motivação para o término do referido texto, tanto houve apresentações do trabalho em eventos do IFES e em fevereiro de 2017 foi aberto um minicurso sobre ondas gravitacionais ministrado pelo Prof. Dsc. Fernando J. L. Leal, ao qual o trabalho se orienta, com o objetivo de despertar nos alunos da graduação o interesse para a iniciação científica nessa área, que é um dos objetivos a longo prazo deste trabalho. Além disso, este trabalho abriu novas ideias para uma dissertação de mestrado acadêmico na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

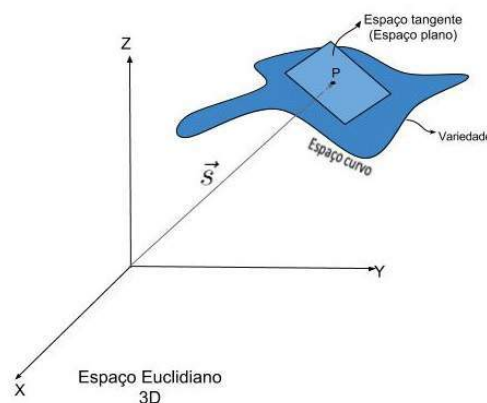
Sendo assim, neste trabalho pretendemos estudar a radiação gravitacional (perda de energia via ondas gravitacionais) e a interação das ondas gravitacionais com a matéria, verificando ainda a analogia existente entre as ondas gravitacionais, que são oscilações do espaço-tempo a velocidade da luz, com as ondas eletromagnéticas, que se propagam no espaço-tempo a velocidade da luz, além de ser uma revisão teórica para atuais e futuros estudantes de estudo da gravitação.

2 ÁLGEBRA TENSORIAL

2.1 ESPAÇO CURVO

Neste capítulo não temos a intenção de fazer um tratamento rigoroso da geometria diferencial. Tentaremos ser didáticos, mas sem abandonar alguns conceitos e cálculos importantes para a compreensão do nosso trabalho. Uma forma de estudar um espaço curvo é utilizando um espaço euclidiano de dimensão maior, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele. Desta forma, definimos um ponto P em uma variedade (generalização da ideia de superfície), por meio de um vetor \vec{s} , onde P está localizado no espaço tangente (espaço plano) da variedade em questão, conforme figura 1. Com isso, o espaço plano é apenas um espaço euclidiano em 3 dimensões (3D) onde podemos inserir objetos em 2 dimensões (2D), como, por exemplo, superfícies esféricas, cilíndricas, etc.

Figura 1 – Espaço Curvo

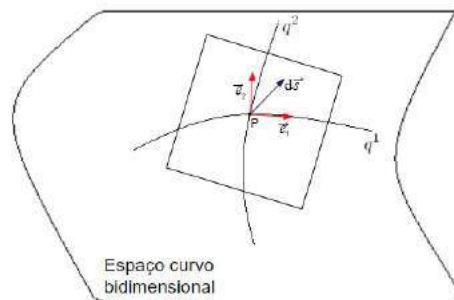


Fonte: Próprio autor.

A partir disso, podemos definir algumas coordenadas curvilíneas (q^1, q^2) passando pelo ponto P, no plano tangente ao espaço curvo bidimensional, conforme figura 2, de modo que:

$$\vec{s} = \vec{s}(q^1, q^2)$$

Figura 2 – Coordenadas Curvilíneas



Fonte: Próprio autor.

Assim, diferenciando \vec{s} obtemos:

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^2} dq^2$$

$$d\vec{s} = \vec{e}_1 dq^1 + \vec{e}_2 dq^2 \quad (2.1)$$

onde definimos:

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^1} \text{ e } \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^2}$$

Portanto, o elemento de linha ds^2 será dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{s} \cdot d\vec{s} = (\vec{e}_1 dq^1 + \vec{e}_2 dq^2) \cdot (\vec{e}_1 dq^1 + \vec{e}_2 dq^2) \\ &= (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) dq^1 dq^1 + (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) dq^2 dq^2 + (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) dq^1 dq^2 + (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) dq^2 dq^1 \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dq^i dq^j \end{aligned}$$

definimos então a métrica para um espaço curvo g_{ij} dada por:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2.2)$$

logo,

$$ds^2 == \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dq^i dq^j$$

Usaremos a convenção de Einstein, onde os índices repetidos implicam em soma, com isso:

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad (2.3)$$

Os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são chamados de vetores de base, então

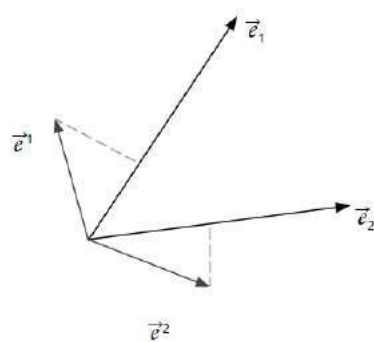
$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \text{base coordenada}$$

Sendo assim, qualquer vetor nesse plano tangente pode ser escrito como uma combinação linear dessa base:

$$\vec{V} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2$$

Contudo, \vec{e}_1 e \vec{e}_2 não são necessariamente ortogonais, nem unitários, mas podemos definir vetores, conforme figura 3, tais que:

Figura 3 – Vetores unitários e ortogonais aos vetores de base



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^1 = 1 & (\text{projecção sobre } \vec{e}_1) \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^2 = 1 & (\text{projecção sobre } \vec{e}_2) \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^1 = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j \quad (2.4)$$

onde δ_i^j é o símbolo da Delta de Kronecker, definida por:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

A base $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ é chamada de base dual. Dessa forma, o vetor \vec{V} pode ser escrito como:

$$\vec{V} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i \quad (2.6)$$

onde v^i é chamado de componente contravariante e v_i de componente covariante do vetor \vec{V} .

2.2 ALGUMAS PROPRIEDADES DAS COMPONENTES DO TENSOR MÉTRICO g_{ij}

A métrica de uma espaço curvo ou o tensor métrico g_{ij} , no qual definimos em 2.2 é o que define nosso espaço, isto é, está ligado a geometria do espaço-tempo e "desempenha o papel de "potenciais" do campo de gravitação".(CATTANI, 2010)

Existem algumas propriedades importantes associadas a métrica que serão úteis nos nossos cálculos. Para isto, definidos os vetores $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ dual à base coordenada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Podemos multiplicar 2.6 por \vec{e}_j , resultando em:

$$v^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = v_i \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j$$

utilizando as equações 2.2 e 2.4, temos que:

$$v^i g_{ij} = v_i \delta_j^i \quad (2.7)$$

Contudo, sendo j um índice livre, podendo assumir valores $j = 1, 2, 3$, o índice i um somatório e utilizando 2.5, obtemos:

$$v_i \delta_1^i = v_1 \delta_1^1 + v_2 \delta_1^2 + v_3 \delta_1^3 = v_1$$

$$v_i \delta_2^i = v_1 \delta_2^1 + v_2 \delta_2^2 + v_3 \delta_2^3 = v_2$$

$$v_i \delta_3^i = v_1 \delta_3^1 + v_2 \delta_3^2 + v_3 \delta_3^3 = v_3$$

ou seja, note que $v_i \delta_j^i = v_j$, logo de 2.7 tem-se

$$v_j = v^i g_{ij} \quad (2.8)$$

Por outro lado, multiplicando 2.6 por \vec{e}^j , obtemos:

$$\begin{aligned} v^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}^j &= v_i \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \\ v^i \vec{\delta}_i^j &= v_i g^{ij} \\ v^j &= v_i g^{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Observe então que as equações 2.8 e 2.9 mostram que a métrica tem a propriedade de abaixar e levantar os índices da componente covariante ou contravariante do vetor \vec{V} , sendo esta uma importante propriedade de g_{ij} .

Um outro fator importante a ser analisado é a propriedade de simetria da métrica. Então, sejam os tensores A_{ij} e B_{ij} , respectivamente, simétrico e antissimétrico nos índices i e j , ou seja

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$B_{ij} = -B_{ji}$$

Temos que

$$A_{ij}B_{ij} = A_{ji}(-B_{ji})$$

$$A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji}$$

como i e j são índices livres, do lado direito da equação podemos fazer a seguinte substituição

$$i \rightarrow j$$

$$j \rightarrow i$$

logo

$$A_{ij}B_{ij} = -A_{ij}B_{ij}$$

$$A_{ij}B_{ij} + A_{ij}B_{ij} = 0$$

$$A_{ij}B_{ij} = 0 \text{ (identicamente nulo)}$$

então, analisando a equação 2.3, percebemos que a métrica g_{ij} deve ser simétrica, pois $dq^i dq^j$ é simétrico, caso contrário o elemento de linha ds^2 seria nulo. Logo

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{2.10}$$

Por fim, outro fator considerável é que as componentes tensoriais contravariantes e covariantes do tensor métrico obedecem a

$$g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k \tag{2.11}$$

Estas três propriedades da métrica serão bastante úteis durante nossos cálculos futuros.

2.3 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

As coordenadas curvilíneas q^i ($i = 1, 2, 3$), podem ser transformadas de uma coordenada para outra por meios de transformações, então seja a transformação de coordenadas

$$q^i \rightarrow \bar{q}^i \begin{cases} q^i(\bar{q}) \\ \bar{q}^i(q) \end{cases}$$

e ϵ_i e $\bar{\epsilon}_i$ bases coordenadas, similares aos vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , cuja transformação acontece da seguinte forma:

$$\epsilon_i \mapsto \bar{\epsilon}_i$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_i &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial \bar{q}^i} \\ \bar{\epsilon}_i &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \end{aligned}$$

mas

$$\epsilon_k = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^k}$$

então

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k \quad (2.12)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial q^i} \\ \epsilon_i &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial \bar{q}^k} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \\ \epsilon_i &= \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\epsilon}_k \end{aligned} \quad (2.13)$$

Logo, é possível mudar de uma coordenada "sem barra" para uma coordenada "barrada" por meio das transformações de coordenadas 2.12 e 2.13.

2.4 VETORES CONTRAVARIANTES E COVARIANTES

Por meio da equação 2.6, vimos que um vetor \vec{V} pode ser escrito pelas suas componentes contravariantes e covariantes. Do mesmo modo podemos escrever tal vetor associado as bases coordenadas que definimos, ou seja

$$\vec{V} = v^i \epsilon_i = \bar{v}^i \bar{\epsilon}_i \quad (2.14)$$

mas precisamos descobrir como esses vetores se transformam.

Sabemos da equação 2.12, que podemos escrever a equação 2.14 como

$$\vec{V} = v^i \epsilon_i = \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k$$

para $v^i \epsilon_i$, fazendo a substituição $i \rightarrow k$, temos

$$\vec{V} = v^k \epsilon_k - \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k = 0$$

de forma que

$$\begin{aligned} v^k \epsilon_k - \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \epsilon_k &= 0 \\ \left(v^k - \bar{v}^i \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \right) \epsilon_k &= 0 \end{aligned}$$

Como ϵ_k não pode ser nulo por ser arbitrário, concluímos que

$$v^k = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \bar{v}^i \quad (2.15)$$

Por outro lado, da equação 2.13, podemos escrever a equação 2.14 como

$$\vec{V} = v^i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\epsilon}_k = \bar{v}^i \bar{\epsilon}_i$$

para $\bar{v}^i \bar{\epsilon}_i$, fazendo a substituição $i \rightarrow k$, temos

$$\vec{V} = \bar{v}^k \bar{\epsilon}_k - v^i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\epsilon}_k = 0$$

de forma que

$$\begin{aligned}\bar{v}^k \bar{\epsilon}_k - v^i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\epsilon}_k &= 0 \\ \left(\bar{v}^k - v^i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \right) \bar{\epsilon}_k &= 0\end{aligned}$$

Portanto

$$\bar{v}^k = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} v^i \quad (2.16)$$

Assim, 2.15 e 2.16 são as leis de transformação de vetores cujos índices estão levantados e são chamados de **Vetores Contravariantes**¹.

Podemos, entretanto, reescrever o vetor \vec{V} , da equação 2.14, multiplicando ambos os lados por ϵ_j , de modo que

$$v_i \epsilon^i \cdot \epsilon_j = \bar{v}_i \bar{\epsilon}^i \cdot \epsilon_j$$

E usando a definição 2.4 e a equação 2.13, temos

$$\begin{aligned}v_i \delta_j^i &= \bar{v}_i \bar{\epsilon}^i \cdot \left(\frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\epsilon}_k \right) \\ v_j &= \bar{v}_i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} (\bar{\epsilon}^i \cdot \bar{\epsilon}_k) \\ v_j &= \bar{v}_i \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{\delta}_k^i \\ v_j &= \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{v}_k\end{aligned} \quad (2.17)$$

Da mesma forma, para o vetor "barrado", multiplicando ambos os lados da equação 2.14 por $\bar{\epsilon}_j$ temos

$$v_i \epsilon^i \cdot \bar{\epsilon}_j = \bar{v}_i \bar{\epsilon}^i \cdot \bar{\epsilon}_j$$

novamente usando a definição 2.4 e a equação 2.12, obtemos

¹Na verdade são componentes dos vetores contravariantes, pois do ponto de vista da geometria diferencial vetores não tem índices.

$$v_i \varepsilon^i \cdot \left(\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \varepsilon_k \right) = \bar{v}_i \bar{\delta}^i_j$$

$$\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} v_i (\varepsilon^i \cdot \varepsilon_k) = \bar{v}_j$$

$$\bar{v}_j = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} v_i \delta_k^j$$

$$\bar{v}_j = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} v_k \quad (2.18)$$

Sendo assim, as leis de transformações 2.17 e 2.18 temos vetores cujos índices estão abaixados e são chamados de **Vetores Covariantes**².

2.5 VETORES COMO OPERADORES

Vimos que é possível estudar um espaço curvo utilizando um espaço euclidiano de dimensão maior, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele. Considerando uma dimensão $D = 3$, podemos definir uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e uma base dual $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ que formam qualquer vetor desse espaço. Por outro lado, podemos definir uma outra base coordenada $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, no qual, da mesma forma, quaisquer vetores do plano tangente ao nosso espaço curvo podem ser escritos nesta base ou na base "com barra" $\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$, sendo que podemos transformar uma coordenada na outra conforme a equação 2.18, ou seja

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \varepsilon_k$$

Então, seja uma vetor \vec{V} , temos que

$$\vec{V} = V^i \varepsilon_i = \bar{V}^i \bar{\varepsilon}_i$$

onde

$$\bar{V}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} V^k$$

²Na verdade são componentes dos vetores covariantes.

Porém, não queremos mais trabalhar com nosso espaço curvo contido no espaço euclidiano, mas agora, com espaços curvos gerais³. Logo, podemos definir novos tipos de vetores, e_i e \bar{e}_i , de modo que

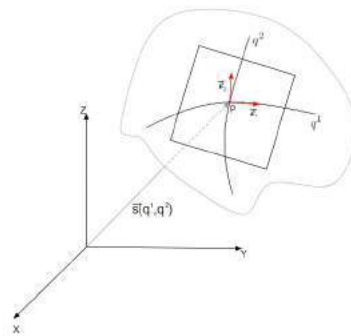
$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

e

$$\bar{e}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k}$$

onde tal operador pode atuar sobre funções definidas no ponto P, conforme figura 4 sobre uma variedade diferencial (espaço curvo geral).

Figura 4 – Funções do ponto P



Fonte: Próprio autor.

Tais vetores seguem a mesma lei de transformação dos vetores, isto é

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \bar{e}_k \quad (2.19)$$

e

$$\bar{e}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k} \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k} e_i \quad (2.20)$$

por isso são vetores, pois o que importa é a lei de transformação, que é a mesma vista nas equações 2.15 e 2.16, mas não dependem mais do vetor posição \vec{r} associado ao espaço euclidiano, com isso estamos trabalhando com espaço puramente curvos (variedade diferencial).

³Do ponto de vista da geometria diferencial estamos abrindo mão da imersão. Por exemplo, poderíamos construir a métrica em uma superfície esférica sem definir o conceito de raio. Basta usar a geometria diferencial para medir a curvatura da superfície que a descrição seria equivalente se tivéssemos definido o raio usando a imersão.

Vamos escolher esses vetores como a nossa base coordenada e vamos utilizar a seguinte notação

$$e_i = \frac{\partial}{\partial q^i} = \partial_i$$

De modo que um vetor nesta base será

$$V = V^i e_i = V^i \partial_i$$

Para recuperarmos a noção de vetor que conhecemos basta atuar o operador V sobre uma função coordenada, isto é,

$$V [q^i(\tau)] = V^k \partial_k (q^i) = V^k \delta_k^i = V^i$$

Da mesma forma quando trabalhamos com o espaço euclidiano, precisamos encontrar quais são os vetores duais aos vetores de base que definimos. Para isso partimos do princípio fundamental, que essas bases são ortonormais, ou seja

$$e^i e_k = \delta_k^i$$

e sabendo que os vetores de base que definimos se transformam conforme a equação 2.20, é possível perceber que um objeto que se transforma desta maneira é a diferencial

$$\partial \bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k} \partial q^k \quad (2.21)$$

Com isso, podemos escolher $\{\partial q^i\}$ como base dual à base $\{\partial_i\}$. Assim, o antigo produto escalar é substituído por uma operação de dualidade, pois os vetores pertencem a espaços diferentes

$$\begin{cases} \partial_i \Rightarrow & \text{espaço tangente} \\ \partial q^i \Rightarrow & \text{espaço cotangente} \end{cases}$$

Note que existem representações vetoriais que são naturalmente covariantes ou contravariantes. Um exemplo de uma representação naturalmente contravariante é o vetor deslocamento como a equação 2.21. Por outro lado, uma representação naturalmente covariante é a função escalar

(gradiente), em que $\bar{\phi}(\bar{q}) = \phi(q)$, onde

$$\frac{\partial \bar{\phi}(\bar{q})}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^i} = \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^k}$$

Logo, é possível observar que o que define um vetor covariante ou contravariante é a lei de transformação, se ele se transformar como o vetor deslocamento será contravariante, mas se a transformação for similar ao gradiente será um vetor covariante. (NETO, 2009)

Entretanto, em geometria diferencial é possível definir com rigor um campo tensorial que relaciona objetos definidos no espaço tangente com objetos definidos no espaço cotangente. Este é um campo tensorial métrico g , que leva covetores em vetores e vice-versa. (NAKAHARA, 1990)

3 PRINCÍPIO VARIACIONAL

3.1 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Seja a coordenada generalizada $q(t)$, onde $t \in [t_1, t_2]$, e as condições de contorno que são dadas por

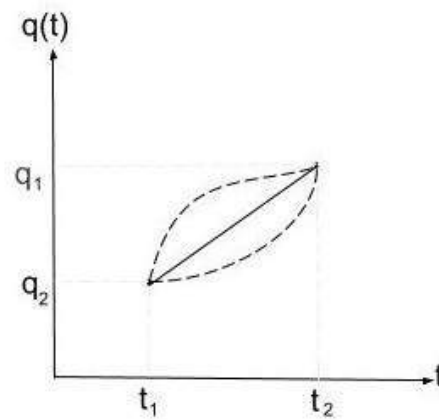
$$q(t_1) = q(t_2) = 0 \quad (3.1)$$

$$\dot{q}(t_1) = \dot{q}(t_2) = 0 \quad (3.2)$$

onde

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad (3.3)$$

Pelo princípio de Hamilton, dentre todas as trajetórias possíveis, como por exemplo as representadas na figura 5,

Figura 5 – Representação de algumas trajetórias da partícula com coordenada generalizada $q(t)$ 

Fonte: Próprio autor.

a trajetória física da partícula corresponde a um extremo da ação, isto é, a ação ou funcional S , para o movimento da partícula, dada por

$$S[q(t), \dot{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad (3.4)$$

deve ser mínima ($\delta S = 0$) e a lagrangiana L associada a esta ação, é definida como

$$L = T - V$$

em que T é a energia cinética da partícula e V é a sua energia potencial, nos fornece as equações de movimento desta partícula.

3.1.1 Partícula Livre

Para uma partícula livre, em que não tem forças externas agindo sobre ela, ou seja, o potencial $V(q)$ é constante, temos que a lagrangeana é dada por

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.5)$$

Então, pela equação 3.4, a ação será

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m v^2 dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{q}^2 dt
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde, a velocidade v é definida como $v = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$. Logo, pelo princípio de Hamilton

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \tag{3.7}$$

Mas, sendo $L = L(q, \dot{q})$,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

contudo, como a partícula é livre,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

então

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} m \frac{\partial (\dot{q}^2)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} m (2\dot{q}) \delta \dot{q} \\
 &= m(\dot{q} \delta \dot{q})
 \end{aligned}$$

Substituindo na equação 3.7

$$\delta S = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{q} \delta \dot{q} dt = 0$$

Porém,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{q}\delta q) &= \ddot{q}\delta q + \dot{q}\delta\dot{q} \\ \dot{q}\delta\dot{q} &= \frac{d}{dt}(\dot{q}\delta q) - \ddot{q}\delta q\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\delta S &= m \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(\dot{q}\delta q) - \ddot{q}\delta q \right] dt \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\dot{q}\delta q) dt - m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q}\delta q dt \\ &= m [\dot{q}\delta q]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q}\delta q dt\end{aligned}$$

mas pela equação 3.2

$$[\dot{q}\delta q]_{t_1}^{t_2} = 0$$

então

$$\begin{aligned}\delta S &= -m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q}\delta q dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{q})\delta q dt \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{q})\delta q dt\end{aligned}\tag{3.8}$$

como δq é um elemento arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}-m\ddot{q} &= 0 \\ m\ddot{q} &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

De uma forma mais completa, a equação do movimento da partícula é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$$

com isso

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \\ &= \left\{ -m\ddot{q} - \frac{\partial}{\partial q}[V(q)] \right\} \delta q\end{aligned}$$

onde $V(q)$ foi omitido por ser constante. Então, a equação 3.7 completa será

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -m\ddot{q} - \frac{\partial}{\partial q}[V(q)] \right\} \delta q dt$$

Com isso, a equação do movimento da partícula será

$$\begin{aligned}-m\ddot{q} - \frac{\partial}{\partial q}[V(q)] &= 0 \\ m\ddot{q} &= -\frac{\partial}{\partial q}[V(q)]\end{aligned}$$

mas, sabemos que

$$-\frac{\partial}{\partial q}[V(q)] = F$$

Logo, obtemos a equação

$$F = m\ddot{q}$$

que é a segunda lei de Newton ou Princípio Fundamental da Dinâmica.

3.1.2 Partícula Livre no Espaço Curvo

Para uma partícula livre no espaço curvo, em que não tem forças externas agindo sobre ela, ou seja, o potencial $V(q)$ é constante, temos que a velocidade desta partícula será dada por

$$v^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$$

mas

$$\vec{V} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (3.10)$$

e da equação 2.1 temos que

$$d\vec{s} = \vec{e}_i dq^i$$

então, utilizando a notação 3.3, a equação 3.10 será

$$\vec{V} = \vec{e}_i \dot{q}^i$$

logo

$$\begin{aligned} v^2 &= (\vec{e}_i \dot{q}^i) \cdot (\vec{e}_j \dot{q}^j) \\ &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \end{aligned}$$

sendo $g_{ij} = g_{ij}[q(t)]$, conforme a definição 2.2.

Com isso, usando a equação 3.7 e 3.5 obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \delta(g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j) \right] = 0 \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \delta(g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j) = 0 \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt [\delta(g_{ij}) \dot{q}^i \dot{q}^j + g_{ij} \delta(\dot{q}^i) \dot{q}^j + g_{ij} \dot{q}^i \delta(\dot{q}^j)] = 0 \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \delta q^k \right) \dot{q}^i \dot{q}^j + g_{ij} \delta(\dot{q}^i) \dot{q}^j + g_{ij} \dot{q}^i \delta(\dot{q}^j) \right] = 0 \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \delta q^k \right) \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{ij} \dot{q}^i \delta(\dot{q}^j) \right] = 0 \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte notação: $\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = g_{ij,k}$

$$\delta S = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt [(g_{ij,k} \delta q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{ij} \dot{q}^i \delta(\dot{q}^j)] = 0 \quad (3.11)$$

Contudo, observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g_{ij}\dot{q}^i\delta(q^j))}{\partial t} &= (g_{ij,k}\frac{\partial q^k}{\partial t})\dot{q}^i\delta(q^j) + g_{ij}\frac{\partial(\dot{q}^i\delta(q^j))}{\partial t} \\ &= (g_{ij,k}\dot{q}^k)\dot{q}^i\delta(q^j) + g_{ij}\ddot{q}^i\delta(q^j) + g_{ij}\dot{q}^i\delta(\dot{q}^j)\end{aligned}$$

então

$$g_{ij}\dot{q}^i\delta(\dot{q}^j) = \frac{\partial(g_{ij}\dot{q}^i\delta(q^j))}{\partial t} - (g_{ij,k}\dot{q}^k)\dot{q}^i\delta(q^j) - g_{ij}\ddot{q}^i\delta(q^j)$$

Substituindo na equação 3.11

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt \{ (g_{ij,k}\delta q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j + 2[\frac{\partial(g_{ij}\dot{q}^i\delta(q^j))}{\partial t} - (g_{ij,k}\dot{q}^k)\dot{q}^i\delta(q^j) - g_{ij}\ddot{q}^i\delta(q^j)] \} = 0 \\ &= \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt [(g_{ij,k}\delta q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j + 2\frac{\partial(g_{ij}\dot{q}^i\delta(q^j))}{\partial t} - 2(g_{ij,k}\dot{q}^k)\dot{q}^i\delta(q^j) - 2g_{ij}\ddot{q}^i\delta(q^j)] = 0\end{aligned}$$

Como os índices na integral são índices mudos, podemos reescrever a equação, obtendo que

$$\delta S = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt [(g_{ij,k}\delta q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j + 2\frac{\partial(g_{ik}\dot{q}^i\delta(q^k))}{\partial t} - 2g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i\delta(q^k) - 2g_{ik}\ddot{q}^i\delta(q^k)] = 0$$

mas pela equação 3.2

$$\int_{t_1}^{t_2} dt [2\frac{\partial(g_{ik}\dot{q}^i\delta(q^k))}{\partial t}] = [2g_{ik}\dot{q}^i\delta(q^k)]_{t_1}^{t_2} = 0$$

logo

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt [g_{ij,k}\delta q^k\dot{q}^i\dot{q}^j - 2g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i\delta q^k - 2g_{ik}\ddot{q}^i\delta q^k] = 0 \\ &= \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt [g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j - 2g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i - 2g_{ik}\ddot{q}^i]\delta q^k = 0\end{aligned}$$

mas

$$g_{ik,j} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i})$$

então

$$\frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt \{g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j - 2[\frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i})] \dot{q}^j \dot{q}^i - 2g_{ik} \ddot{q}^i\} \delta q^k = 0$$

$$\frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} dt \{g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j - g_{ik,j} \dot{q}^j \dot{q}^i - g_{jk,i} \dot{q}^j \dot{q}^i - 2g_{ik} \ddot{q}^i\} \delta q^k = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m dt \{ \frac{1}{2} [g_{ij,k} - g_{ik,j} - g_{jk,i}] \dot{q}^i \dot{q}^j - g_{ik} \ddot{q}^i \} \delta q^k = 0$$

Como δq^k é arbitrária, então

$$\frac{1}{2} [g_{ij,k} - g_{ik,j} - g_{jk,i}] \dot{q}^i \dot{q}^j - g_{ik} \ddot{q}^i = 0$$

multiplicando por $(-g^{lk})$

$$g^{lk} g_{ik} \ddot{q}^i + \frac{1}{2} g^{lk} [g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k}] \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$$

Utilizando as equações 2.10, temos a equação da dinâmica de uma partícula livre

$$\ddot{q}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (3.12)$$

onde definimos o símbolo de Christoffel como

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} [g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k}] \quad (3.13)$$

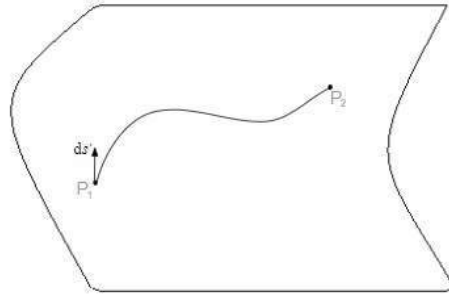
3.1.3 Conexão entre a Dinâmica e a Geometria

Definido as equações do movimento de uma partícula em um espaço curvo, é necessário o conhecimento mais geral dessa equação, válida em qualquer referencial. Para isso, é necessário atribuir ao movimento da partícula as propriedades geométricas do espaço-tempo, ou seja, conectar a dinâmica com a geometria. De modo a alcançar tal objetivo iniciamos o estudo da geodésica, isto é, a trajetória dos objetos sob a influência de um campo gravitacional.

Geodésica

Seja $d\vec{s}$ um deslocamento infinitesimal sobre a curva que liga um ponto P_1 ao ponto P_2 , figura 6.

Figura 6 – Trajetória no espaço curvo bidimensional



Fonte: Próprio autor.

O comprimento total da curva será:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} d\vec{s}$$

mas da equação 2.3

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j$$

Contudo, podemos parametrizar a curva pela equação $q^i(\tau)$, onde τ é um parâmetro de uma coordenada da geometria. Assim, ao utilizarmos o princípio de mínima ação (ou princípio de Hamilton), estaremos considerando um caráter puramente geométrico, pois o espaço-tempo é a geometria, logo tanto o espaço como o tempo podem ser utilizados como parâmetros.

Com isso temos que

$$q^i = q^i(\tau)$$

e

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tau} d\tau$$

Assim, substituindo na equação 2.3 obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} \left(\frac{dq^i}{d\tau} d\tau \right) \left(\frac{dq^j}{d\tau} d\tau \right) \\ ds^2 &= g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau} d\tau^2 \\ ds &= \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau} d\tau^2} \\ ds &= \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau}} d\tau \end{aligned}$$

Com isso obtemos uma geometria pura e o comprimento total será

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \left(\sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau}} \right) d\tau$$

que é a equação da geodésica sobre a superfície, conectando a dinâmica com a geometria, de modo que se utilizarmos o princípio de Hamilton ($\delta S = 0$) chegaremos a equação 3.12, da dinâmica de uma partícula livre.

Então, em resumo, para a dinâmica temos que

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

e

$$S = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \right) dt$$

Logo, para a geometria

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \left(\sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau}} \right) d\tau$$

e

$$\frac{d^2 q^l}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^l \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau} = 0$$

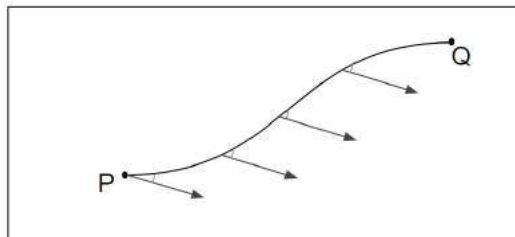
onde podemos perceber uma "conexão" entre a dinâmica e a geometria, pois a diferença é os parâmetros t e τ , contudo no segundo caso temos uma geometria pura.

4 CONEXÃO E DERIVADA COVARIANTE

A diferencial, dV^i , da componente de um vetor é definida pela diferença dos vetores em dois pontos diferentes da variedade, x e $x + dx$, infinitamente próximos. Entretanto, cada ponto pertence a um plano tangente diferente e não podemos comparar vetores em espaços tangentes distintos, precisamos trazer o vetor $V^i(x + dx)$ para o espaço de x usando uma conexão ou transporte paralelo.

Ao mover um vetor de um ponto P para um ponto Q , o ponto de aplicação deste vetor move-se ao longo de uma geodésica, e o próprio vetor se desloca continuamente de tal forma que seu ângulo com a geodésica e o seu comprimento permanece constante, este é o que chamamos de transporte paralelo, conforme figura 7.

Figura 7 – Transporte paralelo de um vetor



Fonte: Próprio autor.

Contudo, nosso vetor agora é definido conforme 2.17. Logo, seja um vetor

$$V^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{V}^j$$

sua diferencial será dada por

$$\begin{aligned}
dV^i &= d\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{V}^j\right) \\
&= \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right) d\bar{V}^j + \bar{V}^j d\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right) \\
&= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} d\bar{V}^j + \bar{V}^j \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} dx^k
\end{aligned}$$

Note que a primeira equação é uma transformação conhecida, contudo a segunda equação envolve derivadas segundas, totalmente desconhecida e com isso a propriedade vetorial, isto é, a transformação tensorial foi perdida. Logo, precisamos generalizar o conceito de diferencial e, conseqüentemente, o de derivada. Para isso, é necessário descobrir como construir uma nova derivada que preserve o caráter vetorial na transformação de coordenadas, esta nova derivada é o que chamamos de Derivada Covariante.

4.1 DERIVADA COVARIANTE

Seja a generalização da diferencial

$$\nabla = d + w \quad (4.1)$$

onde a conexão w é nula em um ponto, desde que não esteja atuando nos vetores de base.

Com isso, obtemos que

$$\nabla_k V^\lambda = D_k V^\lambda dx^k \quad (4.2)$$

onde D_k é conhecido como derivada covariante.

Além disso, a diferencial ∇ satisfaz algumas propriedades, sendo elas:

1. Linearidade

$$\nabla(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla V + \beta \nabla W$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Regra de Leibniz

$$\begin{aligned}\nabla(V \otimes W) &= (\nabla V) \otimes W + V \otimes (\nabla W) \\ \nabla \langle V, W \rangle &= \langle \nabla V, W \rangle + \langle V, \nabla W \rangle\end{aligned}\quad (4.3)$$

3. Atuando numa função $f(x)$

$$\nabla f = df$$

Mas ainda é necessário determinar a derivada covariante D_k , para isso seja

$$V = V^i e_i$$

temos que

$$\nabla V = \nabla (V^i e_i) = \nabla (V^i) e_i + V^i \nabla (e_i) \quad (4.4)$$

mas da equação 4.1, temos que em um ponto p

$$\nabla (V^i) = dV^i$$

pois sabemos que w é nula em um ponto, quando não está atuando nos vetores de base. Logo, podemos reescrever 4.4 como

$$\nabla V = dV^i \otimes e_i + V^i \nabla (e_i)$$

Podemos fazer uma modificação no índice mudo do segundo termo dessa equação ($i \rightarrow l$) e modificar o primeiro termo, de modo que

$$\nabla V = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} [dx^k \otimes e_i] + V^l (\nabla e_l) \quad (4.5)$$

É possível escrever ∇e_l como combinação linear da base $dx^k \otimes e_i$, pois

$$\nabla (e_l) = \Gamma_{kl}^i dx^k \otimes e_i \quad (4.6)$$

substituindo

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V^i}{\partial x^k} [dx^k \otimes e_i] + V^l \left(\Gamma_{kl}^i dx^k \otimes e_i \right) \\
&= \frac{\partial V^i}{\partial x^k} [dx^k \otimes e_i] + V^l \Gamma_{kl}^i [dx^k \otimes e_i] \\
&= \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^l \Gamma_{kl}^i \right) dx^k \otimes e_i
\end{aligned}$$

Com isso, comparando com a equação 4.2, definimos uma nova derivada

$$D_k V^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^\lambda V^l \quad (4.7)$$

Esta é a derivada covariante da componente contravariante de V .

Mas precisamos encontrar a derivada covariante da componente covariante de V , para isso podemos escrever

$$V = V_i dx^i$$

de modo que

$$\nabla V = \nabla (V_i dx^i) = \nabla (V_i) dx^i + V_i \nabla (dx^i)$$

De maneira similar usado para encontrar a equação 4.5, obtemos

$$\nabla V = \frac{\partial V_i}{\partial x^k} [dx^k \otimes dx^i] + V_m (\nabla dx^m)$$

usando a equação 4.3, temos que

$$dx^i \otimes e_l = \langle dx^i, e_l \rangle = \delta_l^i \quad (4.8)$$

$$\nabla \langle dx^i, e_l \rangle = \nabla (\delta_l^i) = 0$$

e

$$\langle \nabla dx^i, e_l \rangle + \langle dx^i, \nabla e_l \rangle = 0$$

$$\langle \nabla dx^i, e_l \rangle = - \langle dx^i, \nabla e_l \rangle \quad (4.9)$$

mas, sendo 4.6 e 4.8, obtemos que

$$\nabla e_l = \Gamma_{kl}^j \langle dx^i, e_j \rangle = \Gamma_{kl}^j \delta_j^i$$

usando a propriedade da delta

$$\nabla e_l = \Gamma_{kl}^i$$

então

$$\langle dx^i, \nabla e_l \rangle = \Gamma_{kl}^i dx^k$$

Além disso, da equação 4.9, obtemos

$$\langle \nabla dx^i, e_l \rangle = -\Gamma_{kl}^i dx^k \quad (4.10)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\nabla dx^m = C_{ki}^m dx^k \otimes dx^i$$

então

$$\langle \nabla dx^m, e_l \rangle = C_{kl}^m dx^k \quad (4.11)$$

Logo, para que seja verdade as equações 4.10 e 4.11, temos que

$$C_{ki}^m dx^k = -\Gamma_{kl}^i dx^k$$

Portanto

$$C_{ki}^m = -\Gamma_{kl}^i$$

Com isso descobrimos a derivada covariante da componente covariante de V , sendo esta

$$D_k V_\lambda = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^m V_m \quad (4.12)$$

De maneira mais geral, temos que

$$D_k T^{ij}{}_l = \frac{\partial T^{ij}{}_l}{\partial x^k} + \Gamma_{km}^i T^{mj}{}_l + \Gamma_{km}^j T^{im}{}_l - \Gamma_{kl}^m T^{ij}{}_m$$

4.1.1 Conexão Riemanniana ou Conexão de Christoffel

Existem objetos que não são tensores, como o símbolo de Christoffel na equação 3.13, pois eles não se transformam como os tensores. Este tipo de objeto é uma conexão que faz com que a derivada maior se comporte como um tensor e não se altere quando fizermos algumas mudanças de coordenadas.

Por exemplo, quando fizermos a contração de dois tensores, da mesma forma que usamos na equação 2.15, obtemos

$$T^{ij} B_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \bar{T}^{kl} \bar{B}_m$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} A^i B_i &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \bar{A}^k \bar{B}_l \\ &= \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial \bar{x}^k} \bar{A}^k \bar{B}_l \\ &= \delta_k^l \bar{A}^k \bar{B}_l \\ A^i B_i &= \bar{A}^k \bar{B}_k = \text{escala (não se altera)} \end{aligned}$$

Da mesma forma, ao utilizarmos a derivada covariante, obtemos:

$$D_k (A^i B_i) = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l B_i - \Gamma_{ki}^l A^i B_l$$

Sendo i, k, l índices mudos, podemos substituir na última expressão $i \rightarrow l$, assim

$$D_k (A^i B_i) = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l B_i - \Gamma_{kl}^i A^l B_i$$

$$D_k(A^i B_i) = \frac{\partial (A^i B_i)}{\partial x^k}$$

Logo, para um escala ϕ

$$D_k \phi = \partial_k \phi$$

Portanto, sendo $D_\kappa V_\beta$ um tensor, então usando a propriedade 2.8

$$D_\kappa V_\beta = g_{\beta\lambda} D_\kappa V^\lambda \quad (4.13)$$

então

$$D_k (g_{\beta\lambda} V^\lambda) = D_k (g_{\beta\lambda}) V^\lambda + g_{\beta\lambda} D_k (V^\lambda) \quad (4.14)$$

Mas a equação 4.13 e 4.14 devem ser iguais, logo

$$D_k (g_{\beta\lambda}) V^\lambda + g_{\beta\lambda} D_k (V^\lambda) = g_{\beta\lambda} D_k V^\lambda$$

$$D_k (g_{\beta\lambda}) V^\lambda = g_{\beta\lambda} D_k (V^\lambda) - g_{\beta\lambda} D_k (V^\lambda)$$

$$D_k (g_{\beta\lambda}) V^\lambda = 0$$

logo, como V^λ não pode ser zero, temos que

$$D_k (g_{\beta\lambda}) = 0 \quad (4.15)$$

Isto define a geometria riemanniana, base da relatividade geral. Com isso, podemos determinar a conexão riemanniana ou de Christoffel, pois sabendo 4.12 encontramos três equações para a derivada covariante e da equação 4.15 obtemos

$$D_k (g_{\beta\lambda}) = g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - \Gamma_{k\lambda}^l g_{\beta l} = 0 \quad (4.16)$$

$$D_\lambda(g_{k\beta}) = g_{k\beta,\lambda} - \Gamma_{\lambda k}^l g_{l\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} = 0 \quad (4.17)$$

$$D_\beta(g_{\lambda k}) = g_{\lambda k,\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^l g_{lk} - \Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = 0 \quad (4.18)$$

onde convenientemente abreviamos a derivada parcial como $_{,k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Subtraindo as equações 4.16 e 4.17

$$g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - \Gamma_{k\lambda}^l g_{\beta l} - \left(g_{k\beta,\lambda} - \Gamma_{\lambda k}^l g_{l\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} \right) = 0$$

Como a métrica e o símbolo de Christoffel são simétricos

$$g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - g_{k\beta,\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} = 0$$

Somando este resultado com 4.18

$$g_{\beta\lambda,k} - \Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda} - g_{k\beta,\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta}^l g_{kl} + g_{\lambda k,\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^l g_{lk} - \Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = 0$$

$$g_{\beta\lambda,k} - g_{k\beta,\lambda} + g_{\lambda k,\beta} - \underline{\Gamma_{k\beta}^l g_{l\lambda}} - \underline{\Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l}} = 0$$

$$g_{\beta\lambda,k} - g_{k\beta,\lambda} + g_{\lambda k,\beta} - 2\Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = 0$$

$$2\Gamma_{\beta k}^l g_{\lambda l} = g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda}$$

$$g^{m\lambda} g_{\lambda l} \left(2\Gamma_{\beta k}^l \right) = g^{m\lambda} \left(g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda} \right)$$

usando a propriedade 2.11 e 2.5 obtemos que

$$\Gamma_{\beta k}^m = \frac{1}{2} g^{m\lambda} \left(g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda} \right) \quad (4.19)$$

chamado de Conexão riemanniana ou de Christoffel. É esta conexão que é usada para descrever a relatividade, pois o campo gravitacional não pode estar ligado a um tensor, já que um tensor quando é nulo em um sistema de coordenadas, como em um ponto, ele será nulo

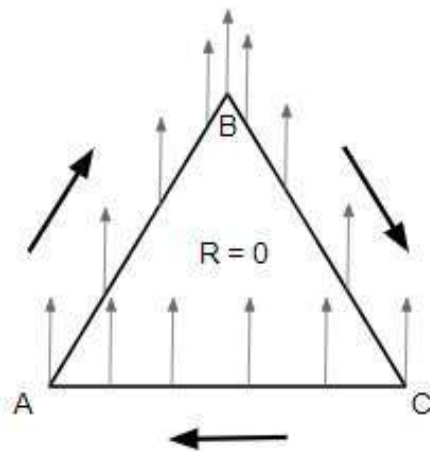
em todos os outros sistemas de coordenadas, o que não ocorre com a conexão, como veremos posteriormente.

4.2 CURVATURA

Inicialmente no estudo da álgebra tensorial vimos que é possível estudar o espaço curvo utilizando um espaço euclidiano de dimensão maior, tal que o espaço em que temos interesse esteja contido nele. Posteriormente vimos que é possível trabalhar com espaços curvos gerais, definindo vetores mais gerais que seguem a mesma lei de transformação dos vetores, com isso trabalhamos com o espaço puramente curvo, chamado de curvatura intrínseca (WEBER, 2015).

O transporte paralelo de um vetor, visto no início deste capítulo, depende da curvatura do espaço. Assim, para um espaço plano, onde geodésicas são retas, um vetor se move conforme a figura 8. É claramente observado que o vetor não se altera quando parte do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A.

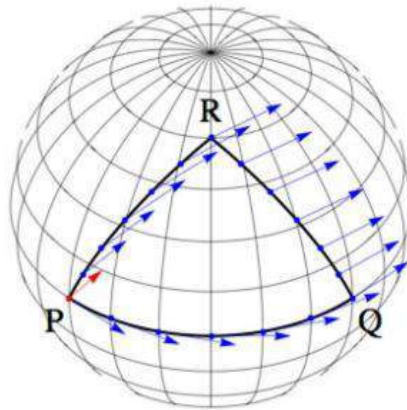
Figura 8 – Transporte paralelo no plano



Fonte: Próprio autor.

Contudo, ao se mover em um espaço curvo, conforme a figura 9, o vetor é alterado ao longo de sua trajetória quando retorna ao seu ponto inicial P.

Figura 9 – Transporte paralelo no espaço curvo



Fonte: Brand, J F e Broeck, C.

É possível calcular a curvatura por intermédio de uma integração fechada ou pela não comutatividade das derivadas covariantes, isto é

$$D_\mu D_\nu A^\lambda \neq D_\nu D_\mu A^\lambda$$

Contudo, no espaço plano

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} \right)$$

pois

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

Logo

$$\partial_\mu \partial_\nu A^\lambda = \partial_\nu \partial_\mu A^\lambda$$

Porém, no espaço curvo isto só se verifica para escalares (objetos que não sofrem alterações), de modo que seja $\phi = V_\lambda V^\lambda$ um escalar, temos

$$D_\mu D_\nu \phi = D_\nu D_\mu \phi$$

pois

$$D_\mu(V_\lambda V^\lambda) = \partial_\mu(V_\lambda V^\lambda) - \Gamma_{\mu\lambda}^k V_k V^\lambda + \Gamma_{\mu k}^\lambda V_\lambda V^k$$

$$D_\mu(V_\lambda V^\lambda) = \partial_\mu(V_\lambda V^\lambda)$$

Com isso, abreviando convenientemente a derivada covariante como $V^\mu{}_{;k} \equiv D_k V^\mu$, temos que para um escalar a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual, isto é

$$D_\mu \phi = \phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$$

Entretanto, no espaço curvo, a topologia não é determinada pelas equações de Einstein, mas podemos definir um tensor de curvatura ligado a conexão de Christoffel que definirá a magnitude da curvatura (WEBER, 2015) de forma geral, chamado de tensor de Riemann.

4.2.1 Tensor de Riemann

O tensor de curvatura ou tensor de Riemann é definido pelo fato da derivada covariante não ser comutativa, pois

$$\begin{aligned} A^\lambda{}_{;v;\mu} &= \left(A^\lambda{}_{,v} + \Gamma_{vk}^\lambda A^k \right)_{;\mu} \\ &= \left(A^\lambda{}_{,v} \right)_{;\mu} + \left(\Gamma_{vk}^\lambda A^k \right)_{;\mu} \\ &= A^\lambda{}_{,v;\mu} + \Gamma_{\mu k}^\lambda A^k{}_{,v} - \Gamma_{\mu v}^k A^k{}_{,\lambda} + \left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{;\mu} A^k + \Gamma_{vk}^\lambda \left(A^k \right)_{;\mu} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{;\mu} A^k &= \left[\left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{,\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{vk}^\beta - \Gamma_{\mu v}^\beta \Gamma_{\beta k}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\beta \Gamma_{v\beta}^\lambda \right] A^k \\ &= \left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{,\mu} A^k + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{vk}^\beta A^k - \Gamma_{\mu v}^\beta \Gamma_{\beta k}^\lambda A^k - \Gamma_{\mu k}^\beta \Gamma_{v\beta}^\lambda A^k \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} A^\lambda{}_{;v;\mu} &= A^\lambda{}_{,v;\mu} + \Gamma_{\mu k}^\lambda A^k{}_{,v} - \Gamma_{\mu v}^k A^k{}_{,\lambda} + \left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{;\mu} A^k + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{vk}^\beta A^k - \Gamma_{\mu v}^\beta \Gamma_{\beta k}^\lambda A^k - \Gamma_{\mu k}^\beta \Gamma_{v\beta}^\lambda A^k + \Gamma_{vk}^\lambda \left(A^k \right)_{;\mu} \\ &= A^\lambda{}_{,v;\mu} + \Gamma_{\mu k}^\lambda A^k{}_{,v} - \Gamma_{\mu v}^k A^k{}_{,\lambda} + \left(\Gamma_{vk}^\lambda \right)_{;\mu} A^k + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{vk}^\beta A^k - \Gamma_{\mu v}^\beta \Gamma_{\beta k}^\lambda A^k - \Gamma_{\mu k}^\beta \Gamma_{v\beta}^\lambda A^k + \Gamma_{vk}^\lambda \left(A^k{}_{,\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^k A^\beta \right) \end{aligned}$$

$$A^{\lambda}_{;v;\mu} = A^{\lambda}_{;v,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k_{;v} - \Gamma^k_{\mu\nu} A^{\lambda}_{;k} + \left(\Gamma^{\lambda}_{vk} \right)_{,\mu} A^k + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{vk} A^k - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\beta k} A^k - \Gamma^{\beta}_{\mu k} \Gamma^{\lambda}_{v\beta} A^k + \Gamma^{\lambda}_{vk} A^k_{,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{vk} \Gamma^k_{\mu\beta} A^{\beta} \quad (4.20)$$

Por outro lado,

$$A^{\lambda}_{;\mu;v} = \left(A^{\lambda}_{,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k \right)_{;v} = \left(A^{\lambda}_{,\mu} \right)_{;v} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k \right)_{;v}$$

de forma análoga a que fizemos anteriormente, encontramos que

$$A^{\lambda}_{;\mu;v} = A^{\lambda}_{,\mu;v} + \Gamma^{\lambda}_{vk} A^k_{,\mu} - \Gamma^k_{v\mu} A^{\lambda}_{;k} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu k} \right)_{,v} A^k + \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu k} A^k - \Gamma^{\beta}_{v\mu} \Gamma^{\lambda}_{\beta k} A^k - \Gamma^{\beta}_{vk} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} A^k + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k_{,v} + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} \Gamma^k_{v\beta} A^{\beta} \quad (4.21)$$

Subtraindo 4.20 com 4.21, sabendo que Γ é simétrico, obtemos

$$\begin{aligned} A^{\lambda}_{;v;\mu} - A^{\lambda}_{;\mu;v} &= A^{\lambda}_{;v,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k_{;v} - \Gamma^k_{\mu\nu} A^{\lambda}_{;k} + \left(\Gamma^{\lambda}_{vk} \right)_{,\mu} A^k + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{vk} A^k - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\beta k} A^k - \Gamma^{\beta}_{\mu k} \Gamma^{\lambda}_{v\beta} A^k + \Gamma^{\lambda}_{vk} A^k_{,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{vk} \Gamma^k_{\mu\beta} A^{\beta} + \\ &\quad - A^{\lambda}_{,\mu;v} - \Gamma^{\lambda}_{vk} A^k_{,\mu} + \Gamma^k_{v\mu} A^{\lambda}_{;k} - \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu k} \right)_{,v} A^k - \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu k} A^k + \Gamma^{\beta}_{v\mu} \Gamma^{\lambda}_{\beta k} A^k + \Gamma^{\beta}_{vk} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} A^k - \Gamma^{\lambda}_{\mu k} A^k_{,v} - \Gamma^{\lambda}_{\mu k} \Gamma^k_{v\beta} A^{\beta} \end{aligned}$$

cancelando os similares, obtemos

$$\begin{aligned} A^{\lambda}_{;v;\mu} - A^{\lambda}_{;\mu;v} &= \left(\Gamma^{\lambda}_{vk} \right)_{,\mu} A^k - \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu k} \right)_{,v} A^k + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{vk} A^k - \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu k} A^k \\ &= \left[\left(\Gamma^{\lambda}_{vk} \right)_{,\mu} - \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu k} \right)_{,v} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{vk} - \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu k} \right] A^k \\ &= \left[\left(\Gamma^{\lambda}_{kv} \right)_{,\mu} - \left(\Gamma^{\lambda}_{k\mu} \right)_{,v} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{kv} - \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{k\mu} \right] A^k \\ &= R^{\lambda}_{k\mu\nu} A^k \end{aligned}$$

onde

$$R^{\lambda}_{k\mu\nu} = \left(\Gamma^{\lambda}_{kv} \right)_{,\mu} - \left(\Gamma^{\lambda}_{k\mu} \right)_{,v} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{kv} - \Gamma^{\lambda}_{v\beta} \Gamma^{\beta}_{k\mu} \quad (4.22)$$

é o tensor de Riemann.

Propriedade do tensor de Riemann

Algumas propriedades do tensor de Riemann são muito importantes, dentre elas temos:

1. Identidades do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = R_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\nu\mu\kappa\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\nu\mu\lambda\kappa} \quad (4.23)$$

2. Tensor de Ricci

$$R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (4.24)$$

$$R_{\nu\kappa\lambda}^{\kappa} = R_{\nu}^{\kappa}{}_{\lambda\kappa} = R_{\nu\lambda}$$

Sendo as componentes da matriz do tensor de Riemann, $a_{ij} = a_{ji}$, então o número de variáveis independentes N será

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, como o tensor é uma matriz com $n = 4$, isto é, uma matriz com 4 colunas e 4 linhas, então

$$N = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

isto é, existem 10 componentes linearmente independentes no espaço-tempo.

3. Escalar de Ricci

A contração do tensor de Ricci com a métrica resulta no escalar de Ricci ou escalar de curvatura.

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R \quad (4.25)$$

sendo R o escalar de Ricci e sendo um escalar é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas.

4. Identidade de Bianchi

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho;\kappa} + R^{\lambda}_{\mu\kappa\nu;\rho} + R^{\lambda}_{\mu\rho\kappa;\nu} = 0 \quad (4.26)$$

5 INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL

Após o estudo do espaço curvo e da matemática necessária para desenvolver e entender os efeitos em corpos neste espaço podemos iniciar o estudo da Relatividade Geral, pois foi por intermédio desta teoria que se previu inicialmente a existência das ondas gravitacionais.

5.1 PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE GERAL

A Teoria da Relatividade Geral foi proposta por Albert Einstein em 1915, esta nova teoria leva em consideração as ideias descobertas na Relatividade restrita, proposta em 1905, e propõe uma generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas que incluam campos gravitacionais.

As bases da teoria da Relatividade Geral são os postulados a seguir:

1. O princípio da invariância geral de coordenadas

O grupo de invariância da nova teoria é o grupo de transformações gerais de coordenadas.

2. O princípio da equivalência

Vamos mostrar as duas formas deste princípio.

Forma fraca: Para uma partícula livre de forças não gravitacionais existe uma única geodésica quando sujeita ao campo gravitacional, dada por:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

A consequência imediata deste princípio é a associação do campo gravitacional a uma quantidade geométrica, a conexão. Este princípio é a expressão matemática em termos de geometria diferencial da igualdade entre massa gravitacional e massa inercial. No entanto, este princípio é limitado, pois ele nada afirma da interação de outros campos com o campo gravitacional.

Forma forte: Em um referencial de Lorentz local valem as leis da relatividade restrita, então, em um ponto da variedade temos que

$$D_{\mu}A^{\lambda} = \partial_{\mu}A^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}A^{\kappa}$$

mas, no ponto sabemos que $D_{\mu}A^{\lambda} = \partial_{\mu}A^{\lambda}$, logo

$$\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} = 0$$

Por outro lado, a métrica no ponto se reduz a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, isto é

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \text{constante} \quad (5.1)$$

onde

$$\{\eta_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

derivando 5.1

$$\partial_{\kappa}g_{\mu\nu}(x) = 0$$

mas em um ponto a derivada covariante coincide com a derivada parcial usual, logo

$$D_{\kappa}g_{\mu\nu}(x) = 0$$

$$g_{\mu\nu;\kappa} = 0$$

É possível perceber que esta equação é similar a equação 4.15, que é a definição da geometria riemanniana, com isso, percebemos que a geometria da relatividade geral deve ser riemanniana.

É importante notar que apesar da conexão ser nula em um ponto, o tensor de Riemman não se anula, pois as derivadas da conexão não se anulam, a não ser que o espaço seja plano.

3. Princípio da Correnpondência

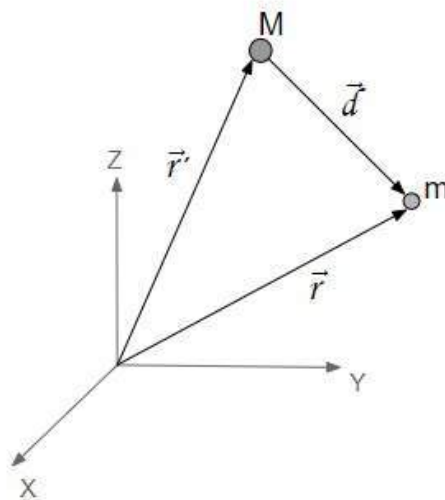
Este princípio estabelece que a relatividade geral deve conter a gravitação de Newton no regime de campo fraco e baixas velocidades, visto que neste regime é comprovado experimentalmente que a teoria de Newton é válida.

5.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Conhecendo os princípios de Einstein, sabemos que no limite de baixas velocidades e campos fracos a gravitação de Newton deve estar contida nesta teoria, logo temos que a força gravitacional Newtoniana é dada por

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{|\vec{d}|^2} \hat{d}$$

Figura 10 – Força gravitacional de Newton entre dois corpos massivos



Fonte: Próprio autor.

mas, conforme a figura 10

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

e

$$\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|^2}$$

então

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Por outro lado, a densidade de massa de um corpo é dado por

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

$$M = \int \rho dV$$

logo

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

mas

$$-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

então

$$\vec{F} = Gm \int \left[\rho(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV'$$

$$= m \nabla \left\{ G \int \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \right\}$$

assim, definimos

$$\phi = G \int \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

onde ϕ é o potencial gravitacional newtoniano e está contido na métrica, mais especificamente na componente g_{00} em que mostraremos posteriormente.

A partir disso, aplicando o divergente no potencial, obtemos

$$\nabla\phi = G \int \rho(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

então o laplaciano do potencial será

$$\nabla^2\phi = -G \int \rho(\vec{r}') \nabla \cdot \left\{ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV'$$

mas

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

e usando a propriedade de filtragem da delta, obtemos que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{5.3}$$

que é a equação de Poisson.

É importante ressaltar que a densidade de massa de um corpo está contido no tensor energia-momento da equação de Einstein, mais especificamente na componente T_{00} .

Precisamos então de uma equação que contenha uma relação entre energia-matéria, que satisfaça os critérios anteriores e que exprima uma lei de conservação.

No eletromagnetismo, pelo teorema do divergente, temos

$$\int (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint \vec{F} \cdot \hat{n} da$$

Por outro lado, a corrente elétrica

$$I = \frac{dq}{dt}$$

mas

$$dq = \rho dV \Rightarrow q = \int \rho dV$$

logo

$$I = \frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{d\rho}{dt} dV \quad (5.4)$$

Contudo, a corrente elétrica também pode ser calculada como

$$I = \oint \vec{J} \cdot \hat{n} da = \int \nabla \cdot \vec{J} dV$$

Analisando o fluxo no corpo e conhecendo a equação 5.4, obtemos

$$- \int \nabla \cdot \vec{J} dV = \int \frac{d\rho}{dt} dV \Rightarrow \int \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} \right) = 0$$

Assim, obtemos a equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.5)$$

Faremos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

onde $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$ com $\mu = 0, 1, 2, 3$

logo

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$$

com $i = 1, 2, 3$

sabemos que $x^\mu = (ct, x, y, z)$

assim

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$$

$$\frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \left[\frac{\partial J^x}{\partial x} + \frac{\partial J^y}{\partial y} + \frac{\partial J^z}{\partial z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Retomando a equação 5.5, portanto obtemos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

A partir disso, a proposta de Einstein foi

$$D_\mu (\text{geometria})^{\mu\nu} = D_\mu (\text{matéria-energia})^{\mu\nu} = 0$$

expressando "a conservação local de energia e momento"(WEBER, 2015).

A matéria-energia está contido no tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e podemos associar a geometria ao tensor $G^{\mu\nu}$, logo

$$D_\mu G^{\mu\nu} = D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.6)$$

O objeto geométrico que contém derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$, que está associado a geometria, é o tensor de Riemann. Com isso, usando a identidade 4.26 e aplicando a métrica $g^{\rho\kappa}$, juntamente com a propriedade 2.9, encontramos que

$$g^{\rho\kappa} (R_{\rho\mu\kappa\lambda;\nu} + R_{\rho\mu\nu\kappa;\lambda} + R_{\rho\mu\lambda\nu;\kappa}) = 0$$

$$R^{\kappa}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0$$

Utilizando a identidade 4.23 no segundo termo da equação, obtemos

$$R^{\kappa}_{\mu\kappa\lambda;\nu} - R^{\kappa}_{\mu\kappa\nu;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0$$

mas sabendo 4.24, temos

$$R_{\mu\lambda;\nu} - R_{\mu\nu;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0$$

$$g^{\mu\lambda} \left(R_{\mu\lambda;\nu} - R_{\mu\nu;\lambda} + R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} \right) = 0$$

$$\left(g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda} \right)_{;\nu} - g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu;\lambda} + g^{\mu\lambda} R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0$$

onde o escalar de Ricci, equação 4.25, é evidente no primeiro termo desta equação, logo

$$R_{;\nu} - g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu;\lambda} + g^{\mu\lambda} R^{\kappa}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0$$

$$R_{;\nu} - g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu;\lambda} - g^{\mu\lambda} R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda;\kappa} = 0$$

utilizando novamente a propriedade da métrica de levantar índices e conhecendo o Tensor de Ricci, a equação obtida será

$$R_{;\nu} - R^{\lambda}_{\nu;\lambda} - R^{\kappa}_{\nu;\kappa} = 0$$

mas os índices são mudos, logo substituindo ($\kappa \rightarrow \lambda$) no terceiro termo, temos que

$$R_{;\nu} - 2R^{\lambda}_{\nu;\lambda} = 0$$

$$\frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(R_{;\nu} - 2R^{\lambda}_{\nu;\lambda} \right) = 0$$

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} R_{;\nu} - R^{\lambda}_{\nu;\lambda} \right) = 0$$

$$R^{\lambda\mu}_{;\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\nu} = 0$$

substituindo agora ($\nu \rightarrow \lambda$) no segundo termo, temos que

$$R^{\lambda\mu}_{;\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R_{;\lambda} = 0$$

$$\left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = 0$$

mas $V^\mu{}_{;k} \equiv D_k V^\mu$, logo

$$\left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = D_\lambda \left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right) = 0$$

$$D_\lambda (G^{\lambda\mu}) = 0$$

onde

$$G^{\lambda\mu} \equiv R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \quad (5.7)$$

que é conhecido como tensor de Einstein.

Sabemos a proposta inicial de Einstein, equação 5.6, logo a equação por parte da matéria será

$$D_\lambda (T^{\lambda\mu}) = 0$$

com isso, obtemos que

$$\left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = T^{\lambda\mu}{}_{;\lambda}$$

Por fim, fazendo uma pequena manipulação dos índices utilizando a métrica, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}$$

que é a equação da Relatividade Geral, onde k é uma constante de acoplamento necessária devido ao princípio de correspondência da teoria.

Com isso, utilizando este princípio, onde para campos fracos e baixas velocidades chegamos a equação de Poisson, 5.3, temos que

$$k = \frac{8\pi G}{c^2}$$

Portanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (5.8)$$

que é a equação de campo da Relatividade Geral de Einstein.

Além disso, Albert Einstein também estimou que o "universo não estaria nem expandindo nem se contraindo"(WEBER, 2015), para isto, é interessante notar que é possível fazer uma pequena alteração no escalar de Ricci, R , que pode ser reescrito como $R + \Lambda$, onde Λ é chamada de constante cosmológica, sem nenhuma alteração na teoria e assim permitir esse universo estático.

6 ONDAS GRAVITACIONAIS E SUA ANALOGIA COM ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

6.1 LINEARIZAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL

Vimos que um dos princípios da Relatividade Geral de Einstein se reduz a gravitação de Newton no regime de campo fraco e baixas velocidades, visto que este regime é comprovado experimentalmente. Essa aproximação de campo fraco é válida, pois consideramos que a fonte está muito distante.

Considerando uma região onde o espaço-tempo é uma leve perturbação do espaço plano, a métrica pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação na métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Além disso, vamos preservar apenas os termos de primeira ordem de $h_{\mu\nu}$, logo

$$O(h^2) \rightarrow 0 \tag{6.1}$$

Sendo assim, precisamos inicialmente encontrar qual será a métrica que iremos utilizar, para isso conhecendo a propriedade 2.11 da métrica, temos que

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\kappa} + \alpha h^{\nu\kappa}) = \delta_{\mu}^{\kappa}$$

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa} + \alpha h_{\mu}^{\kappa} + h_{\mu}^{\kappa} + O(h^2) = \delta_{\mu}^{\kappa}$$

$$\alpha h_{\mu}^{\kappa} + h_{\mu}^{\kappa} = 0$$

$$(\alpha + 1) h_{\mu}^{\kappa} = 0$$

$$\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = -1$$

Logo, nossa métrica será

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \\ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) \end{cases} \quad (6.2)$$

A partir disso, podemos encontrar o tensor e o escalar de Ricci, necessários na equação da Relatividade Geral 5.8, logo sabemos de 4.22 que

$$\begin{aligned} R_{k\mu\nu}^{\lambda} &= \left(\Gamma_{k\nu}^{\lambda} \right)_{,\mu} - \left(\Gamma_{k\mu}^{\lambda} \right)_{,\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} \Gamma_{k\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} \Gamma_{k\mu}^{\beta} \\ &= \left(\Gamma_{k\nu}^{\lambda} \right)_{,\mu} - \left(\Gamma_{k\mu}^{\lambda} \right)_{,\nu} \end{aligned} \quad (6.3)$$

pois consideramos 6.1.

Mas da equação 4.19 temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta k}^m &= \frac{1}{2} g^{m\lambda} (g_{\beta\lambda,k} + g_{\lambda k,\beta} - g_{k\beta,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{m\lambda} (h_{\beta\lambda,k} + h_{\lambda k,\beta} - h_{k\beta,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \left(h_{\beta,k}^m + h_{k,\beta}^m - h_{k\beta}^m \right) \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} \left(h_{\mu,\nu}^{\lambda} + h_{\nu,\mu}^{\lambda} - h_{\nu\mu}^{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

substituindo em 6.3, obtemos

$$R_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu,\nu}^{\lambda} + h_{\nu,\mu}^{\lambda} - h_{\nu\mu}^{\lambda} \right]_{,\gamma} - \frac{1}{2} \left[h_{\mu,\gamma}^{\lambda} + h_{\gamma,\mu}^{\lambda} - h_{\gamma\mu}^{\lambda} \right]_{,\nu}$$

mas $_{,k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$R_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{\gamma} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\gamma} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\gamma} \partial^{\lambda} h_{\nu\mu} - \partial_{\nu} \partial_{\gamma} h_{\mu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\gamma}^{\lambda} + \partial_{\nu} \partial^{\lambda} h_{\gamma\mu} \right\} \quad (6.5)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{\lambda} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\lambda} \partial^{\lambda} h_{\nu\mu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\lambda}^{\lambda} + \partial_{\nu} \partial^{\lambda} h_{\lambda\mu} \right\} \quad (6.6)$$

mas

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} = \partial_{\lambda} \eta^{\lambda\nu} \partial_{\nu} = \eta^{\lambda\nu} \partial_{\lambda} \partial_{\nu}$$

contudo, sabendo 5.2, obtemos que

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} = \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3$$

mas

$$x^{\mu} = (x^0, x^i) = (ct, x, y, z), \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$\{\partial_{\mu}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$$

então

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} = \square \quad (6.7)$$

onde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e o d'Alambertiano é definido como

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Com isso, utilizando 6.7 na equação 6.6, obtemos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h^\lambda_\lambda + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}$$

Por outro lado, temos que h^λ_λ é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz de $h_{\mu\nu}$, no qual definimos

$$h = h^\lambda_\lambda$$

Portanto,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}$$

A partir do tensor de Ricci para aproximação de campo fraco é possível encontrar o escalar de Ricci, pois da equação 4.25 obtemos que

$$R = g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \square h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} \right\}$$

utilizando 6.2 e 6.1, obtemos que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - \square h - \partial^\gamma \partial_\gamma h + \partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - \square h - \square h + \partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - 2\square h + \partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} &= \eta^{\gamma\sigma} \partial_\sigma \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha h_{\gamma\lambda} \\
&= \partial_\sigma \partial_\alpha h^{\sigma\alpha} \\
&= \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda}
\end{aligned}$$

então

$$R = \frac{1}{2} \left\{ 2\partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - 2\Box h \right\}$$

$$R = \partial_\lambda \partial_\gamma h^{\gamma\lambda} - \Box h$$

$$R = \partial_\kappa \partial_\beta h^{\kappa\beta} - \Box h$$

Com isso, podemos descobrir o tensor de Einstein, pois utilizando a equação 5.7 obtemos

$$G_{\gamma\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h_\mu^\lambda - \Box h_{\gamma\mu} - \partial_\mu \partial_\gamma h + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \left(\partial_\kappa \partial_\beta h^{\kappa\beta} - \Box h \right)$$

$$G_{\gamma\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\lambda \partial_\gamma h_\mu^\lambda - \Box h_{\gamma\mu} - \partial_\mu \partial_\gamma h + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\gamma\lambda} \right\} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\beta h^{\kappa\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \Box h \quad (6.8)$$

Por conveniência vamos definir um tensor de traço reverso

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad (6.9)$$

com isso, temos

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$$

$$\bar{h} = h - \frac{1}{2} \delta_\mu^\mu h$$

mas

$$\delta_\mu^\mu = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4$$

logo

$$\bar{h} = h - 2h$$

$$\bar{h} = -h \quad (6.10)$$

então

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} \quad (6.11)$$

Com isso, substituindo na equação 6.8, obtemos

$$G_{\gamma\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial^\lambda \partial_\gamma \bar{h}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\lambda\mu} \partial^\lambda \partial_\gamma h + \partial^\lambda \partial_\mu \bar{h}_{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} \eta_{\lambda\gamma} \partial^\lambda \partial_\mu h - \square \bar{h}_{\gamma\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\gamma\mu} \square h - \partial_\mu \partial_\gamma h - \eta_{\gamma\mu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}_{\lambda\beta} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta_{\gamma\mu} \eta_{\lambda\beta} \partial^\lambda \partial^\beta h + \eta_{\gamma\mu} \square h \right\}$$

$$G_{\gamma\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \partial^\lambda \partial_\gamma \bar{h}_{\lambda\mu} + \partial^\lambda \partial_\mu \bar{h}_{\lambda\gamma} - \square \bar{h}_{\gamma\mu} - \eta_{\gamma\mu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}_{\lambda\beta} \right\}$$

$$G_{\gamma\mu} = \frac{1}{2} \left\{ -\square \bar{h}_{\gamma\mu} + \partial_\gamma \left(\partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu} \right) + \partial_\mu \left(\partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\gamma} \right) - \eta_{\gamma\mu} \partial^\beta \left(\partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\beta} \right) \right\}$$

Usando o gauge de Lorentz

$$\partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu} = 0$$

obtemos que

$$G_{\gamma\mu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\gamma\mu}$$

Com isso, a equação de campo 5.8 da Relatividade Geral de Einstein será

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\gamma\mu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}$$

Portanto,

$$\square\bar{h}_{\gamma\mu} = -\frac{16\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (6.12)$$

Assim foi possível eliminar 4 graus de liberdade, mas fazendo uma análise dos graus de liberdade da equação da Relatividade Geral, temos que sendo $T_{\mu\nu}$ uma matriz 4×4 , o número de componentes independentes será $\frac{n(n+1)}{2}$. Então, para $n = 4$, temos que a equação de Einstein tem 10 componentes independentes.

Contudo, sendo $h_{\mu\nu}$ uma representação do grupo de Lorentz, este grupo tem helicidade 2^1 , pois eles são representados como

$$SO(1,3) \sim SU(2) \oplus SU(2)$$

Fazendo uma analogia com as ondas eletromagnéticas, temos que a representação vetorial do campo de Maxwell é dado por

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Da mesma forma, a representação para o campo gravitacional, do “gráviton”, é dado por

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = [(0,0) \oplus (1,1)]_S + [(0,1) \oplus (1,0)]_A$$

Assim, percebemos que o campo gravitacional não carrega apenas o spin 2, sendo $h_{\mu\nu}$ um tensor simétrico, a sua representação máxima deve ser spin 2, na verdade helicidade 2, pois não tem massa. Contudo ele carrega também spin 0 e spin 1 que deverá ser eliminado. Essa eliminação desses graus de liberdade é feita pelo mecanismo de gauge. Quando utilizamos o gauge de Lorentz eliminamos 4 graus de liberdade, mas ainda faltam quatro graus de liberdade a serem eliminados, esses oito componentes são a parte espúria (não física) da teoria.

Sendo assim, é por meio do gauge transverso sem traço ou TT gauge (em inglês, Transverse-

¹Pois se esta partícula, Gráviton, existir, a equação mostra que ela não tem massa.

Traceless gauge) que tal objetivo pode ser alcançado. Somente neste gauge as ondas gravitacionais viajam a velocidade da luz em qualquer referencial, isto é, todos os observadores verificam que a radiação gravitacional viajando à velocidade da luz, que é uma exigência da relatividade geral, com isso a física é a mesma para todos os observadores. Mais ainda, somente as componentes espaciais de $h_{\mu\nu}$ satisfazem a equação de onda, isto é

$$\square h_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{ij}^{TT} \quad (6.13)$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e onde, considerando a onda gravitacional se propagando na direção $+z$, temos (FLANAGAN; HUGHES, 2005; MACEDO, 2011)

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{TT} & h_{xy}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{yx}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Assim, com esse mecanismo de gauge é possível a eliminação dos graus de liberdade (FRONSDAL, 1958), como é feito também nas ondas eletromagnéticas com o uso de projetores $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$, chegando a equação $\square A^\mu = J^\mu$.

Além disso:

1. $h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}$
2. $h_{xx}^{TT} + h_{yy}^{TT} = 0$ (Traço Nulo - O que implica que não há restrições entre h_{ij}^{TT} e \bar{h}_{ij}^{TT})
3. $h_{ij}^{GW} = \bar{h}_{ij}^{TT}$

A parte transversa, \bar{h}_{ij}^T , deste tensor é obtida quando projetamos perpendicularmente este na direção de propagação $n_i = \frac{x^i}{r}$ e subtraímos o traço. Para isto é útil utilizarmos o projetor P_{ij} , já que estamos em $D = 0 + 3$, isto é, considerando apenas dimensão espacial. Matematicamente temos então que o tensor transversal será (FLANAGAN; HUGHES, 2005)

$$\bar{h}_{ij}^T = \bar{h}_{kl} P_{ik} P_{jl}$$

onde

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$$

removendo então o traço temos que

$$h_{ij}^{TT} = \left(P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \right) \bar{h}_{kl}$$

fazendo

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$$

Por fim, obtemos

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} \quad (6.15)$$

Retornando as equações 6.12 e 6.13 e utilizando o método da função de Green esta equação possui como solução

$$h_{ij}^{TT} = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{16\pi G}{c^2} \right) \Lambda_{ij,kl} \int_V \frac{T_{ij}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'$$

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^2} \Lambda_{ij,kl} \int_V \frac{T_{ij}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'$$

onde

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

Vamos supor que a fonte (dois objetos muito massivos) tenham velocidades de rotação, tal que $v \lll c$. Além disso, vamos considerar que o observador está muito distante da fonte, de modo que $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq |\vec{r}| = r$, com isso

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \simeq t - \frac{r}{c}$$

e

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V T_{ij} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' \quad (6.16)$$

Usando a equação da conservação do tensor energia momento (localmente), ou seja

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

que representa uma equação da continuidade, similar ao eletromagnetismo onde $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$. Logo, podemos observar que existe uma conservação envolvida, fazendo

$$\nu = 0 \rightarrow \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0 \quad (6.17)$$

$$\nu = i \rightarrow \partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.18)$$

Todas essas duas equações significam uma conservação, onde a equação 6.17 representa então a conservação da energia e a equação 6.18 representa a conservação do momento linear.

A partir destas equações, podemos fazer algumas manipulações, de modo que

$$\begin{cases} \partial_0^2 T^{00} + \partial_0 \partial_i T^{i0} = 0 \\ \partial_i \partial_0 T^{0i} + \partial_i \partial_j T^{ji} = 0 \end{cases}$$

mas o tensor energia-momento é simétrico, logo subtraindo as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0^2 T^{00} - \partial_i \partial_j T^{ji} &= 0 \\ \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) &= \partial_k \partial_l T^{kl} (x^i x^j) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Como x e t são coordenadas independentes, temos que

$$\partial_0^2 (T^{00} x^i x^j) = \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j$$

a equação do lado direito pode ser reescrita de modo que

$$\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j = \partial_k \left[(\partial_l T^{kl}) x^i x^j + T^{kl} (\partial_l x^i x^j) \right]$$

mas

$$\partial_l x^i x^j = (\partial_l x^i) x^j + x^i (\partial_l x^j) = \delta_l^i x^j + x^i \delta_l^j$$

logo

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_k \left[\left(\partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + T^{kl} \left(\delta_l^i x^j + x^i \delta_l^j \right) \right] \\ &= \partial_k \left[\left(\partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + T^{ki} x^j + T^{kj} x^i \right] \\ &= \left(\partial_k \partial_l T^{kl} \right) x^i x^j + \left(\partial_l T^{kl} \right) \left(\partial_k x^i x^j \right) + \partial_k \left(T^{ki} x^j \right) + \partial_k \left(T^{kj} x^i \right)\end{aligned}$$

substituindo a equação 6.19 obtemos

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + \left(\partial_l T^{kl} \right) \left(\partial_k x^i x^j \right) + \partial_k \left(T^{ki} x^j \right) + \partial_k \left(T^{kj} x^i \right) \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + \left(\partial_l T^{kl} \right) \left(\delta_k^i x^j \right) + \left(\partial_l T^{kl} \right) \left(\delta_k^j x^i \right) + \partial_k \left(T^{ki} \right) x^j + T^{ki} \delta_k^j + \partial_k \left(T^{kj} \right) x^i + T^{kj} \delta_k^i \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + \left(\partial_l T^{il} \right) x^j + \left(\partial_l T^{jl} \right) x^i + \partial_k \left(T^{ki} \right) x^j + T^{ji} + \partial_k \left(T^{kj} \right) x^i + T^{ij}\end{aligned}$$

novamente devido a simetria do tensor energia-momento, temos

$$\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j = \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left(\partial_k T^{ik} \right) x^j + 2 \left(\partial_k T^{jk} \right) x^i + 2T^{ij} \quad (6.20)$$

Analisando o termo $\left(\partial_k T^{ik} \right) x^j$ é possível perceber que

$$\left(\partial_k T^{ik} x^j \right) = \left(\partial_k T^{ik} \right) x^j + T^{ik} \delta_k^j = \left(\partial_k T^{ik} \right) x^j + T^{ij}$$

logo

$$\left(\partial_k T^{ik} \right) x^j = \left(\partial_k T^{ik} x^j \right) - T^{ij}$$

retomando a equação 6.20

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left[\left(\partial_k T^{ik} x^j \right) - T^{ij} \right] + 2 \left[\left(\partial_k T^{jk} x^i \right) - T^{ji} \right] + 2T^{ij} \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left(\partial_k T^{ik} x^j \right) - 2T^{ij} + 2 \left(\partial_k T^{jk} x^i \right) - 2T^{ji} + 2T^{ij} \\ &= \partial_0^2 T^{00} (x^i x^j) + 2 \left(\partial_k T^{ik} x^j \right) + 2 \left(\partial_k T^{jk} x^i \right) - 2T^{ji}\end{aligned}$$

Com isso temos que o tensor energia-momento será

$$T^{ij} = \frac{1}{2}\partial_0^2 T^{00}(x^i x^j) + (\partial_k T^{ik} x^j) + (\partial_k T^{jk} x^i) - \frac{1}{2}\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j \quad (6.21)$$

Então, podemos encontrar o gauge transverso sem traço, substituindo a equação 6.21 na equação 6.16 e sabendo que $T^{ij} = T_{ij}$, isto é, a notação covariante é perdida quando nos restringimos ao espaço 3D euclidiano. Com isso

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{2}\partial_0^2 T^{00}(x^k, x^l) + (\partial_m T^{km} x^l) + (\partial_m T^{lm} x^k) - \frac{1}{2}\partial_m \partial_n T^{mn} x^k x^l \right\}$$

contudo todos os divergentes são termos de superfícies, ou seja

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} da$$

onde $\vec{F} = 0$ em S , logo o gauge TT será dado por

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT} &= \frac{4G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{2}\partial_0^2 T^{00}(x^k x^l) \right\} \\ &= \frac{2G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \int_V dV' \left\{ \partial_0^2 T^{00}(x^k x^l) \right\} \end{aligned}$$

Portanto

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^l dV' \quad (6.22)$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ para um fluido perfeito é dado por (LORENZI, 2010)

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - P \eta^{\mu\nu}$$

onde u^μ é a quadrivelocidade, dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Entretanto, nossa fonte não é um fluido, mas sim um sistema binário girando a baixa velocidade ($v \ll c$), logo não faz sentido falar de pressão (P), portanto

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (6.23)$$

mas

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \quad (6.24)$$

pois

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

por outro lado o tempo próprio é dado por $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, para $v \ll c$, temos que

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma = 1$$

substituindo na equação 6.24

$$u^0 = c\gamma = c$$

então, da equação 6.23, obtemos

$$T^{00} = \rho u^0 u^0 = \rho(c)(c)$$

logo

$$T^{00} = \rho c^2$$

Por fim, substituindo na equação 6.22, concluímos que

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^2 r} \Lambda_{ij,kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho c^2 x^k x^l dV'$$

portanto

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \Lambda_{ij,kl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho x^k x^l d^3x'$$

onde a densidade $\rho = \rho(x, t - \frac{r}{c})$. Assim, obtemos o gauge transversal sem traço ou TT gauge.

6.2 ENERGIA E MOMENTO LINEAR DE UMA ONDA GRAVITACIONAL

De acordo com a Relatividade Geral o campo gravitacional não pode ser considerado como um campo no espaço-tempo, mas sim uma propriedade geométrica do espaço-tempo. O tensor energia-momento $T^{\mu\nu} \propto R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, compreende matéria e radiação, mas não o campo gravitacional.

Um tensor energia-momento do campo gravitacional não está definido e não pode ser definido, como vimos na seção 4.1.1. Isto está de acordo com o princípio da equivalência na forma forte, isto é, em um ponto podemos fazer $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, excluindo os efeitos gravitacionais. Mas se um tensor do campo gravitacional existir ele será nulo em um ponto e, conseqüentemente, nulo em qualquer sistemas de coordenadas (propriedade Tensorial).

Entretanto, uma propriedade não tensorial pode ser definida em relação à métrica de fundo (background). Chamaremos esse pseudotensor de $\tau_{\mu\nu}$. Esse objeto pode ser anulado em um ponto, mas não em todos.

Vamos considerar $O(h^2) \neq 0$ e fazer uma média $\langle \tau_{\mu\nu} \rangle$ em uma região finita do espaço-tempo, mas extensa o suficiente para incluir diversos comprimentos de onda e pequena comparada a curvatura do background.

Usaremos só a aproximação em 2ª ordem em h , pois, até aqui, usando a identidade de Bianchi, dada pela equação 4.26, pode-se mostrar que $D_{\mu}\tau^{\mu\nu} = 0$, isto é, que existe uma lei de conservação para o "tensor" energia-momento do campo gravitacional (ondas gravitacionais).

A partir disso, segundo (LAMMERZAHN; PERLICK, 2014), a equação de Einstein pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu}^{(h^2)} = k(T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu})$$

e

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa} \left[G_{\mu\nu}^{(h^2)} - G_{\mu\nu}^{(h)} \right]$$

Segundo a literatura, isto é feito, pois os efeitos gravitacionais não são observados localmente, é necessário uma certa região.

O cálculo da energia da onda gravitacional é feito a partir da média do pseudotensor $\tau_{\mu\nu}$

$$\langle \tau_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle h_{\alpha\beta, \mu}^{TT} h^{TT\alpha\beta}_{, \nu} \rangle$$

Com isso, é retirado os efeitos de blackground.

Assim, segundo a literatura o fluxo de energia na direção radial é dado por

$$\tau^{0r} = \frac{d^2E}{dt dA}$$

integrando obtemos que(LAMMERZAHN; PERLICK, 2014)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} \rangle$$

onde já sabemos que

$$I_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Q_{kk}$$

e

$$Q_{ij} = \int T^{00} x^i x^j d^3x$$

Logo, o fluxo de energia depende da terceira derivada temporal, então a distribuição de massa devem sofrer deformações para emitir radiação. Assim, a radiação gravitacional é de origem quadrupolar, diferente da radiação eletromagnética que podemos observar nas equações 6.25 e 6.26 de Jefimenko para os campos eletromagnéticos dependentes do tempo(MACHADO, 2006).

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho(\vec{r}', t_r) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (6.25)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV \quad (6.26)$$

isto é, independente da ordem multipolar, uma carga que sofre variação no tempo vai emitir ondas eletromagnéticas.

6.3 INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL COM A MATÉRIA E A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

Precisamos analisar agora qual é a influência da fonte para construir a onda gravitacional, para isso vimos da matriz 6.14 que

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{TT} & h_{xy}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{yx}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, esta é a forma que a onda foi construída para viajar no vácuo, a solução transiente, isto é, a solução via método de Green, que revela as características da fonte e que define a simetria de h .

Temos então que

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} \quad (6.27)$$

e o traço é nulo, isto é

$$h_{xx}^{TT} + h_{yy}^{TT} = 0 \Rightarrow h_{yy}^{TT} = -h_{xx}^{TT} \quad (6.28)$$

Na aproximação que estamos usando, podemos supor a solução de onda plana, propagando-se no eixo $+z$, ou seja

$$h_{xx}^{TT} = A_{xx} \cos(kz - \omega t) \quad (6.29)$$

$$h_{xy}^{TT} = A_{xy} \cos(kz - \omega t) \quad (6.30)$$

que são soluções estacionárias, ou seja, soluções para a onda gravitacional no vácuo ($\square h_{ij}^{TT} = 0$).

Na passagem de uma onda gravitacional, para analisarmos o que acontece com uma partí-

cula livre, precisamos analisar a partir de sua geodésica.

Assim, seja a geodésica de uma partícula livre dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

onde τ é o tempo próprio medido pelo observador ao longo da geodésica.

Vamos supor que a partícula está em repouso na origem, isto é, $x^\mu = (ct, 0, 0, 0)$. A quadri-velocidade é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

onde

mas, como a partícula está em repouso, então $v = 0$, logo

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt} = c \equiv c\delta_0^\mu$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu c^2 \delta_0^\kappa \delta_0^\lambda &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^\mu c^2 \end{aligned} \tag{6.31}$$

mas da equação 6.4, obtemos que

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} \left(h_{0,0}^\mu + h_{0,0}^\mu - h_{00}{}^{;\mu} \right)$$

mas

$$h_{00} = h_{\mu 0} = 0$$

segue-se que a equação 6.31, da quadriaceleração, será nula

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

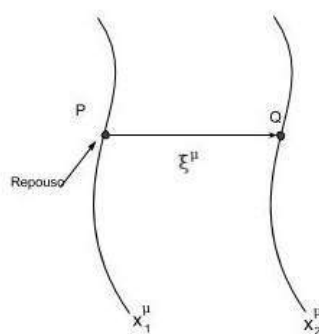
Isto significa que uma partícula livre em repouso permanecerá em repouso com a passagem da onda gravitacional. Entretanto, estar em repouso no sistema de coordenadas significa que as coordenadas não mudam. Logo, o sistema de coordenadas se ajusta à passagem da onda. Então, a maneira adequada de tratar esse problema é através do desvio geodésico.

6.3.1 Desvio Geodésico

Vamos Analisar, então, duas partículas testes muito próximas, quando comparada à curvatura, que são conectadas pelo vetor ξ^μ , de modo que, conforme figura 11,

$$x_2^\mu(\tau) = x_1^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$$

Figura 11 – Separação infinitesimal entre duas partículas Espaço Curvo



Fonte: Próprio autor.

O desvio geodésico é definido como (HENDRY, 2007)

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = u^\beta \xi^\mu_{;\beta}$$

de modo que, usando a equação 4.7, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{D\xi^\mu}{D\tau} &= u^\beta \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa \right) \\ &= \frac{dx^\beta}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa \right)\end{aligned}$$

com isso temos que

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tau} + \Gamma_{\beta\kappa}^\mu \xi^\kappa u^\beta \quad (6.32)$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{D}{D\tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \right) + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \frac{D\xi^\gamma}{D\tau} u^\alpha\end{aligned}$$

Assim, substituindo 6.32, obtemos a expressão compacta que

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta \xi^\gamma \quad (6.33)$$

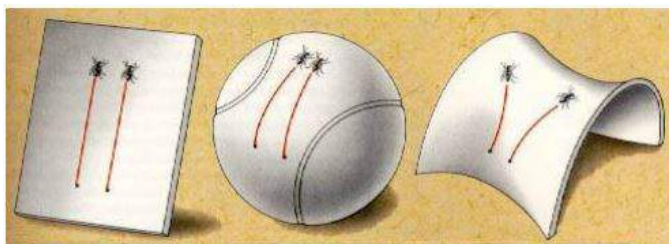
onde $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ é o tensor de Riemann, definido pela equação 4.22. É possível ainda encontrar com frequência na literatura, por exemplo (HENDRY, 2007)(SCHUTZ, 2009), a equação 6.33 escrita como

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{v}} \xi^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta \xi^\gamma$$

Isto demonstra os efeitos de uma força sobre as geodésicas, devido à passagem de uma onda gravitacional, tal força é denominada força de maré.(LORENCI, 2010)

Se o espaço-tempo é plano, então $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = 0$, mas se o espaço-tempo se curva com a passagem da onda, então a separação entre as geodésicas muda, conforme a figura 12.

Figura 12 – Desvio geodésico na superfície de diferentes curvaturas



Fonte: (HENDRY, 2007)

Então, sejam as partículas testes, conforme figura 11, onde

$$x^\beta = (ct, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \xi^\beta = (0, L, 0, 0) \quad (6.34)$$

considerando como parâmetro para as geodésicas somente o tempo, temos que

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} u^\mu u^\nu \xi^\beta$$

mas

$$u^\mu = \frac{d(ct)}{dt} = c \equiv c\delta_0^\mu$$

então

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} (c\delta_0^\mu) (c\delta_0^\nu) \xi^\beta$$

sabendo de 6.34 e usando a propriedade da delta, obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = c^2 L R^\alpha_{00x}$$

para

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = c^2 L R^x_{00x} \\ \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = c^2 L R^y_{00x} \end{cases}$$

mas da equação 6.5, segue-se que

$$R^x_{00x} = \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_x h_0^x + \partial_0 \partial_0 h_x^x - \partial_0 \partial^x h_{x0} - \partial_x \partial_0 h_0^x - \partial_x \partial_0 h^x_0 + \partial_x \partial^x h_{00})$$

$$R^y_{00x} = \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_x h_0^y + \partial_0 \partial_0 h^y_x - \partial_0 \partial^y h_{x0} - \partial_x \partial_0 h_0^y - \partial_x \partial_0 h^y_0 + \partial_x \partial^y h_{00})$$

mas sabendo de 6.14, temos que

$$R^x_{00x} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^x_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^x_x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^{TT}_{xx}}{\partial t^2}$$

$$R^y_{00x} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^y_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^y_x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^{TT}_{xy}}{\partial t^2}$$

logo

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \frac{\partial^2 h^{TT}_{xx}}{\partial t^2} \\ \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \frac{\partial^2 h^{TT}_{xy}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Agora, para um anel de partículas testes, temos que

$$\xi^\beta = (0, x, y, 0) \rightarrow \begin{cases} x = L \cos(\theta) \\ y = L \sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases}$$

então, teremos que a onda viajando na direção $+z$ será

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = c^2 L \cos(\theta) R^x_{00x} + c^2 L \sin(\theta) R^x_{00y}$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = c^2 L \cos(\theta) R^y_{00x} + c^2 L \sin(\theta) R^y_{00y}$$

da mesma forma que feito anteriormente (HENDRY, 2007) e usando as equações 6.28 e 6.27, obtemos que

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \cos(\theta) \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2} + \frac{1}{2} c^2 L \sin(\theta) \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^2 L \cos(\theta) \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c^2 L \sin(\theta) \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2}$$

mas das equações 6.29 e 6.30, com $z = 0$, é possível identificar a solução das equações (HENDRY, 2007) como

$$\xi^x = L \cos(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xx} \cos(\theta) \cos(\omega t) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin(\theta) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos(\theta) \cos(\omega t) - \frac{1}{2} L A_{xx} \sin(\theta) \cos(\omega t)$$

Então, suponha uma onda gravitacional viajando na direção $+z$ e que θ esteja varrendo o intervalo $[0, 2\pi]$, em um anel de partículas testes, isto é, no plano xy , então a figura 13 mostra os efeitos da passagem da onda gravitacional. Onde é possível analisar dois casos da passagem da onda, ou seja, dois estados de polarização independentes da onda gravitacional. O primeiro estado é quando a perturbação da métrica tem $A_{xx} = A_{xx}^{TT} \neq 0$ e $A_{xy} = A_{xy}^{TT} = 0$. Neste caso a solução de ξ^x e ξ^y se reduz a

$$\xi^x = L \cos(\theta) \left(1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right) = x \left(1 + \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) \left(1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right) = y \left(1 - \frac{1}{2} A_{xx} \cos(\omega t) \right)$$

os efeitos desta solução está representado na parte superior da figura 13, este modo de polarização é chamado de polarização “mais” (COSTA, 2002) (em inglês, plus polarization (BRAND;

BROECK,)) ou polarização +.

O segundo estado de polarização é quando a perturbação da métrica tem $A_{xy} = A_{xy}^{TT} \neq 0$ e $A_{xx} = A_{xx}^{TT} = 0$. Neste caso a solução de ξ^x e ξ^y se reduz a

$$\xi^x = L \cos(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin(\theta) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^y = L \sin(\theta) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos(\theta) \cos(\omega t)$$

Podemos redefinir novos eixos x' e y' que corresponderão a uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$ nos eixos x e y , de modo que as soluções serão então

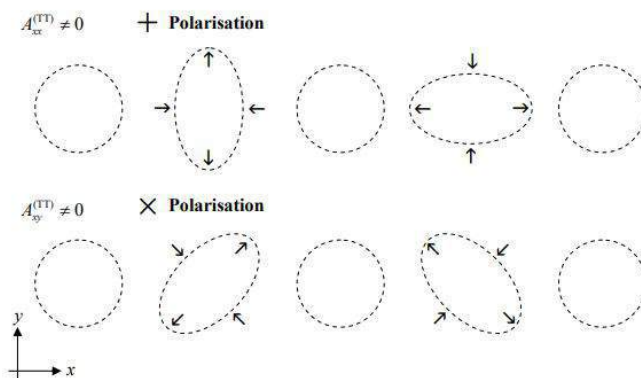
$$\xi^{x'} = L \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} L A_{xy} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t)$$

e

$$\xi^{y'} = L \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} L A_{xy} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t)$$

os efeitos desta solução está representado na parte inferior da figura 13, este modo de polarização é chamado de polarização “xis”(COSTA, 2002) (em inglês, cross polarization(BRAND; BROECK,)) ou polarização \times .

Figura 13 – Efeito da onda gravitacional em um anel de partículas de teste



Fonte: Martin H.

Lembrando que existe superposição linear na aproximação que estamos usando, então po-

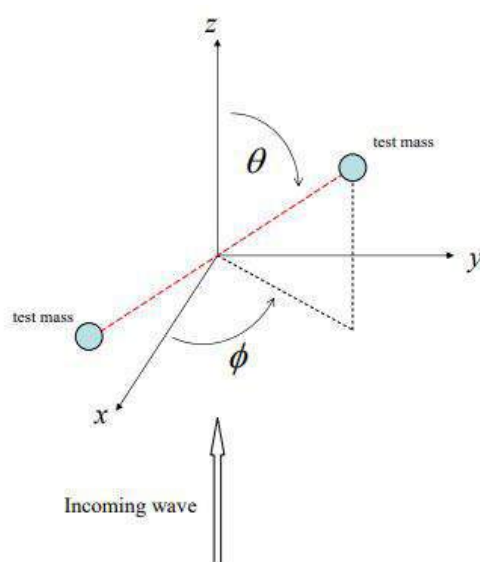
demostremos afirmar que a forma da polarização resultante é uma combinação linear das duas polarizações.

Mas, é claro que, em geral, as ondas não estão alinhadas com o detector. Então o detector “enxerga” as amplitudes da onda, segundo (HENDRY, 2007), como

$$h_+ = h \sin^2(\theta) \cos(2\phi) \quad \text{e} \quad \bar{h}_\times = h \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \quad (6.35)$$

Conforme figura 14, para uma onda gravitacional viajando na direção $+z$, o detector estará alinhado conforme os ângulos polares esféricos θ e ϕ .

Figura 14 – Orientações relativas do detector e a direção de propagação da onda (Incoming wave)



Fonte: Martin H.

Além disso, a partir destas análises é possível também calcular as dimensões típicas da amplitude da onda gravitacional, que segundo (HENDRY, 2007), é da ordem de $10^{-21} m$.

Note que a onda eletromagnética também tem dois estados de polarização, chamados de polarização Linear e polarização elíptica (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982), contudo na onda gravitacional os estados de polarização $+$ e \times são invariantes perante uma rotação de 180° , já na radiação eletromagnética há uma invariância sob uma rotação de 360° (COSTA, 2002) e como vimos o efeito da polarização tensorial das ondas gravitacionais são mais complexas do que a polarização linear das ondas eletromagnéticas. (CATTANI, 2010)

As ondas gravitacionais foram finalmente detectadas em 14 de setembro de 2015, nos EUA, em dois interferômetros distintos (um localizado em Hanford e o segundo em Livingston), denominados LIGO (do inglês Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), evento chamado de GW150914, comprovando experimentalmente então toda a teoria feita por Albert Einstein (ABBOTT et al., 2016) (BASSALO; CATTANI, 2016).

7 CONCLUSÃO

Podemos concluir que com o presente trabalho de conclusão de curso e toda revisão de literatura realizada é possível o estudo de espaço curvo gerais que são válidos em qualquer referencial e a construção de toda álgebra tensorial necessária para a construção da teoria de relatividade geral proposta por Albert Einstein. Este espaço curvo é definido pelo tensor métrico g_{ij} , que está ligado a geometria do espaço tempo. Além disso, percebemos que dependendo da lei de transformação podemos definir um vetor e que quando trabalhamos com espaços curvos perdemos a transformação tensorial, com isso devemos construir uma nova derivada que preserve o caráter vetorial na transformação de coordenadas, isto é, a derivada covariante, e assim não ocorre alteração com uma mudança de coordenadas. Por outro lado, o transporte paralelo de um vetor depende também da curvatura e quando este é realizado não podemos alterar as características do vetor ao longo de sua trajetória pelo espaço, com isso foi construído toda a matemática necessária para alcançar tal objetivo e assim ter a base para a construção da relatividade geral e a partir dos seus postulados chegarmos na equação de campo da relatividade geral de Einstein. Com isso e a partir da Linearização da relatividade geral alcançamos nosso objetivo de mostrar a existência das ondas gravitacionais e suas características, realizando ainda uma analogia com as ondas eletromagnéticas. Este trabalho é uma revisão útil e bastante benéfico para futuros estudantes do estudo da gravitação, pois estabelece uma base conceitual concisa e técnica sobre esta área, principalmente com uma grande motivação que foi a primeira detecção em 14 de setembro de 2015, nos EUA, no LIGO, entre outras detecções que ocorreram posteriormente.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. Detecção de ondas gravitacionais. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 33, n. 3, p. 879–895, dez 2016.
- BRAND, J. F. J. V. D.; BROECK, C. V. D. *General Relativity and Gravitational Waves*. Disponível em: <<https://www.nikhef.nl/jo/>>.
- CATTANI, M. Gravitational waves i: Basic emission equations. *ArXiv e-prints*, jan. 2010.
- COSTA, C. A. *Modelagem matemática do comportamento mecânico do detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg*. Dissertação (Mestrado) — INPE, 2002.
- FLANAGAN, E. E.; HUGHES, S. A. The basics of gravitational wave theory. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 204, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/7/i=1/a=204>>.
- FRONSDAL, C. On the theory of higher spin fields. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, v. 9, n. 2, p. 416–443, Sep 1958. ISSN 1827-6121. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02747684>>.
- HENDRY, M. An introduction to general relativity, gravitational waves and detection principles. *Second VESF School on Gravitational Waves*, 2007.
- LAMMERZAHN, C.; PERLICK, V. *Gravitational waves*. 2014.
- LORENCI, V. d. Programa mínimo de cosmologia. In: _____. (S.l.: s.n), 2010. cap. 1, p. 5–75.
- MACEDO, R. P. *A emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não linear*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo (USP), 2011. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-31032011-120147/>>.
- MACHADO, K. D. *Teoria do Eletromagnetismo*. (S.l.: s.n), 2006.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology, and Physics*. A. Hilger, 1990. (Graduate student series in physics). ISBN 0852740956,9780852740958,0852740948,9780852740941,9780585309972. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=CB8D747F8E524461C4C18B71F5173DA9>>.
- NETO, J. B. *Matemática para Físicos com aplicações: Vetores, Tensores e Spinors*. 1. ed. (S.l.): LF, 2009.
- REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3. ed. (S.l.: s.n), 1982.

SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. (S.l.: s.n), 2009.

WEBER, F. *Introdução a relatividade geral e a física de estrelas compactas*. (S.l.: s.n), 2015. ISBN 9788578613327.