

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
BACHARELADO FÍSICA

CARLOS IVAN FALCÃO FEHLBERG

**ESTUDO DA DINÂMICA DE GALÁXIAS
USANDO MECÂNICA DE FLUIDOS**

Cariacica

2021

CARLOS IVAN FALCÃO FEHLBERG

**ESTUDO DA DINÂMICA DE GALÁXIAS
USANDO MECÂNICA DE FLUIDOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Bacharelado Física do Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Wesley Spalenza

Cariacica

2021

(Biblioteca do *Campus* Cariacica do Instituto Federal do Espírito Santo)

F296e Fehlberg, Carlos Ivan Falcão.

Estudo da dinâmica de galáxias usando mecânica de fluidos / Carlos Ivan Falcão Fehlberg – 2021.

62 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Wesley Spalenza.

Monografia (graduação) – Instituto Federal do Espírito Santo, Curso de Bacharelado em Física, 2021.

1. Via Láctea. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Gravitação Newtoniana. I. Spalenza, Wesley. II. Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Cariacica. III. Título.

CDD: 532

CARLOS IVAN FALCÃO FEHLBERG

ESTUDO DA DINÂMICA DE GALÁXIAS USANDO MECÂNICA DE FLUIDOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenadoria do Curso de Bacharelado Físicado
Instituto Federal do Espírito Santo, como requisito
parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovado em 31 de maio de 2021.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Wesley Spalenza
Instituto Federal do Espírito Santo- *campus* Cariacica
Orientador

Prof. Dr. Filipe Leoncio Braga
Instituto Federal do Espírito Santo- *campus* Cariacica

Prof. Dr. Luiz Otávio Buffon
Instituto Federal do Espírito Santo- *campus* Cariacica

Prof. Dr. Judismar Tadeu Guaitolini Junior
Instituto Federal do Espírito Santo - *campus* Vitória



Emitido em 31/05/2021

FOLHA DE APROVAÇÃO-TCC Nº FOLHA_ROSTO_TCC_FEHLBERG/2021 - CAR-CCLF
(11.02.19.01.08.03.01)
(Nº do Documento: 1)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 28/06/2021 09:32)

FILIFE LEONCIO BRAGA

PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO

CAR-CCLF (11.02.19.01.08.03.01)

Matrícula: 1918989

(Assinado digitalmente em 28/06/2021 10:00)

JUDISMAR TADEU GUAITOLINI JUNIOR

PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO

VIT-CF (11.02.35.01.09.02.04)

Matrícula: 1934200

(Assinado digitalmente em 28/06/2021 11:15)

LUIZ OTAVIO BUFFON

PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO

CAR-CCLF (11.02.19.01.08.03.01)

Matrícula: 1315512

(Assinado digitalmente em 28/06/2021 09:36)

WESLEY SPALENZA

PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO

CAR-CCLF (11.02.19.01.08.03.01)

Matrícula: 1556305

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ifes.edu.br/documentos/> informando seu número: **1**, ano: **2021**, tipo: **FOLHA DE APROVAÇÃO-TCC**, data de emissão: **28/06/2021** e o código de verificação: **503656fb0e**

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Declaro, para fins de pesquisa acadêmica, didática e técnico-científica, que o presente Trabalho de Conclusão de Curso pode ser parcialmente utilizado desde que se faça referência à fonte e aos autores.

Cariacica, em 31 de maio de 2021

Carlos Ivan Falcão Fehlberg

Wesley Spalenza

A Deus, pois buscando Teu Reino e Tua Justiça, todas as coisas me foram acrescentadas

RESUMO

O presente trabalho visa contribuir para o estudo da Dinâmica da Via Láctea. Utilizando como modelo de gravitação a Gravitação Newtoniana e como modelo dinâmico a Mecânica de Fluidos, foram criados modelos astrofísicos de massa e densidade. Buscou-se construir modelos que seguissem determinadas condições, como a massa enclausurada até 15 kpc e o perfil nucleado da distribuição de matéria. Foram então construídos dois grandes modelos, um de órbitas simples e um de equilíbrio hidrostático. A solução e comparação entre eles determinou alguns parâmetros e permitiu algumas interpretações sobre a dinâmica da Via Láctea. Obtivemos perfis nucleados com uma massa de aproximadamente $1,45 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. Damos os primeiros passos em um modelo que considere tanto a pressão como a velocidade, mas não construímos suas soluções. Ficam para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Via Láctea, Mecânica de Fluidos, Gravitação Newtoniana

ABSTRACT

The present work aims to contribute to the study of the Milky Way Dynamics. Using Newtonian Gravitation as a gravity model and Fluid Mechanics as a dynamic model, astrophysical models of mass and density were created. We sought to build models that followed certain conditions, such as the enclosed mass up to 15 kpc and the nucleated profile of the matter distribution. Two large models were then built, one with simple orbits and one with hydrostatic equilibrium. The solution and comparison between them determined some parameters and allowed some interpretations about the dynamics of the Milky Way. We obtained nucleated profiles with a mass of approximately $1,45 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. We took the first steps in a model that considers both pressure and velocity, but we did not build its solutions. They stay for future work.

Keywords: Milky Way, Fluid Mechanics, Newtonian Gravitation

LISTA DE FIGURAS

Figura 1–	Vista lateral da Via Láctea	11
Figura 2–	Curva de Rotação	12
Figura 3–	Força gravitacional entre duas partículas	17
Figura 4–	Campo gravitacional de uma massa infinitesimal	18
Figura 5–	Ascensão reta e declinação	35
Figura 6–	Paralaxe	36
Figura 7–	Órbita de uma estrela	37
Figura 8–	Curva de Rotação, com spline	38
Figura 9–	Resultados para órbita esférica	45
Figura 10–	Órbita esférica com modelo	48
Figura 11–	Equação de Lane-Emden	50
Figura 12–	Equação de Emden-Chandrasekhar	51
Figura 13–	Massa em função da densidade, caso de Lane-Emden	54
Figura 14–	Massa em função da pressão, caso de Lane-Emden	55
Figura 15–	Massa, caso de Emden-Chandrasekhar	56
Figura 16–	Perfis de densidade	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	GRAVITAÇÃO NEWTONIANA	15
2.1	LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL	16
2.2	TEOREMA DE HELMHOLTZ	19
2.3	POTENCIAL GRAVITACIONAL	20
2.4	EQUAÇÃO DE POISSON	20
3	MECÂNICA DOS FLUIDOS	22
3.1	PROPRIEDADES EXTENSIVAS E INTENSIVAS	22
3.2	LEIS DE CONSERVAÇÃO	23
3.3	TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS	24
3.4	TEOREMA DA DIVERGÊNCIA	25
3.5	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	27
4	MÉTODOS NUMÉRICOS	29
4.1	MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO POR SPLINE CÚBICA	29
4.2	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	31
4.3	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	32
5	COLETA DE DADOS	35
5.1	ASTROMETRIA	35
5.2	ASTROMETRIA NA GALÁXIA	37
5.3	CURVA DE ROTAÇÃO	37

5.4	UNIDADES DE MEDIDA	38
6	MODELOS ASTROFÍSICOS DE MASSA E DENSIDADE	40
6.1	ÓRBITAS COM SIMETRIA ESFÉRICA	40
6.1.1	Curva de Rotação Kepleriana	41
6.1.2	Curva de Rotação de Corpo Rígido	42
6.1.3	Curva de Rotação Plana	43
6.1.4	Curva de Rotação Observada	44
6.2	EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO	47
6.3	GÁS EM ROTAÇÃO	53
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
7.1	VALORES DA MASSA	58
7.2	PERFIS DE DENSIDADE	59
7.3	INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS	59
7.4	PESRPECTIVAS	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos mais remotos a humanidade insiste em olhar para o Céu, para a Terra e tentar explicá-los. Cada povo vendo do seu jeito e buscando suas relações, causas e efeitos, tem a relação com o Céu como algo marcante em sua cultura. Seus deuses, suas tradições, suas práticas cotidianas, tudo baseado em como enxergavam o Céu, sua beleza e seu movimento (KEPLER; SARAIVA, 2014).

Em meio a tantas formas de enxergar e explicar o Céu, uma se destacou e ganhou renome no Ocidente, graças à sua base tida como racional, que, à primeira vista, prezava pela primazia das observações sobre as ideias e concepções. Essa é a maneira científica de observar, descrever e explicar o Céu.

Dessa narrativa científica, surgem campos da Ciência dedicados ao Céu, ao Universo e afins: Astronomia, Astrofísica, Cosmologia. Algumas visões do Céu, entretanto, não acompanham o caminhar da Ciência, como a Astrologia. Com o desenvolvimento das teorias que descrevem o movimento e o avanço das técnicas observacionais, muitas teorias sobre o Universo foram corroboradas, como as Leis de Kepler, tantas outras derrubadas, como a ideia de um Universo estático, e muitos novos problemas foram postos em aberto.

Dentre os objetos vistos no Céu e, portanto, estudados por essas Ciências, está nossa galáxia. A Via Láctea (Caminho de Leite) recebeu esse nome dos gregos porque aparecia no Céu como uma grande faixa leitosa. Em outras culturas recebeu nomes como *Tapi'ir Rapé* (Caminho da Anta) ou *Camino de Santiago* (Caminho de Santiago). Mas todas as culturas viam essa mancha adornando o céu.

Galileu¹ foi o primeiro a observar a Via Láctea com um telescópio e afirmar que era um conjunto de estrelas. A partir daí Herschel² determinou sua forma achatada e Kapteyn³ e Shapley⁴ no século XX, 400 anos depois de Galileu, determinaram seu tamanho e a nossa posição nela

¹Galileu Galilei (Itália, 1564 - 1642)

²William Herschel (Alemanha, 1738 - Reino Unido, 1822)

³Jacobus Cornelius Kapteyn (Países Baixos, 1851 - 1922)

⁴Harlow Shapley (Estados Unidos da América, 1885 - 1972)

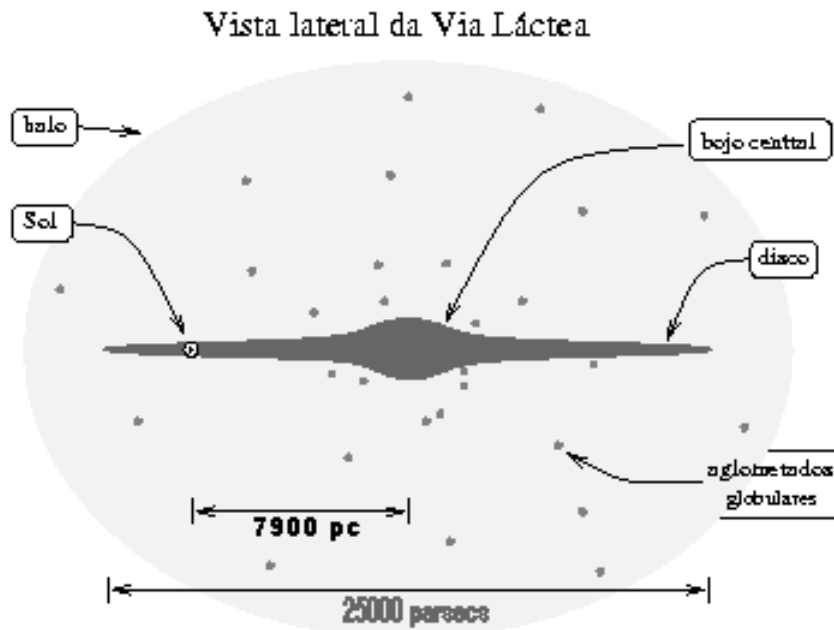


Figura 1 – Vista lateral da Via Láctea indicando os elementos que a constituem: disco, bojo central, halo de aglomerados e matéria escura

Fonte: (KEPLER; SARAIVA, 2014)

(KEPLER; SARAIVA, 2014).

A forma da Via Láctea é a de uma galáxia espiral, ou seja, com braços espirais bem definidos. Entre os braços há matéria difusa e esse conjunto forma o que chamamos de disco galáctico, achatado e com $30kpc$ de diâmetro. No centro do disco há um núcleo, incluindo um provável buraco negro, imerso num bojo, possivelmente em forma de barra. Tudo isso está imerso em um halo de aglomerados e, principalmente, matéria escura, que se estende até $100kpc$ (KEPLER; SARAIVA, 2014). Uma vista lateral do que foi descrito é dada na Figura 1.

Com os avanços nas técnicas observacionais, foi possível detectar a rotação das galáxias e seu movimento em aglomerados. Observa-se em geral, inclusive na nossa galáxia, uma rotação diferencial, ou seja, que não de corpo rígido. Uma possível representação desse movimento é uma curva de rotação da Via Láctea, onde a velocidade é apresentada como uma função da distância ao centro. Essa velocidade, em geral, é uma componente tangencial (HERNÁNDEZ-ARBOLEDA; RODRIGUES, 2021; SOFUE; RUBIN, 2001). Um exemplo de curva de rotação, a utilizada neste trabalho, é apresentada na Figura 2.

Além disso, usando a luminosidade que era captada das galáxias para determinar sua massa e, a partir dessa massa, calcular a curva de rotação, encontravam-se inconsistências. A luminosidade apontava para uma velocidade muito menor que a medida e que diminuía com o

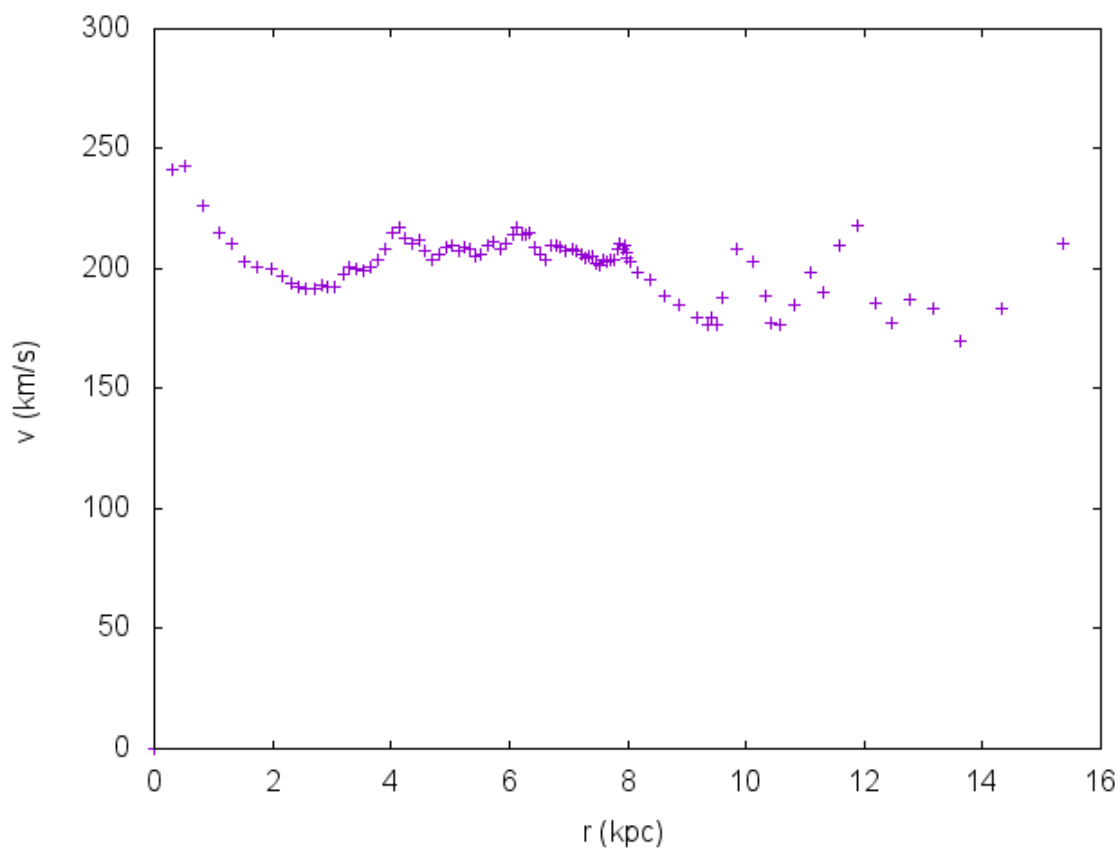


Figura 2 – Curva de Rotação da Via Láctea medida pelo Observatório VERA, no Japão. O eixo vertical representa a velocidade circular relativa ao centro do disco galáctico enquanto o eixo horizontal representa a distância do ponto em questão a tal centro.

Fonte: (SOFUE, 2012)

afastamento do centro (HERNÁNDEZ-ARBOLEDA; RODRIGUES, 2021).

Através do estudo desses movimentos surgiu a hipótese da matéria escura, levantada por Zwicky⁵ para aglomerados e Vera Rubin⁶ para galáxias individuais, um componente abundante nas estruturas presentes no Universo, responsável pela maior parte da atração gravitacional nestas e, portanto, pelo formato e escala da curva de rotação (KEPLER; SARAIVA, 2014; HERNÁNDEZ-ARBOLEDA; RODRIGUES, 2021).

De análises mais profundas do comportamento dessa matéria escura, chegou-se então ao (quase) consenso do modelo da matéria escura fria (*CDM*, do inglês *Cold Dark Matter*), um dos componentes do Modelo Padrão da Cosmologia. Os outros componentes são a matéria usual e a energia escura (representada pela constante cosmológica Λ), integrados em um fluido descrito pela Relatividade Geral. Esse modelo recebe o nome de Modelo Λ CDM (KEPLER; SARAIVA, 2014). Dentro do paradigma atual da Cosmologia, tem-se obtidos grandes avanços na descrição da estrutura do Universo, porém com alguns problemas ainda em aberto.

Por exemplo, através da comparação entre resultados do Modelo Padrão e observações, surgiu outro problema: a distribuição de matéria escura prevista pelas simulações do modelo não coincidia com a observada (HERNÁNDEZ-ARBOLEDA; RODRIGUES, 2021). No presente trabalho, a partir de curvas de rotação da Via Láctea e usando o ferramental da Dinâmica de Fluidos analisaremos modelos de distribuição da matéria na galáxia, composta principalmente por matéria escura, para elucidar elementos sobre a dinâmica da Via Láctea.

O trabalho ficou organizado da seguinte forma: No Capítulo 1 vamos apresentar o modelo de Gravitação que vamos utilizar. Vamos justificar a possibilidade de não se usar Relatividade Geral e, partindo da Lei da Gravitação Universal de Newton, construir a Equação de Poisson para a Gravidade, que será efetivamente usada em nosso modelo; Seguimos no Capítulo 2 formulando a Dinâmica de Fluidos como nosso modelo dinâmico. Primeiro vamos novamente justificar tal aplicação e depois vamos escrever as Leis de Conservação na forma de equações diferenciais. Explicitaremos ainda o modelo de equação constitutiva que pensamos usar; No Capítulo 3 construímos algumas ferramentas de Análise Numérica que utilizaremos para trabalhar com os modelos construídos. Utilizaremos Interpolação por Spline Cúbica para ajustar os dados a uma grade regular, Diferenças Finitas para modelar as equações diferenciais que utilizamos e Mínimos Quadrados para aproximar os resultados por funções bem conhecidas; Discutimos no Capítulo 4 a origem dos dados utilizados ao longo do trabalho. Passando tanto por uma visão mais ampla sobre observação até a utilização específica na coleta dos dados; No Capítulo 5 efetivamente implementamos os modelos. As equações, métodos e dados descritos

⁵Fritz Zwicky (Bulgária, 1898 - Estados Unidos da América, 1974)

⁶Vera Cooper Rubin (Estados Unidos da América, 1928 - 2016)

ao longo dos capítulos anteriores vão sendo utilizados para obter alguns resultados, puramente teóricos ou baseados em observações, sobre a dinâmica da nossa Galáxia; Finalizamos o Capítulo 6 resumindo os resultados e fazendo uma análise comparativa destes, buscando também comparações com outros trabalhos presentes na literatura. Interpretamos esses resultados e buscamos direcionar possíveis próximos passos.

2 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

O estudo das estruturas cosmológicas e astrofísicas depende da formulação de uma teoria da gravidade. Na Cosmologia e em muitos casos da Astrofísica a teoria de gravidade padrão é a Relatividade Geral, desenvolvida por Einstein ¹. Entretanto, em alguns casos a Gravitação Universal, formulada por Newton ² e desenvolvida por outros, produz bons frutos.

A nível cosmológico, uma Cosmologia Newtoniana pode ser desenvolvida utilizando-se a Equação de Poisson e as equações para um fluido, da forma clássica, sem pressão (MILNE, 1934; MCCREA; MILNE, 1934; FABRIS; VELTEN, 2012; KEPLER; SARAIVA, 2014). A inserção da pressão de forma coerente com resultados da Relatividade Geral é parte da alteração chamada de Cosmologia Neo-Newtoniana (MCCREA, 1951; HARRISON, 1965; FABRIS; VELTEN, 2012). Em ambos os casos, resultados localmente idênticos aos da Cosmologia Relativista são obtidos.

A nível astrofísico, por meio da análise do chamado limite newtoniano da Relatividade Geral, observamos que o potencial gravitacional clássico só gera efeitos relativísticos em ordens de grandeza muito acima de boa parte dos objetos astrofísicos e, por isso, uma descrição newtoniana produz bons resultados, sendo largamente utilizada, por exemplo, em galáxias (RYDER, 2020; BINNEY; TREMAINE, 2008). Como uma primeira correção relativística podemos citar os termos advindos do fenômeno do gravitomagnetismo, que podem trazer alterações significativas à dinâmica galáctica (LUDWIG, 2021).

Vamos, portanto, utilizar a Teoria da Gravitação Universal como formulação da gravidade em nosso problema, partindo de uma formulação em termos de força entre massas pontuais até chegar a uma equação mais geral, a equação de Poisson (THORNTON; MARION, 2011; CLARKE; CARSWELL, 2007; BINNEY; TREMAINE, 2008). Nesse sentido, será uma teoria estritamente newtoniana. Termos corretivos, como pressão, serão adicionados via Mecânica de Fluidos apenas, sem correção relativística, no próximo capítulo.

¹Albert Einstein (Alemanha, 1879 - EUA, 1955)

²Sir Isaac Newton (Reino Unido, 1642 - 1727)

2.1 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

O que chamamos de Gravitação Newtoniana aqui é a teoria da gravidade como entendida e proposta por Newton a partir de sua Lei da Gravitação Universal. A partir de estudos de Galileu, Kepler³ e muitos outros, Newton desenvolveu sua teoria do movimento, a Mecânica Newtoniana, e sua teoria da gravidade, a Lei da Gravitação Universal. Em termos mais modernos, a Lei da Gravitação Universal pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{1,2} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (2.1)$$

tal que $\vec{F}_{1,2}$ é a força sentida por 2 e causada por 1, m_1 e m_2 representam as massas de cada partícula e \vec{r}_1 e \vec{r}_2 suas posições. Nesse caso, 1 e 2 são massas pontuais. Veja a Figura 3. Aparece ainda G , a Constante de Gravitação Universal, proposta por Newton e com primeiras medidas feitas por Cavendish⁴. Assim sendo, a Lei da Gravitação Universal surge como uma descrição da interação entre duas massas pontuais, não tendo em si nada de fundamental. A Gravitação Newtoniana em termos fundamentais deve ser descrita por uma equação diferencial parcial que envolva um termo para a interação e um termo para a(s) massa(s).

Como a expressão 2.1 depende das duas massas envolvidas, podemos começar buscando usar o conceito de campo, ou seja, analisar como uma massa qualquer interage com uma massa em específico que gera o campo. Isso pode ser feito por meio da expressão

$$\vec{g} = -Gm' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.2)$$

para o campo gravitacional, que se relaciona com a anterior por meio de

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (2.3)$$

Os índices numéricos, representativos das partículas, foram substituídos por referências à posição da massa geradora do campo (com linha) e à posição onde o campo é medido (sem linha). Tal notação será usada a partir de agora. Temos então uma lei para o campo gravitacional, mas esta ainda se restringe à massa pontual. Para criar distribuições contínuas de massa, tomamos como massa pontual um infinitésimo de massa, que gera um infinitésimo de campo,

³Johannes Kepler (Alemanha, 1571 - 1630)

⁴Henry Cavendish (França, 1731 - Reino Unido, 1810)

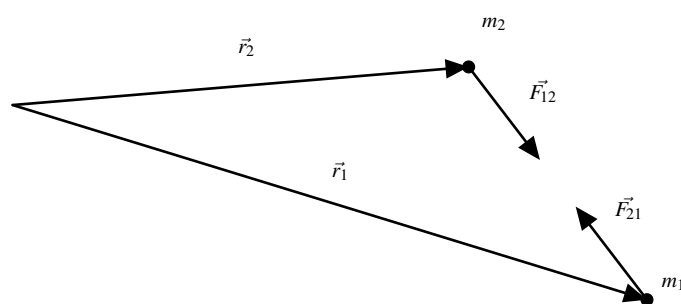


Figura 3 – Força gravitacional entre as partículas 1 e 2, com massas m_1 e m_2 e posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , respectivamente. A força que uma partícula sente aponta na direção da outra partícula, sendo ambas iguais em módulo e direção, mas opostas em sentido.

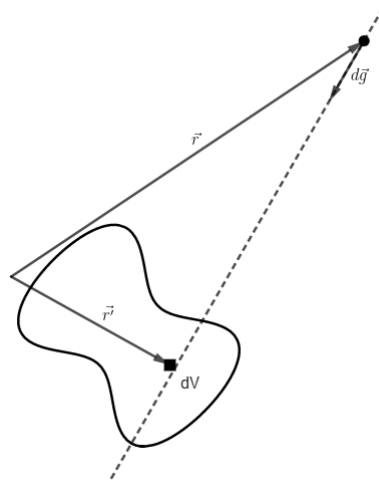


Figura 4 – Campo gravitacional gerado em um ponto gerado por um infinitésimo de massa, pertencente a uma distribuição contínua. Toma-se como infinitésimo o elemento infinitesimal de volume que, multiplicado pela densidade da distribuição, gera uma massa também infinitesimal

como em 2.2, por meio da expressão

$$d\vec{g} = -Gdm' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Tal infinitésimo de massa pode ser pensado como uma função densidade, dependente da posição da massa (com linha), multiplicando um infinitésimo de volume (também com linha). Vide Figura 4. A relação entre a massa e o volume é portanto dada por

$$dm = \rho(\vec{r}') dV',$$

ou seja,

$$d\vec{g} = -G\rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (2.4)$$

Para darmos conta de todo o corpo, descrito por essa distribuição, devemos integrar a integração do elemento dado por 2.4 em todo o volume (com linha), obtendo

$$\vec{g} = -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (2.5)$$

Nesse momento estamos usando um vetor para descrever a interação gravitacional, ou seja, temos três informações (componentes) para analisar. Podemos buscar reduzir essa quantidade de informação, sem perder a dinâmica, por meio de um artifício matemático, o Teorema de

Helmholtz⁵.

2.2 TEOREMA DE HELMHOLTZ

Podemos, através do Teorema de Helmholtz, olhar esse campo de outra maneira. Ele pode ser escrito através de um gradiente e um rotacional, ou seja,

$$\vec{g} = -\nabla\Phi + \nabla \times \vec{A}, \quad (2.6)$$

onde Φ é chamado potencial escalar e \vec{A} recebe o nome de potencial vetor. Calculando o divergente e o rotacional da expressão 2.6, vamos obter

$$\nabla \cdot \vec{g} = -\nabla \cdot \nabla\Phi + \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2\Phi, \quad (2.7)$$

e

$$\nabla \times \vec{g} = -\nabla \times \nabla\Phi + \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla \times \vec{A}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, se calcularmos o divergente e o rotacional da expressão 2.5, obteremos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{g} &= \nabla \cdot \left(-G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right), \\ &= -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla \cdot \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV', \\ &= -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV', \\ &= -4\pi G\rho(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{g} &= \nabla \times \left(-G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right), \\ &= -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla \times \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O rotacional nulo obtido em 2.10 faz com que o campo seja do tipo irrotacional. Tal campo, pelo Teorema de Helmholtz, pode ser descrito apenas por um potencial escalar, já que o rotacional se associa ao potencial vetor por meio de 2.8. Vamos em busca de tal potencial.

⁵Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (Alemanha, 1821 - 1894)

2.3 POTENCIAL GRAVITACIONAL

Queremos agora escrever o nosso campo gravitacional em termos de um campo potencial, a partir da relação

$$\vec{g} = -\nabla\Phi. \quad (2.11)$$

Devemos notar que tal processo de derivação é feito no ponto onde o campo é medido, sem linha. Ou seja, apenas o termo com linha deve conter a informação do gradiente. Desenvolvendo a partir de 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV', \\ &= G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV', \\ &= G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV', \\ &= \nabla \left(G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right), \\ &= -\nabla \left(-G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Definimos então o potencial gravitacional como sendo

$$\Phi = -G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (2.13)$$

satisfazendo a relação dada por 2.11 e o campo dado por 2.12.

2.4 EQUAÇÃO DE POISSON

Se utilizarmos as equações 2.9 e 2.7, vamos ver que podemos relacionar o potencial gravitacional dado por 2.13 à densidade da distribuição por uma equação diferencial. Fazemos isso igualando o divergente do campo calculado das duas formas, obtendo

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r}) = -\nabla^2\Phi,$$

e finalmente

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.14)$$

A equação acima é fundamental. Ela relaciona um objeto escalar que descreve a interação gravitacional com a fonte dessa interação, a massa ou, mais especificamente, a densidade de massa. Essa é uma das equações do nosso modelo. Historicamente, essa equação é chamada de Equação de Poisson⁶ para a gravidade.

⁶Siméon Denis Poisson (França, 1781 - 1840)

3 MECÂNICA DOS FLUIDOS

No capítulo anterior desenvolvemos uma equação, a Equação de Poisson, dada por 2.14, que descreve como o potencial depende de uma distribuição de matéria. Mas ainda não nos preocupamos em como a matéria se move nesse potencial. Se fôssemos analisar como uma partícula externa responde a tal potencial usaríamos as Leis de Newton de forma direta. Porém não é o caso, já que as próprias fontes de campo gravitacional também estão submetidas a ele, sejam as estrelas, a poeira ou a matéria escura. Assim, precisamos desenvolver a Mecânica de um meio contínuo. Mais especificamente, dado que o afastamento entre as estrelas é muito maior que suas dimensões, por exemplo, vamos adotar o modelo de um fluido, onde há grande liberdade de movimento relativo entre as partículas.

Essa aplicação do meio contínuo depende, na verdade, de uma suposição. Supomos que em cada ponto que analisamos há uma quantidade de partículas analisadas grande o suficiente para adotarmos a ideia de sistema contínuo. Assim, as distâncias entre partículas são maiores que suas dimensões, mas menores que as dimensões do sistema como um todo. Com essas suposições, podemos desenvolver a Mecânica dos Fluidos, ou seja, como um meio contínuo com as propriedades enunciadas responde a aplicação de forças como gravidade, pressão e viscosidade. Essa construção parte da elaboração das Leis de Conservação em termos de propriedades de uma distribuição de matéria e, com a aplicação de teoremas do cálculo vetorial, chega a equações diferenciais para o movimento do meio (ARIS, 1989; CLARKE; CARSWELL, 2007; FORTUNA, 2000; LANDAU; LIFSHITZ, 1987).

3.1 PROPRIEDADES EXTENSIVAS E INTENSIVAS

Quando passamos da Mecânica de uma partícula para a de um sistema de partículas, vamos lidar com grandezas que se aplicam ao sistema todo e grandezas que se aplicam individualmente. Por exemplo, podemos falar na massa de um sistema ou na massa de cada partícula individual. Em sistemas discretos a relação entre elas é dada por somatórios: a massa do sistema é soma da massa das partículas. Quando uma grandeza vale para o sistema como um todo

ela é dita extensiva, pois depende do tamanho do sistema. Quando estamos analisando ela em cada componente, por assim dizer, dizemos que ela é intensiva. Para o caso de sistemas contínuos, como um fluido, a relação entre uma grandeza extensiva qualquer N e a sua grandeza intensiva relacionada η é

$$N = \int_V \eta dV. \quad (3.1)$$

Como queremos fazer uma análise ponto a ponto do movimento do fluido e não uma análise do movimento do sistema (do centro de massa), estamos interessados em descrever a dinâmica do ponto de vista das grandezas intensivas, e não das extensivas. Quando fazemos essa troca, deixamos de analisar grandezas que possuem um único valor para o sistema inteiro e passamos a fazer a análise de campos, funções do tempo e da posição, que representam o valor da grandeza intensiva em cada ponto do sistema. Vejamos em especial duas propriedades extensivas e as intensivas relacionadas. A primeira delas é a massa, com sua já conhecida densidade de massa (massa específica ou simplesmente densidade)

$$M = \int_V \rho dV. \quad (3.2)$$

A integral representa a massa do sistema, integrada em todo seu volume. O integrando representa a densidade de massa, que varia em cada ponto e a cada instante. A segunda grandeza é o momento linear, que inclui a densidade de massa e um termo de velocidade, na forma

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{v} dV. \quad (3.3)$$

A integral nesse caso é o momento linear total, ou do centro de massa. Já o integrando é a densidade de massa em cada ponto multiplicado pela velocidade do fluido naquele mesmo ponto. Para encontrar as leis da dinâmica das propriedades intensivas (densidade e velocidade), precisamos partir das leis da dinâmica das extensivas, que vamos tomar da Mecânica de uma partícula.

3.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO

As leis da Física podem, em geral, ser escritas na forma de leis de conservação, buscando grandezas que não se alteram no tempo ou que se alteram quando há algum fator externo. Tais leis são representadas através de derivadas temporais totais que se anulam ou se igualam às causas de sua variação, tomando uma forma do tipo

$$\frac{d}{dt}N = S. \quad (3.4)$$

O fluxo S é uma propriedade extensiva, que gera a variação da propriedade, também extensiva, N . Porém esse fluxo pode se distribuir ao longo de todo o sistema ou apenas em sua fronteira, sua superfície externa. Para dar conta de ambos os casos escrevemos

$$S = \int_V s_v dV + \oint_{\partial V} s_a dA, \quad (3.5)$$

onde dA é um elemento infinitesimal da superfície fechada ∂V que engloba o volume V . Como estamos em um regime clássico, usaremos a formulação clássica das leis de conservação da massa e do momento linear, quais sejam

$$\frac{d}{dt}M = 0, \quad (3.6)$$

e

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}, \quad (3.7)$$

onde 3.6 diz que a massa do sistema não varia ao longo do tempo e 3.7 a Segunda Lei de Newton, dizendo que a variação do momento linear do sistema é causada pelas forças que sobre ele atuam.

3.3 TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

Para aplicarmos leis de conservação da forma 3.4 à grandezas extensivas em meios contínuos, precisamos calcular derivadas de integrais da forma 3.1. Esse cálculo é feito por meio de um teorema conhecido, para o caso de um volume se deslocando, como Teorema do Transporte de Reynolds¹, uma generalização da regra de integral de Leibniz². Escrito em termos da derivada de 3.1, o teorema é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N &= \frac{d}{dt} \int_V \eta dV, \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \eta dV + \oint_{\partial V} \eta (\vec{v} \cdot d\vec{A}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

¹Osborne Reynolds (Reino Unido, 1842 - 1912)

²Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemanha, 1646 - 1716)

O elemento vetorial $d\vec{A}$ é obtido incluindo no elemento infinitesimal de superfície o vetor normal à tal superfície. Aplicando o teorema 3.8 na equação da conservação da massa, 3.6, por meio da definição 3.2, obtemos

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV + \oint_{\partial V} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0. \quad (3.9)$$

Já no caso da equação do momento, 3.7, temos um fluxo, nesse caso a força externa. Aplicando portanto 3.8 por meio de 3.3 e usando 3.5 para descrever a força externa, ficamos com

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v})(\vec{v} \cdot d\vec{A}) = \int_V \vec{f}_v dV + \oint_{\partial V} \vec{f}_a dA, \quad (3.10)$$

onde o termo \vec{f}_v representa as forças que se distribuem pelo interior do sistema, chamadas forças de volume ou forças de corpo, e \vec{f}_a as forças que se distribuem apenas pelo seu contorno, as forças de superfície.

3.4 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Nas formas dadas por 3.9 e 3.10, as leis de conservação ainda nos trazem alguns problemas, relativos tanto a seu significado, por envolverem volumes e não serem ponto a ponto, quanto por sua formulação em termos de integrais de volume e de superfície. Para resolver o segundo problema, utilizamos o Teorema da Divergência, enunciado como

$$\oint_{\partial V} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV. \quad (3.11)$$

Esse teorema, também conhecido como Teorema de Gauss ³, relaciona a integral em uma superfície fechada com uma outra, calculada no volume por ela envolto. Precisaremos considerar duas outras formas de se escrever o teorema. A primeira delas considera um vetor multiplicado por um escalar, de dedução direta a partir de 3.11, como se segue:

$$\oint_{\partial V} \eta \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot (\eta \vec{u}) dV = \int_V [\eta (\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \eta] dV. \quad (3.12)$$

A partir da generalização em 3.12 podemos trocar o escalar por outra quantidade vetorial, por exemplo, nos utilizando da mesma estrutura, resultando em

³Johann Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777 - 1855)

$$\oint_{\partial V} \vec{w} (\vec{u} \cdot d\vec{A}) = \int_V [\vec{w}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w}] dV. \quad (3.13)$$

Agora vamos aplicar o teorema às leis de conservação. Primeiro aplicamos ele na forma 3.12 à 3.9, resultando em

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV + \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV, \\ &= \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e de onde podemos resolver o outro problema que enunciamos: o fato de não ser uma lei ponto a ponto. Podemos assumir que 3.14 se anula em volumes arbitrários e, portanto, seu integrando é nulo em todos os pontos. Com isso, ficamos com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.15)$$

uma equação diferencial parcial que representa a conservação da massa em cada ponto. Ela é mais uma das equações que serão efetivamente utilizadas na construção dos modelos e é conhecida muitas vezes como Equação da Continuidade. Para aplicar o teorema da divergência em 3.10 vamos ter que utilizar a forma 3.13 do lado esquerdo, ficando com

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot d\vec{A}) \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) dV + \int_V [(\rho \vec{v}) (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla) (\rho \vec{v})] dV \\ &= \int_V \left[\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho \right) + \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \right] dV \\ &= \int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) dV = \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

O termo entre parênteses que multiplica \vec{v} é justamente a Equação da Continuidade, sendo, portanto, nulo. Agora, olhando para o lado direito da equação 3.10 vemos que o termo das forças de superfície não possui uma condição para a aplicação do teorema: o elemento infinitesimal de superfície não inclui o vetor normal. Para resolver isso, definimos o tensor de tensões, que se relaciona com as forças de superfície por meio de

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{n} = \vec{f}_a.$$

Esse novo elemento, o tensor, representa um objeto mais abrangente que o vetor, mas a aplicação do teorema é feita diretamente na forma 3.11. Nesse caso, o tensor de tensões acomoda toda a informação necessária para descobrirmos a força em qualquer superfície em um determinado ponto. Assim ficamos com

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_V \vec{f}_v dV + \oint_{\partial V} \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}, \\ &= \int_V \vec{f}_v dV + \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} dV, \\ &= \int_V (\vec{f}_v + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}) dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Igualando 3.16 a 3.17 e fazendo com que a igualdade valha em um volume arbitrário, para fazer a lei valer ponto a ponto, obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f}_v + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}. \quad (3.18)$$

Essa é a chamada Equação de Cauchy, um versão generalizada da Conservação do Momento Linear em meios contínuos. A caracterização do problema se dá definindo quem são os termos de força de corpo e de superfície, no caso o tensor de tensões, por meio de equações constitutivas.

3.5 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

A equação 3.18 é a mais geral possível, mas não diz muito sobre nosso problema em específico. Iremos agora, portanto, dar as equações constitutivas das nossas forças.

Vamos primeiro nos ater à força de corpo \vec{f}_v . No nosso caso, é a força gravitacional. Vamos pensar nela agora de outra forma: através da relação 2.3, definimos o campo gravitacional e descobrimos como uma distribuição de massa gera tal campo. Agora precisamos aprender como tal campo atua numa distribuição de massa. Para isso, vamos utilizar a relação entre propriedades extensivas e intensivas dada por 3.1 e escrever

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{g} dV.$$

Por comparação com 3.5, vamos determinar que

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g} = -\rho \nabla \Phi, \quad (3.19)$$

onde ainda utilizamos 2.11. Para o tensor, vamos utilizar somente uma componente de pressão, na forma

$$\overleftrightarrow{T} = -p \overleftrightarrow{I},$$

cujo divergente é

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = -\nabla p. \quad (3.20)$$

Pode parecer um trabalho extra definir a pressão p por meio do tensor de tensões, porém isso traz a vantagem de permitir a interpretação correta da pressão como uma força de superfície, além de deixar em aberto a possibilidade de o tensor de tensões conter outras componentes, como de viscosidade. Em nosso trabalho não faremos tais adições, porém é válido que façamos uso desse formalismo, abrindo essa possibilidade.

Utilizando 3.19 e 3.20 em 3.18, obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\rho \nabla \Phi - \nabla p. \quad (3.21)$$

Essa é a forma da equação de conservação de momento que entrará efetivamente na construção de nosso modelo e sobre a qual faremos nossas suposições, especialmente sobre o termo de pressão. Essa versão difere ligeiramente da forma padrão, mas ainda podemos chamá-la de Equação de Navier⁴-Stokes⁵. Assim como a Equação de Cauchy, ela é uma aplicação da conservação do momento a meios contínuos, porém dessa vez já considerando especificidades das equações constitutivas.

⁴Claude Louis Marie Henri Navier (França, 10 de fevereiro de 1785 — 21 de agosto de 1836)

⁵George Gabriel Stokes (Reino Unido, 13 de agosto de 1819 — 1 de fevereiro de 1903)

4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os modelos que construiremos e os dados que possuímos não são necessariamente trabalháveis analiticamente. Para podermos juntar as peças do quebra-cabeça teremos que usar métodos numéricos que aproximam as soluções analíticas. Estes serão implementados computacionalmente por meio da linguagem Fortran90. Passaremos agora à descrição de tais métodos numéricos (FORTUNA, 2000; BURDEN; FAIRES, 2005; STRIKWERDA, 2004; ISAACSON; KELLER, 1996; EVANS, 1998).

4.1 MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO POR SPLINE CÚBICA

Métodos de interpolação são usados quando temos um conjunto de dados representando uma função da qual não sabemos a expressão mas queremos operar. Para isso, aproximamos a função com polinômios, normalmente. No caso da spline cúbica, aproximamos com um polinômio de terceiro grau entre cada par de pontos.

Dada uma série de $n + 1$ pontos (x_i, y_i) , pertencentes a uma função $f(x)$, o método consiste em construir uma função

$$S : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3, & x \in [x_0, x_1] \\ \vdots \\ S_i(x) = a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3, & x \in]x_{i-1}, x_i] \\ \vdots \\ S_n(x) = a_n + b_nx + c_nx^2 + d_nx^3, & x \in]x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (4.1)$$

que satisfaça, para os pontos internos, condições de continuidade da função e suas duas primeiras derivadas, além da coincidência entre a função e os dados. Tais condições dão à nossa

interpolação uma precisão e suavidade maiores, e são dadas por

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S_i(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S_{i+1}(x) = S(x_i) = y_i, \quad (4.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S_i'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S_{i+1}'(x) = S'(x_i), \quad (4.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S_i''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S_{i+1}''(x) = S''(x_i), \quad (4.4)$$

de forma que temos $4n - 4$ incógnitas (os parâmetros da função) e $4n - 6$ equações. Podemos adicionar duas condições extras nas bordas, para efeitos de computação,

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \quad (4.5)$$

Se derivarmos $S(x)$ vamos encontrar cada uma das $S_i'(x)$ e $S_i''(x)$. Inserindo as expressões de 4.1 nas condições 4.2 a 4.5, vamos obter um sistema, agora com os parâmetros explicitamente como variáveis. Podemos reduzir o custo computacional deste método à quarta parte criando novas variáveis ϕ_i , definidas por

$$S''(x_i) = \phi_i.$$

Precisamos escrever as antigas incógnitas, dadas diretamente por 4.1, em função das variáveis ϕ_i e avaliar nas bordas dos intervalos, o que garante o cumprimento das condições. Aos poucos, vamos obter,

$$d_i = \frac{1}{6} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (4.6)$$

$$c_i = \frac{1}{2} \frac{\phi_{i-1}x_i - \phi_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (4.7)$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{x_i + x_{i-1}}{3} \frac{\phi_{i-1}x_i - \phi_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{6} \frac{\phi_i x_i^2 - \phi_{i-1} x_{i-1}^2}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.8)$$

e

$$a_i = \frac{y_{i-1}x_i - y_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i x_{i-1}}{3} \frac{\phi_{i-1}x_i - \phi_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i x_{i-1}}{6} \frac{\phi_i x_i - \phi_{i-1} x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (4.9)$$

Agora já temos todas as antigas incógnitas (os parâmetros) escritos em termos das novas. Falta

encontrar o sistema das novas variáveis em termos dos dados. Esse sistema possui equações na forma

$$(x_i - x_{i-1})\phi_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})\phi_i + (x_{i+1} - x_i)\phi_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.10)$$

Resolvido o sistema dado pelas equações 4.10 e $\phi_0 = \phi_n = 0$, encontraremos os valores de ϕ_i . Usando esses em 4.6 a 4.9, podemos montar a função $S(x)$ tão desejada.

4.2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Quando trabalhamos um problema computacionalmente, a maior questão a ser resolvida é como colocar o computador para fazer certos cálculos que ele não sabe. Isso em geral também se liga à ideia de discretização, já que o computador não trabalha com funções contínuas necessariamente.

Ao resolvermos equações diferenciais, podem surgir problemas sem solução analítica e que, portanto, precisam de uma forma de derivar e integrar dados discretizados. É nesse momento que entra o Método das Diferenças Finitas. Vamos focar nas derivações. Para isso, vamos olhar os Polinômios de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + O(h^3), \quad (4.11)$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + O(h^3). \quad (4.12)$$

Podemos obter três aproximações para a derivada primeira a partir disso, duas de primeira ordem e uma de segunda ordem, que serão

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + O(h), \quad (4.13)$$

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + O(h), \quad (4.14)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + O(h^2). \quad (4.15)$$

Para obter 4.13 e 4.14, basta isolar a derivada primeira em 4.11 e 4.12, respectivamente, e

desconsiderar termos de ordem superior. Para obter 4.15, subtraímos 4.12 de 4.11, cancelando a derivada segunda. Isso aumenta a ordem da aproximação.

Se somarmos as expressões 4.11 e 4.12, os termos de primeira ordem se cancelarão e obteremos uma aproximação de segunda ordem para a derivada segunda, que será

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} + O(h^2). \quad (4.16)$$

Para o caso de funções de várias variáveis e suas derivadas parciais, devemos usar os Polinômios de Taylor para esse tipo de função,

$$f(a_i + h_i) \approx f(a_i) + h_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{a_i} + \frac{h_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{a_i},$$

onde o índice i indica cada uma das variáveis. Reconstruindo apenas as aproximações de segunda ordem e omitindo os termos de tal ordem ou superiores, obtemos

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{a_i} \approx \frac{f(a_i + h_i) - f(a_i)}{h_i}, \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{a_i} \approx \frac{f(a_i + h_i) - f(a_i - h_i)}{2h_i} \quad (4.18)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right|_{a_i} \approx \frac{f(a_i + h_i) - 2f(a_i) + f(a_i - h_i)}{h_i^2}.$$

que em comparação com 4.13, 4.15 e 4.16, trazem a derivada parcial como uma comparação entre variações em uma única variável, fixando-se as outras.

4.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados é usado quando temos um conjunto de dados e queremos que esses dados se ajustem em um certo tipo de função, sem a espera de perfeição do ajuste, como na interpolação. Para isso precisamos ajustar os parâmetros da função de forma que ela melhor se aproxime dos dados do problema.

Dada uma série de n pontos (x_i, y_i) , o Método dos Mínimos Quadrados consiste em buscar uma função $y = f(x)$, linear nos seus parâmetros a_k , ou seja,

$$f(x) = \sum a_k f_k(x),$$

tal que dada a soma S dos quadrados dos resíduos, definida como

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2, \quad (4.19)$$

essa seja mínima, isto é, que satisfaça, para cada parâmetro,

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \quad (4.20)$$

Os resíduos somados são as distâncias verticais (em módulo) de cada ponto (x_i, y_i) à função $y = f(x)$ que os aproxima. Calculando a derivada de 4.19, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_k} &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \right], \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_k} (y_i - f(x_i))^2, \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i)) \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \Big|_{x=x_i}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

que deve se anular, satisfazendo 4.20. Aproveitando que 4.21 se anula, podemos dividi-la por $-2n$ para normalizar e escrever em termos das médias,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i)) \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \Big|_{x=x_i} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \Big|_{x=x_i}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right) \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f(x) \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right) \Big|_{x=x_i}, \\ \left\langle y \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)^2}{\partial a_k} \Big|_{x=x_i}, \\ \left\langle y \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right\rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f(x)^2}{\partial a_k} \right\rangle, \end{aligned}$$

resultando em

$$\left\langle \frac{\partial f(x)^2}{\partial a_k} \right\rangle = 2 \left\langle y \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right\rangle, \quad (4.22)$$

onde cabe perceber que, por $f(x)$ ser linear nos seus parâmetros, o lado esquerdo de 4.22 também o é, enquanto no lado direito os parâmetros não aparecem. A equação 4.22 será usada sempre que quisermos construir um modelo para nossos dados através de uma função contínua.

5 COLETA DE DADOS

5.1 ASTROMETRIA

Como dito na introdução, a humanidade sempre esteve olhando para o Céu. O Céu noturno, especialmente, causava encanto pela quantidade de pontos luminosos que se distinguiam do grande pano de fundo de escuridão. Por esse encanto foram surgindo as histórias, as constelações, as classificações e catálogos de estrelas. Acompanhava-se a estrela em sua posição no Céu ao longo dos tempos.

Com os avanços na compreensão do Céu e nos instrumentos de medida, e consequentemente na Astronomia, desta nasceu um ramo dedicado a estudar as distâncias e movimentos no Céu: a Astrometria. Duas informações de posição astrométrica podem ser obtidas facilmente: ascensão reta e declinação, que indicam a posição da estrela no Céu em relação a pontos de referência, como o Equador Celeste (KEPLER; SARAIVA, 2014). Podemos ver uma representação dessas duas medidas na Figura 5.

A terceira informação de posição é a paralaxe, a partir da qual conhecemos a distância dessa estrela até nós. Ela pode ser medida tomando dois pontos de observação (simultâneos ou não) separados por uma distância conhecida e, usando trigonometria, avaliando o ângulo de

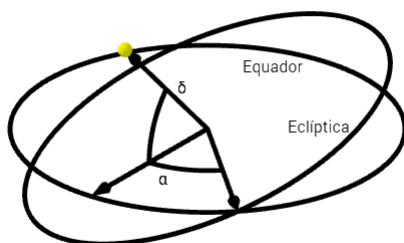


Figura 5 – Representação da ascensão reta (α) e declinação (δ). A ascensão reta é medida ao longo do equador, partindo de um ponto de interseção do equador (plano de rotação da Terra) com a eclíptica (plano de órbita da Terra), até o meridiano em que se encontra o astro. A altura do equador ao astro, ao longo de seu meridiano, é a declinação.

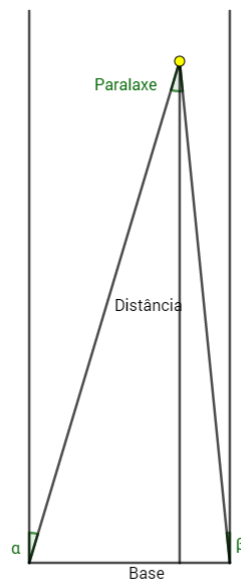


Figura 6 – O ângulo de paralaxe é a soma dos ângulos de visada (α e β). Conhecendo a linha de base, a distância é relacionada com a tangente do ângulo de paralaxe. O parsec é a distância de um objeto com paralaxe de um arco-segundo medido com linha de base sendo o raio da órbita da Terra (paralaxe heliocêntrica).

observação destes pontos. Vide Figura 6. O ângulo de observação também varia ao longo do tempo não só por fenômenos de paralaxe, mas porque as estrelas se movem umas em relação às outras. Uma observação contínua delas nos dá duas informações sobre esse movimento, chamado de movimento próprio: o movimento na ascensão reta e o na declinação.

A primeira vista seria possível também acompanhar o afastamento ou aproximação de uma estrela à Terra por observação contínua de sua posição e paralaxe, porém isso levaria uma escala de tempo absurdamente maior. Para isso, a Astrometria conta com a ajuda de outro ramo: a Espectrometria.

Conhecendo aspectos físico-químicos da estrela e observando seu comportamento instantâneo, podemos determinar efeitos do seu movimento, como "redshift/blueshift"¹. Isso só é possível analisando o espectro de emissão/absorção da estrela, por isso compete à Espectrometria. A partir desses dados, obtemos a sexta informação sobre a cinemática da estrela: sua velocidade radial (afastamento/aproximação em relação à Terra) (KEPLER; SARAIVA, 2014).

¹Nomes dados aos fenômenos de desvio para o vermelho e para o azul por Efeito Doppler no espectro de emissão de corpos celestes que se afastam e se aproximam, respectivamente

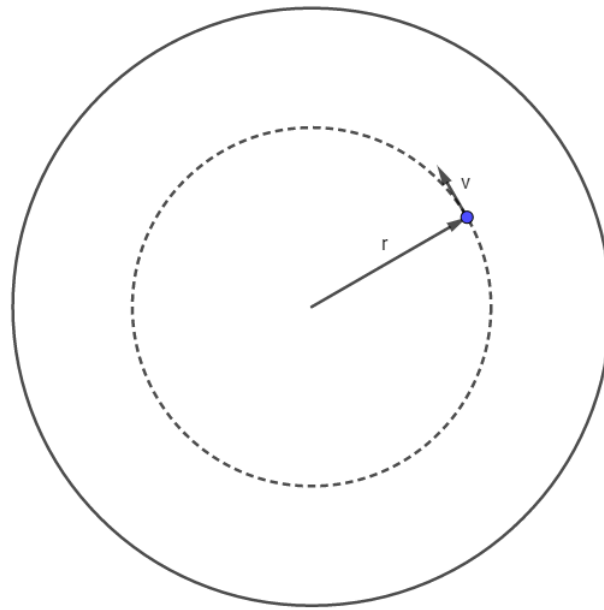


Figura 7 – Estrela em órbita circular em relação ao centro da Galáxia. A curva de rotação mapeia a velocidade circular v em função da distância ao centro da Galáxia r .

5.2 ASTROMETRIA NA GALÁXIA

O movimento das estrelas está, em primeira ordem, descrito conhecendo sua posição e velocidade em três dimensões em relação à Terra. Porém, a dinâmica que queremos estudar é relativa à Galáxia. Para isso precisamos conhecê-la e observar o movimento de tais estrelas enquanto Galáxia. A observação desse conjunto de estrelas nos permite mapear um disco com rotação global em torno de um centro. A partir desse momento, definimos esse disco como sendo a Galáxia da Via Láctea. Fora dele a densidade de estrelas diminui consideravelmente. Em relação a tal disco orbitam corpos menores, como as Nuvens de Magalhães.

Determinando a Galáxia e seu centro, passamos nosso referencial para ele. Em vez de analisarmos o movimento da Galáxia a partir de nosso ponto de vista, observamo-lo como visto do Centro da Galáxia. Conhecendo a velocidade e posição de cada estrela em relação ao nosso planeta, podemos mapear, por uma mudança de referencial simples, para o Centro da Galáxia.

5.3 CURVA DE ROTAÇÃO

A Curva de Rotação, dado cinemático que será usado em nossos modelos, é uma representação gráfica da velocidade circular em relação ao centro da Via Láctea, em função da distância a este centro, conforme a Figura 7.

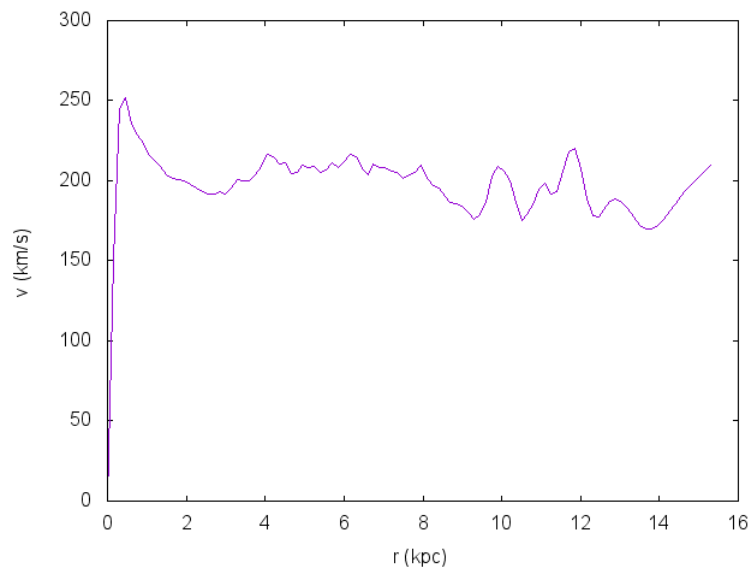


Figura 8 – Curva de Rotação da Via Láctea obtida pelo observatório japonês VERA e ajustado a uma grade regular por meio de spline cúbica

Fonte: (SOFUE, 2012)

A curva utilizada neste trabalho foi construída a partir de dados do observatório japonês VERA, presentes em (SOFUE, 2012). Inicialmente esses dados estavam em posições não necessariamente alinhadas a uma grade regular, desejosa para os cálculos que se seguiriam. Para isso, foi criada uma interpolação de spline cúbica. A interpolação resultante é a apresentada na Figura 8

Existem na literatura ajustes de funções à curva de rotação (DIAS; LÉPINE, 2006). Em geral, eles advêm de modelos ou de algum outro tipo de suposição. Fizemos um processo semelhante e por isso não usamos um desses modelos já existentes.

5.4 UNIDADES DE MEDIDA

As grandezas envolvidas possuem ordens de magnitude das mais diversas: as velocidades são dadas em km/s , a constante de Newton aparece no Sistema Internacional, as massas envolvidas são da ordem de $10^{41} kg$, as distâncias são dadas em kpc . Para auxiliar os cálculos, buscamos construir um sistema de unidades que deixasse os valores mais próximos de uma normalização e todas as grandezas no mesmo sistema de unidades. As duas conversões utilizadas foram:

$$1 kpc = 3.086 \cdot 10^{16} km = 3.086 \cdot 10^{19} m.$$

$$1 M_G = 10^{41} \text{ kg} = 5 \cdot 10^{10} M_{\odot}.$$

Assim, utilizamos o kiloparsec (kpc), mil vezes maior que o parsec definido pela Figura 6 como unidade de distância e uma unidade arbitrária M_G para a massa, correspondente a 50 bilhões de massas solares (M_{\odot}).

6 MODELOS ASTROFÍSICOS DE MASSA E DENSIDADE

Nossos modelos são, portanto, regidos pelas equações 2.14, 3.15 e 3.21. Nossa intenção é, usando tais equações e a curva de rotação da Figura 8, construir modelos astrofísicos para a distribuição de massa na Via Láctea, obtendo também valores para a massa total, considerando matéria escura e matéria bariônica regular. Para isso, vamos, nesse trabalho, criar modelos simplificados, que incluem a ausência de pressão ou a ausência de velocidade. Nenhum deles termos de viscosidade ou correções relativísticas mais elaboradas.

6.1 ÓRBITAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

O primeiro modelo é um modelo de órbitas com simetria esférica, ou seja, fazendo $\vec{v} = v_\theta(r)\hat{e}_\theta$, $\rho = \rho(r)$, $\Phi = \Phi(r)$, $p = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{v_\theta^2}{r},\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\pi G\rho.\tag{6.2}$$

As equações acima representam um modelo de órbitas estacionárias circulares no plano xy , ou seja, cada partícula descrita por elas desenvolve uma órbita circular de raio r com velocidade $v_\theta(r)$. De posse da função $v_\theta(r)$, podemos manipular 6.2, inserindo também 6.1, para obter a densidade $\rho(r)$, partindo de

$$\begin{aligned}
4\pi G\rho &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta^2}{r}\right) + \frac{2}{r}\frac{v_\theta^2}{r}, \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta^2}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{2v_\theta^2}{r^2},
\end{aligned}$$

tal que

$$\rho = \frac{1}{4\pi G r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi G} \frac{v_\theta^2}{r^2}. \quad (6.3)$$

Agora com a função densidade $\rho(r)$ podemos construir, através da integração de 6.3 em um volume esférico (pela simetria), a função de massa acumulada

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho r'^2 \sin\phi' dr' d\phi' d\theta' \\
&= 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr', \\
&= 4\pi \int_0^r \frac{r'^2}{4\pi G} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial r'} + \frac{v_\theta^2}{r'^2} \right) dr', \\
&= \frac{1}{G} \int_0^r \frac{\partial (r' v_\theta^2)}{\partial r'} dr',
\end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$m = \frac{r v_\theta^2}{G}. \quad (6.4)$$

Tal resultado para a massa é bem conhecido e pode ser obtido fazendo a igualdade entre as forças gravitacional e centrípeta de uma partícula orbitando um corpo central de massa m , o que nos permite obter algumas distribuições baseadas em curvas de rotação simples (NUSSENZVEIG, 1997; BINNEY; TREMAINE, 2008). Isso corrobora a interpretação das equações de movimento como as de partículas em órbitas circulares.

6.1.1 Curva de Rotação Kepleriana

Quando falamos em curva de rotação kepleriana estamos pensando em uma curva dada pela relação

$$v_{\theta} = \sqrt{\frac{GM_0}{r}}. \quad (6.5)$$

Aplicando 6.5 na equação 6.3, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi G} \frac{v_{\theta}^2}{r^2}, \\ &= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GM_0}{r} \right) + \frac{1}{4\pi G} \frac{GM_0}{r^3}, \\ &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{GM_0}{r^3} + \frac{1}{4\pi G} \frac{GM_0}{r^3}, \end{aligned}$$

concluindo que,

$$\rho = 0. \quad (6.6)$$

Substituindo novamente 6.5, dessa vez em 6.4, temos

$$\begin{aligned} m &= \frac{r}{G} v_{\theta}^2, \\ &= \frac{r}{G} \frac{GM_0}{r}. \end{aligned}$$

Assim,

$$m = M_0. \quad (6.7)$$

Como podemos ver, a densidade dada por 6.6 é nula em todos os pontos, entretanto há uma massa dada por 6.7, ou seja, que independe da distância ao centro. Isso significa que há uma massa pontual localizada no centro. Pequenos desvios da curva kepleriana seriam pequenas distribuições de massa.

6.1.2 Curva de Rotação de Corpo Rígido

O corpo sólido girando tem uma velocidade angular constante em todo o corpo e, portanto, a velocidade cresce linearmente com o raio, podendo ser representada, por exemplo, por

$$v_{\theta} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} r. \quad (6.8)$$

Utilizando a expressão de 6.8 para encontrar a densidade por meio de 6.3, fazemos

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi G} \frac{v_{\theta}^2}{r^2}, \\
&= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3} r^2 \right) + \frac{1}{4\pi G} \frac{4\pi G \rho_0 r^2}{3r^2}, \\
&= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3} r^2 \right) + \frac{1}{4\pi G} \frac{4\pi G \rho_0 r^2}{3r^2}, \\
&= \frac{2}{3} \rho_0 + \frac{1}{3} \rho_0,
\end{aligned}$$

obtendo

$$\rho = \rho_0. \quad (6.9)$$

Utilizando dessa vez em 6.4 para obter a massa, encontramos

$$\begin{aligned}
m &= \frac{r}{G} v_{\theta}^2, \\
&= \frac{r}{G} \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3} r^2 \right),
\end{aligned}$$

resultando em

$$m = \frac{4\pi \rho_0}{3} r^3. \quad (6.10)$$

Portanto, para um sistema gravitacional se comportar como um corpo rígido é necessário que ele tenha densidade constante dada por 6.9 e, portanto, sua massa seja a de uma esfera de densidade constante, como em 6.10.

6.1.3 Curva de Rotação Plana

A suposição aqui é a mais simples: vamos só supor que a velocidade é constante, ou seja,

$$v_{\theta} = V_0. \quad (6.11)$$

Vamos novamente utilizar 6.11 na expressão 6.3, para calcular a densidade que gera tal curva, por meio de

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi G} \frac{v_{\theta}^2}{r^2}, \\
&= \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{\partial V_0^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi G} \frac{V_0^2}{r^2},
\end{aligned}$$

chegando em

$$\rho = \frac{V_0^2}{4\pi G r^2}. \quad (6.12)$$

Da mesma forma, usamos em 6.4, através de

$$\begin{aligned} m &= \frac{r}{G} v_\theta^2, \\ &= \frac{r}{G} V_0^2, \end{aligned}$$

até,

$$m = \frac{V_0^2}{G} r. \quad (6.13)$$

Nesse caso, a massa cresce linearmente com a distância, por meio de 6.13. Enquanto isso a densidade cai com o quadrado da distância, como em 6.12.

6.1.4 Curva de Rotação Observada

Como não temos uma função $v_\theta(r)$, mas sim alguns pontos v_i dessa função da curva de rotação, precisamos aproximar as equações 6.3 e 6.4. Para isso, utilizaremos o método das diferenças finitas. Omitimos os índices θ e r por economia e estética da notação. Para a densidade, obtemos, aproximando 6.3 por meio de 4.18,

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{ih} \frac{v_{i+1}^2 - v_{i-1}^2}{2h} + \frac{1}{4\pi G} \frac{v_i^2}{(ih)^2},$$

ou seja,

$$\rho_i = \frac{v_{i+1}^2 - v_{i-1}^2}{8\pi G i h^2} + \frac{v_i^2}{4\pi G i^2 h^2}. \quad (6.14)$$

Para a massa o processo é bem mais simples e não chega a ser uma aproximação em si, já que não inclui derivadas. Nesse caso, substituímos v_i e a definição de nossa grade regular em 6.4, obtendo

$$m_i = \frac{i h v_i^2}{G}. \quad (6.15)$$

Reproduzimos a curva de rotação e adicionamos os perfis resultantes de 6.14 e 6.15, todos na Figura 9.

Observando os gráficos da Figura 9, só um parece ser revelador a um olhar superficial: o

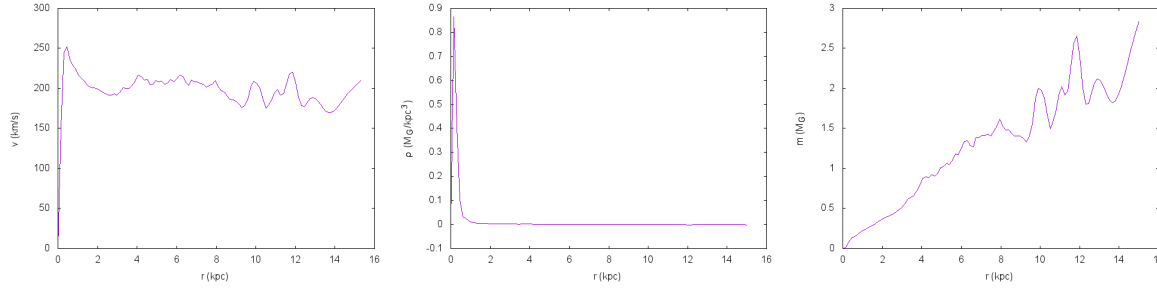


Figura 9 – Curva de rotação, perfil de densidade e perfil de massa acumulada, da esquerda para a direita, em função da distância ao centro da galáxia. Resultados advindos da curva de rotação e da aplicação das expressões obtidas para a densidade e a massa em uma órbita com simetria esférica.

perfil de massa acumulada parece indicar que, a despeito das oscilações após os 8 kpc, a massa pode ser bem definida por uma função linear (no sentido estrito), ou seja,

$$m(r) = \lambda r. \quad (6.16)$$

Escolhemos um novo parâmetro, λ por simplicidade, já que a curva de massa será nosso guia e é mais interessante modelar um parâmetro linear. Sabemos que o comportamento da massa é linear no caso da curva de rotação de velocidade constante, através de 6.13. Comparando então 6.16, 6.13 e 6.4, encontramos

$$\lambda = \frac{V_0^2}{G} = \frac{v_\theta^2}{G},$$

ou seja,

$$v_\theta(r) = \sqrt{\lambda G}. \quad (6.17)$$

Da mesma forma, comparando agora 6.12 e 6.13 e 6.16, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{V_0^2}{4\pi G r^2}, \\ &= \frac{V_0^2}{G} \frac{1}{4\pi r^2}, \\ &= \lambda \frac{1}{4\pi r^2}, \end{aligned}$$

que fica

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{4\pi r^2}. \quad (6.18)$$

Tais funções possuem um parâmetro λ que deve ser o que melhor ajusta às curvas. Para

tanto, devemos nos utilizar do método dos mínimos quadrados. Se aplicarmos a equação 4.22 à 6.16, vamos obter

$$\begin{aligned}
 m(r) &= \lambda_m r, \\
 m(r)^2 &= \lambda_m^2 r^2, \\
 \frac{\partial m(r)}{\partial \lambda_m} &= r, \\
 \frac{\partial m(r)^2}{\partial \lambda_m} &= 2\lambda_m r^2, \\
 \left\langle \frac{\partial m(r)^2}{\partial \lambda_m} \right\rangle &= 2 \left\langle m \frac{\partial m(r)}{\partial \lambda_m} \right\rangle, \\
 \langle 2\lambda_m r^2 \rangle &= 2 \langle mr \rangle, \\
 2\lambda_m \langle r^2 \rangle &= 2 \langle mr \rangle,
 \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\lambda_m = \frac{\langle mr \rangle}{\langle r^2 \rangle}.$$

Realizando então os cálculos apenas com os dados até 8 kpc, obtemos $\lambda_m = 0.198374674 M_G/kpc$. Podemos também determinar o coeficiente λ a partir da curva de rotação. Esse resultado é importante, pois a curva de rotação é verdadeiramente nosso dado. Para isso, utilizamos uma versão ligeiramente mais simples de 6.17, aplicando 4.22, encontrando

$$\begin{aligned}
 v_\theta(r) &= \sqrt{\lambda_{v_\theta} G} = k, \\
 v_\theta(r)^2 &= k^2, \\
 \frac{\partial v_\theta(r)}{\partial k} &= 1, \\
 \frac{\partial v_\theta(r)^2}{\partial k} &= 2k, \\
 \left\langle \frac{\partial v_\theta(r)^2}{\partial k} \right\rangle &= 2 \left\langle v_\theta \frac{\partial v_\theta(r)}{\partial k} \right\rangle, \\
 \langle 2k \rangle &= 2 \langle v_\theta \rangle, \\
 2\sqrt{\lambda_{v_\theta} G} &= 2 \langle v_\theta \rangle,
 \end{aligned}$$

de forma que,

$$\lambda_{v_\theta} = \frac{\langle v_\theta \rangle^2}{G}.$$

Do gráfico da velocidade, também apenas até 8 kpc, obtivemos $\lambda_{v_0} = 0.198394507 M_G/kpc$. Esse dado é extremamente coerente com o obtido na interpolação da massa, já que esta foi obtida por manipulação direta e não aproximações de diferenças finitas. Mas também podemos calcular a partir da densidade. Nesse caso, modificamos 6.18 para utilizar 4.22, por meio de

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{\lambda_p}{4\pi r^2} = \frac{k}{r^2}, \\ \rho(r)^2 &= \frac{k^2}{r^4}, \\ \frac{\partial \rho(r)}{\partial k} &= \frac{1}{r^2}, \\ \frac{\partial \rho(r)^2}{\partial k} &= \frac{2k}{r^4}, \\ \left\langle \frac{\partial \rho(r)^2}{\partial k} \right\rangle &= 2 \left\langle \rho \frac{\partial \rho(r)}{\partial k} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{2k}{r^4} \right\rangle &= 2 \left\langle \frac{\rho}{r^2} \right\rangle, \\ 2 \frac{\lambda_p}{4\pi} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle &= 2 \left\langle \frac{\rho}{r^2} \right\rangle,\end{aligned}$$

que resulta em

$$\lambda_p = 4\pi \frac{\langle \rho/r^2 \rangle}{\langle 1/r^4 \rangle}.$$

O resultado obtido do gráfico da densidade, construído por um método numérico, diverge consideravelmente para $\lambda_p = 0.395123452 M_G/kpc$. Esse comportamento se deve à resíduos do método numérico e do próprio método dos mínimos quadrados, já que o gráfico da densidade apresenta um pico bastante elevado entre os dados analisados. Com esses resultados, um valor ótimo foi definido como sendo aquele que representa a convergência entre λ_{v_0} e λ_m , ou seja,

$$\lambda = 0.1983 M_G/kpc. \quad (6.19)$$

A aplicação do modelo gerou os gráficos, comparados aos dados, vistos na Figura 10.

6.2 EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO

Mesmo que saibamos que o sistema possui velocidade, esta tem pouca contribuição energética à dinâmica da galáxia se comparada à gravidade. Portanto, vamos fazer um modelo de equilíbrio hidrostático, adicionando como mecanismo de compensação da gravidade a pressão, ou seja, $\vec{v} = 0$, $\rho = \rho(r)$, $\Phi = \Phi(r)$, $p = p(\rho)$. A última destas condições é a chamada equa-

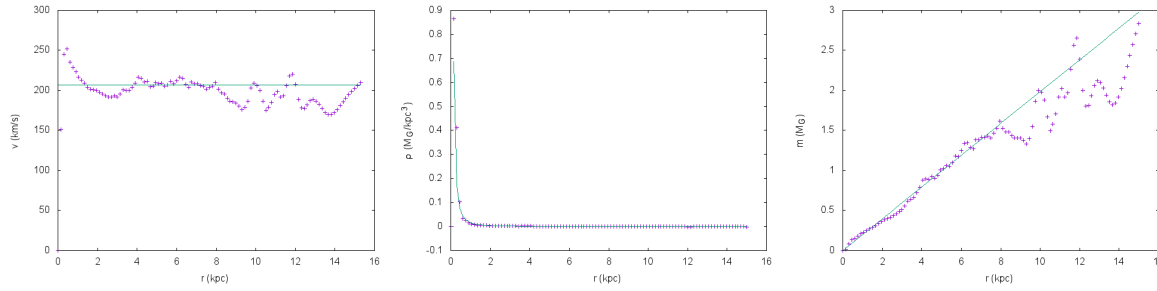


Figura 10 – Curva de rotação, perfil de densidade e perfil de massa acumulada, da esquerda para a direita, em função da distância ao centro da galáxia. Os pontos foram obtidos da curva de rotação e o ajuste foi feito a partir de uma aproximação da massa como linear, na forma $m = \lambda r$, com $\lambda = 0.1983 M_G/kpc$.

ção de estado e relaciona a pressão p à densidade ρ . Isso nos retorna, aplicando as equações originais do modelo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\pi G \rho, \quad (6.21)$$

$$p = k\rho^\alpha. \quad (6.22)$$

Onde supomos uma equação de estado do tipo politrópica, ou seja, 6.22. Reescrevendo 6.21, agrupando os termos, e substituindo o resultado em 6.20,

$$\begin{aligned} 4\pi G \rho &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Vamos introduzir uma nova variável χ , determinada por

$$\rho = \rho_0 \chi^n, \quad (6.24)$$

e

$$p = p_0 \chi^{n+1}. \quad (6.25)$$

Substituindo 6.24 e 6.25 na equação de estado 6.22 obtemos a relação $1/n = \alpha - 1$. Por outro lado, substituindo em 6.23, desenvolvemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + 4\pi G \rho &= \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\chi^n} \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial r} \right) + 4\pi G \rho_0 \chi^n, \\ &= (n+1) \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + 4\pi G \rho_0 \chi^n = 0. \end{aligned}$$

Vamos fazer mais uma substituição

$$r = \left[\frac{(n+1)p_0}{4\pi G \rho_0^2} \right]^{1/2} \xi, \quad (6.26)$$

e com isso, a nossa equação assume a forma

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \chi^n = 0. \quad (6.27)$$

A equação acima é conhecida como Equação de Lane¹-Emden² (HOREDT, 2011; CHANDRASEKHAR, 1967), e com as condições iniciais $\chi(0) = 1$ e $\chi'(0) = 0$ se torna de extrema importância em Astrofísica, justamente por descrever o equilíbrio hidrostático de um sistema gravitacional. Ela funciona para qualquer α diferente de 1, pois nesse caso n seria infinito. Para esse caso, a obtenção é extremamente similar, partindo de 6.23, porém com as substituições

$$\rho = \rho_0 e^\chi \quad (6.28)$$

e

$$p = p_0 e^\chi$$

obtendo então

$$\frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 e^{-\chi} \frac{\partial e^\chi}{\partial r} \right) + 4\pi G \rho_0 e^\chi = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + 4\pi G \rho_0 e^\chi = 0.$$

Substituindo

$$r = \left(\frac{p_0}{4\pi G \rho_0^2} \right)^{1/2} \xi, \quad (6.29)$$

chegamos a

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + e^\chi = 0. \quad (6.30)$$

¹Jonathan Homer Lane (EUA, 1819 - 1880)

²Jacob Robert Emden (Suíça, 1862 - 1940)

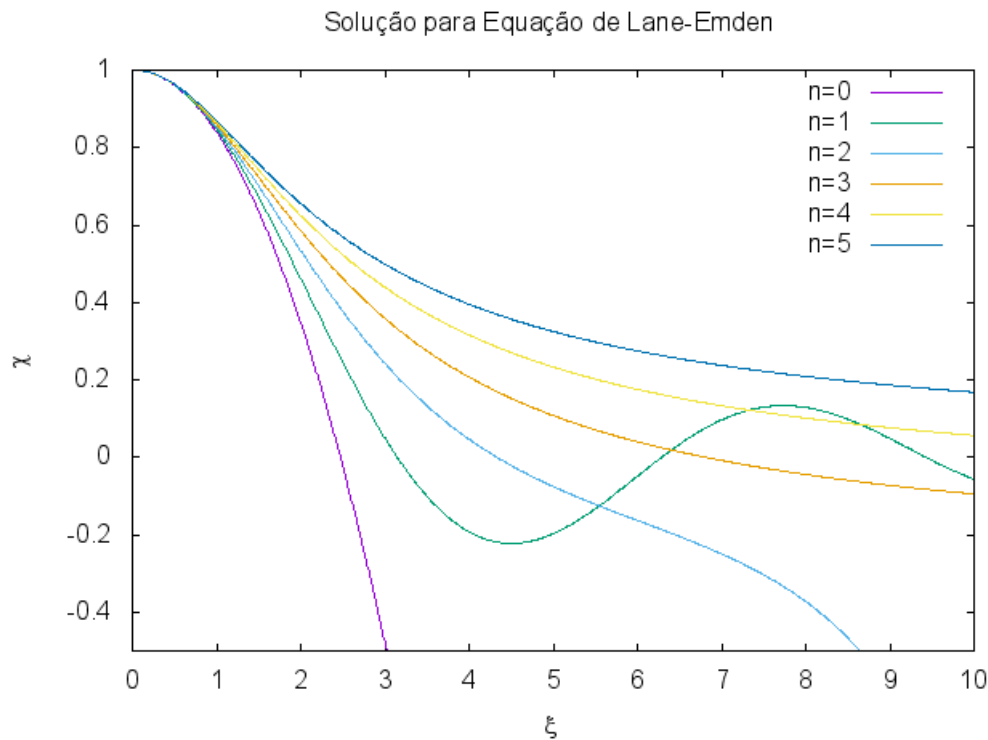


Figura 11 – Soluções para a Equação de Lane-Emden com o índice politrópico n variando de 0 a 5

Essa equação completa o sistema e é chamada de Equação de Emden-Chandrasekhar³ (HOREDT, 2011; CHANDRASEKHAR, 1967), também fundamental para a Astrofísica, com a diferença nas condições iniciais sendo $\chi(0) = 0$ e $\chi'(0) = 0$.

Agora vamos trabalhar para resolver as equações 6.27 e 6.30. Podemos criar uma nova variável no intuito de termos duas equações de primeira ordem. Tal variável será definida como

$$\psi = \xi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \quad (6.31)$$

Primeiro vamos escrever o sistema que será resolvido no caso das Equações de Lane-Emden, que é

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi^2} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\xi^2 \chi^n \end{cases}$$

As derivadas são então aproximadas por 4.17 e o sistema é resolvido numericamente. Observamos as soluções com n entre 0 e 5 na Figura 11.

³Subrahmanyam Chandrasekhar (Índia, 1910 - EUA, 1995)

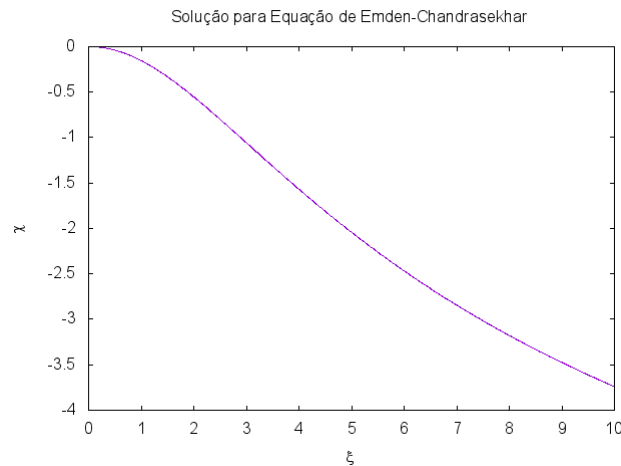


Figura 12 – Solução para a Equação de Emden-Chandrasekhar

O sistema para a equação de Emden-Chandrasekhar fica

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi^2} \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\xi^2 e^{\chi}. \end{cases}$$

e sua solução, também obtida pela aproximação 4.17, pode ser vista na Figura 12.

Devemos ficar atentos pois o significado do χ é diferente para cada um dos casos apresentados, não sendo os gráficos observados os perfis de densidade. Tendo as soluções das equações acima, podemos buscar as interpretações de χ e ψ , convertendo-os para os valores de massa e densidade. A relação entre a densidade e χ para o caso de Lane-Emden é dada por 6.24 enquanto para Emden-Chandrasekhar, por 6.28. Agora, para relacionar a massa às variáveis adimensionais, vamos retomar a integral

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi', \\ &= 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'. \end{aligned}$$

No caso da Equação de Lane-Emden, podemos desenvolver a equação acima usando 6.24, 6.26 e 6.31, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi\rho r^2, \\
&= 4\pi\rho_0\chi^n\xi^2\left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right), \\
&= 4\pi\rho_0\left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)\xi^2\chi^n, \\
&= -4\pi\rho_0\left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \\
&= -4\pi\rho_0\left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)^{3/2}\frac{\partial\psi}{\partial r},
\end{aligned}$$

tal que,

$$m = -4\pi\rho_0\left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)^{3/2}\psi. \quad (6.32)$$

O caminho no caso da equação de Emden-Chandrasekhar é extremamente semelhante, usando, entretanto, 6.28, 6.29 e 6.31, de onde se conclui que

$$m = -4\pi\rho_0\left(\frac{p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)^{3/2}\psi. \quad (6.33)$$

Para o nosso caso, temos um valor de r limitado, portanto os valores de ξ também o serão, a depender dos parâmetros ρ_0 e p_0 . Limitando o domínio de uma função de solução (numérica) conhecida, vamos portanto, determinar um valor de ψ na borda. A partir das relações 6.32 e 6.33, interpretamos isso como sendo um valor da massa total do sistema como função dos parâmetros.

Primeiro cabe ressaltar algumas coisas sobre as soluções das equações e sua relação com um sistema de tamanho limitado e fixo. Estamos analisando a galáxia até 15 *kpc* de distância do centro, mas ela (especialmente o halo de matéria escura) se estende além disso. Portanto, queremos que nos casos em que a solução possui raiz, o limite seja menor ou igual a tal raiz. Como só soluções de Lane-Emden têm raiz, vamos analisar apenas elas neste momento. A condição acima significa, usando 6.26

$$r_{\max} \leq \left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2}\right)^{1/2}\xi_0,$$

onde r_{\max} é o limite da nossa análise e ξ_0 é a primeira raiz da solução em questão. As primeiras raízes, que só existem para $n < 5$ podem ser aproximadas e, portanto, podemos encontrar uma pressão crítica mínima para o sistema, dada uma densidade crítica. Quanto menor

a pressão crítica, maior seria o sistema, que acabaria ultrapassando o limite da raiz, perdendo o significado físico. Nessas regiões de baixa pressão as soluções variam muito e, portanto, a massa também terá grandes variações. Quanto maior a pressão, entretanto, menor o sistema e vamos caminhando para uma região onde a densidade, para pequenos valores de ξ é constante. Assim a massa também terá poucas variações.

Para o caso de Emden-Chandrasekhar, que não possui raiz, a densidade para grandes valores de ξ também se torna constante e próximo de zero, e portanto, não acrescenta tanta massa. Assim, para pressões muito baixas, nesse caso, também não haverá muita variação na massa. Com isso esperamos uma faixa de pressões (fixada uma densidade crítica) para a qual a massa apresenta genuína variação e além da qual, ou o sistema não tem sentido físico ou a massa se torna aproximadamente independente da pressão. Não analisaremos os casos de Lane-Emden com $n > 5$ porque são apenas extensões dos casos já analisados, que possuem maior interesse.

As densidades também têm uma faixa restrita, mas por outro motivo. Sabemos da literatura (SOFUE, 2012, 2016; WANG et al., 2020) e deste próprio trabalho que a massa até 15 kpc gira em torno de $1,5 \sim 4 M_G$. Podemos pegar valores menores de densidade, dando valores menores na massa, para uma espécie de controle, mas não precisamos ir muito longe na densidade máxima analisada, pois rapidamente passa dos 7 M_G . Fixadas essas regiões de densidade e pressão críticas, pudemos então encontrar, como função delas, os valores de massa dentro do sistema limitado como sendo, para os casos de Lane-Emden, a partir de 6.32 e 6.26,

$$m = -4\pi\rho_0 \left(\frac{(n+1)p_0}{4\pi G\rho_0^2} \right)^{3/2} \Psi \left(\left(\frac{4\pi G\rho_0^2}{(n+1)p_0} \right)^{1/2} r_{\max} \right)$$

e, para o caso de Emden-Chandrasekhar, a partir de 6.33 e 6.29,

$$m = -4\pi\rho_0 \left(\frac{p_0}{4\pi G\rho_0^2} \right)^{3/2} \Psi \left(\left(\frac{4\pi G\rho_0^2}{p_0} \right)^{1/2} r_{\max} \right).$$

Nas Figuras 13, 14 e 15 podemos observar os gráficos da massa em função da densidade e da pressão críticas. Alguns significados desses gráficos serão discutidos no próximo capítulo.

6.3 GÁS EM ROTAÇÃO

Fazendo $\vec{v} = v_\theta(r)\hat{e}_\theta$, $\rho = \rho(r)$, $\Phi = \Phi(r)$ e $p = p(\rho)$, obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

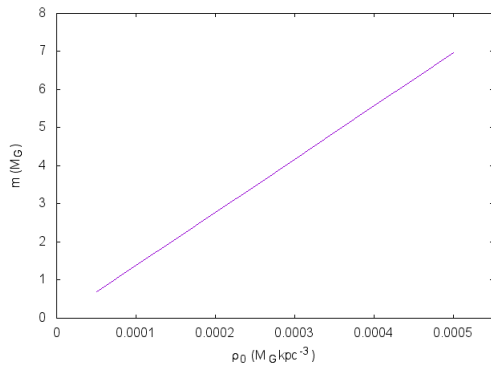
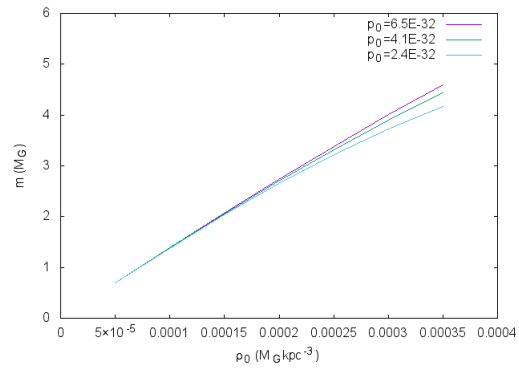
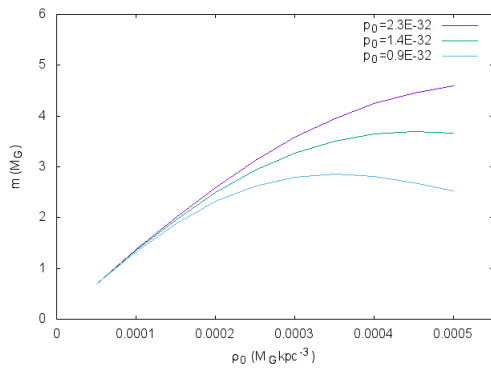
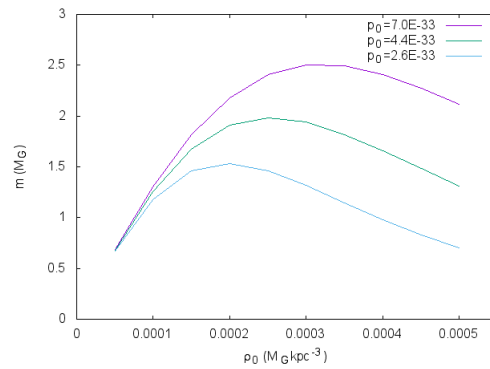
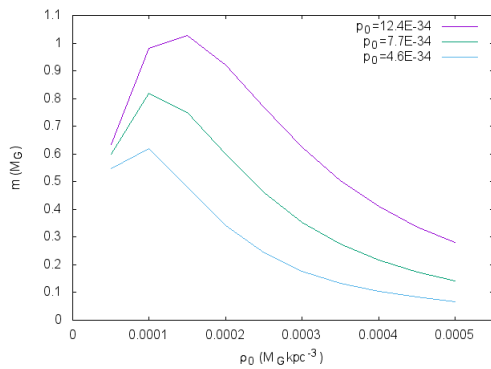
(a) $n = 0$ (b) $n = 1$ (c) $n = 2$ (d) $n = 3$ (e) $n = 4$

Figura 13 – Valores da massa em função da densidade crítica para as soluções de Lane-Emden com índice politrópico n variando de 0 a 4. Cada curva representa um valor de pressão crítica dado em $M_{\odot}kpc^{-1}s^{-2}$.

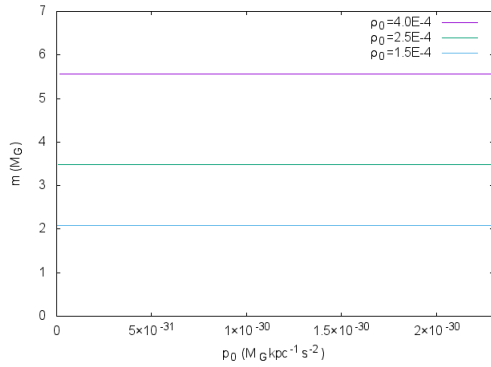
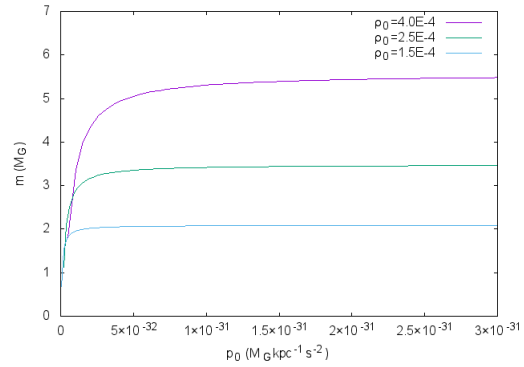
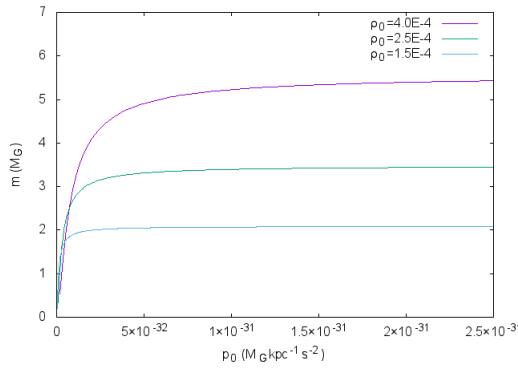
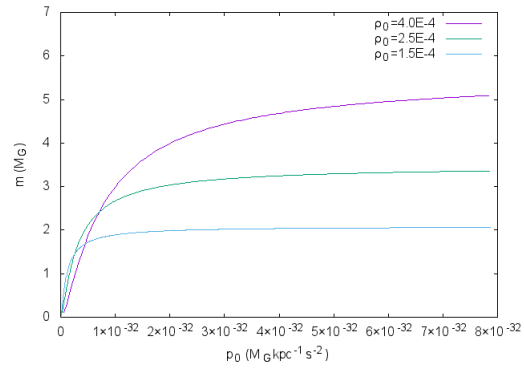
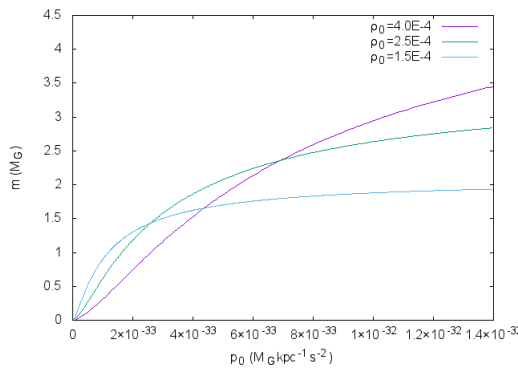
(a) $n = 0$ (b) $n = 1$ (c) $n = 2$ (d) $n = 3$ (e) $n = 4$

Figura 14 – Valores da massa em função da pressão crítica para as soluções de Lane-Emden com índice politrópico n variando de 0 a 4. Cada curva representa um valor de densidade crítica dado em $M_{\odot} \text{kpc}^{-3}$.

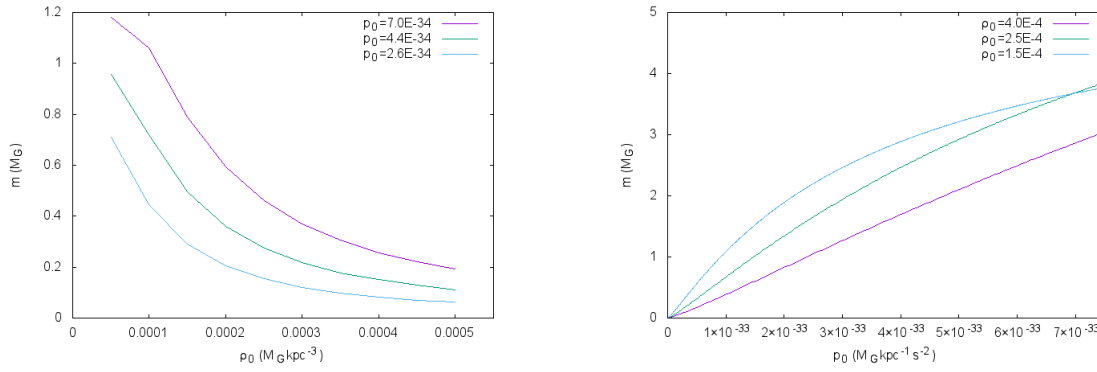
(a) Pressão crítica dada em $M_G kpc^{-1} s^{-2}$ (b) Densidade crítica dada em $M_G kpc^{-3}$

Figura 15 – Valores da massa em função da densidade crítica, 15a, e da pressão crítica, 15b, para os casos de Emden-Chandrasekhar. Cada curva representa um valor dado pelas legendas das imagens.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}, \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\pi G \rho \quad (6.35)$$

e

$$p = k\rho^\alpha.$$

A primeira coisa a se fazer é manipular a equação de movimento 6.34 para que tenhamos uma expressão que possamos inserir na Equação de Poisson 6.35 em termos do que temos: a constante de pressão, densidade e velocidade. Fazemos isso, juntando os termos conhecidos, fazendo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Agora inserimos em 6.35, obtendo

$$\begin{aligned}
4\pi G\rho &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right), \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right], \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta^2) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Separando a densidade e a pressão, que queremos conhecer, da velocidade, que temos, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + 4\pi G\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta^2).$$

Se olharmos rapidamente podemos não reconhecer, mas o lado esquerdo é igual a 6.23. Agora temos uma versão não homogênea, onde o lado direito envolve a velocidade. Mas se, novamente, olharmos atentamente para ele, veremos que está relacionado à densidade das órbitas por meio de 6.3. Ou seja, estamos de certa forma somando os dois casos anteriores. Vamos denotar a densidade da órbita por ω e repetir os passos das equações da sessão anterior, obtendo versões não homogêneas dadas por

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + e^\chi = \frac{\omega}{\rho_0}$$

e

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \chi^n = \frac{\omega}{\rho_0}.$$

As relações entre ρ , p , α e r e ξ , χ , n , ρ_0 e p_0 continuam as mesmas, porém a solução das equações é diferente com a adição do termo não-homogêneo. Sendo assim, a relação da massa com as novas variáveis também se altera. A solução dessas equações não será construída neste trabalho.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho buscamos analisar, a partir de curvas de rotação da Via Láctea, e usando a Dinâmica de Fluidos, o problema relativo à diferença entre o simulado e o observado na distribuição de matéria (essencialmente matéria escura) na galáxia. Para discutir os resultados obtidos, vamos tomar como referência dois parâmetros: o valor da massa enclausurada até 15 *kpc* do centro da galáxia e o perfil de densidade até aquele ponto.

Obtivemos um primeiro resultado simplesmente observando a curva de rotação e supondo a ausência de pressão ou viscosidade. Esse primeiro resultado, especialmente o valor da massa, quando comparado à literatura, serviu de padrão de calibragem para suposições subsequentes sobre a pressão. Com isso, obtivemos resultados para um sistema em equilíbrio (sem rotação), porém com uma pressão.

Abaixo vamos discutir em detalhes tais resultados e sua consistência, interna e com a literatura.

7.1 VALORES DA MASSA

A forma que realmente nos interessa para o cálculo da massa é a forma direta, ou seja, sem pressão ou viscosidade. Isso porque ela é o método principal de determinação da massa e porque nos deixa livres de suposições sobre o perfil de densidade, sendo determinada através dele ou sem referência a ele. A primeira forma de determinação foi aplicando a equação 6.15 ao valor da velocidade encontrado na distância de 15 *kpc*. A massa obtida desta forma foi

$$m = 2.8375 M_G. \quad (7.1)$$

Porém, observando o perfil de massa acumulada, supomos que ele pudesse ser aproximado por uma função linear. Por mais que isso seja uma suposição, indireta, sobre o perfil de densidade, ela foi feita com base na distribuição de massa. Nesse caso obtivemos um parâmetro de distribuição dado pelo valor em 6.19. O valor dessa distribuição em nosso sistema até 15 *kpc* é dado

por

$$m = \lambda r_{\max} = 2.9745 M_G. \quad (7.2)$$

Da literatura (SOFUE, 2012, 2016; WANG et al., 2020) obtemos uma gama de valores que vão de $1.5 M_G$ a quase $4 M_G$. Isso de certa forma valida os valores obtidos aqui, e os intervalos considerados na continuação. Valores mais precisos vem sendo obtidos e a tendência é que essa gama de valores diminua cada vez mais, tendendo para um valor específico.

7.2 PERFIS DE DENSIDADE

Com os valores de massa em mãos, temos um parâmetro para avaliar os perfis de densidade, restringindo-os àqueles que geravam uma massa próxima aos resultados obtidos anteriormente. Analisando a dependência da massa com a pressão e a densidade críticas, que determinam efetivamente o perfil de densidade, alguns fenômenos foram observados.

Como dito anteriormente, a medida que a pressão crítica aumenta, a densidade vai se tornando mais homogênea e a massa aumenta até um valor relativamente estável. Isso acontece porque a densidade é decrescente e a medida que se diminui o intervalo, o valor homogêneo tende a ser o da densidade crítica, o maior do sistema. Isso acontece porque pressões grandes permitem que o sistema como um todo se expanda, de forma que a região analisada diminui em relação ao total, formando apenas uma pequena parte da solução.

No caso da densidade crítica, a medida que ela aumenta, o sistema tende a diminuir, como um todo, então a região analisada compõe uma parte cada vez maior do todo. Inicialmente, isso causa um aumento na massa da região, por ter densidade aproximadamente homogênea. Mas depois de um certo valor, a massa começa a diminuir pois começam a surgir valores de densidade menores na região.

A densidade crítica e pressão crítica desempenham papéis aproximadamente opostos. Enquanto a pressão crítica favorece a expansão do sistema, a densidade crítica favorece sua contração e colapso. Abaixo trazemos alguns exemplos de perfis de densidade que podem ser obtidos.

7.3 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Os modelos trabalhados permitem a construção de perfis de densidade nucleados que con- dizem com a massa observada pela curva de rotação. Por mais que eles suponham o equilíbrio

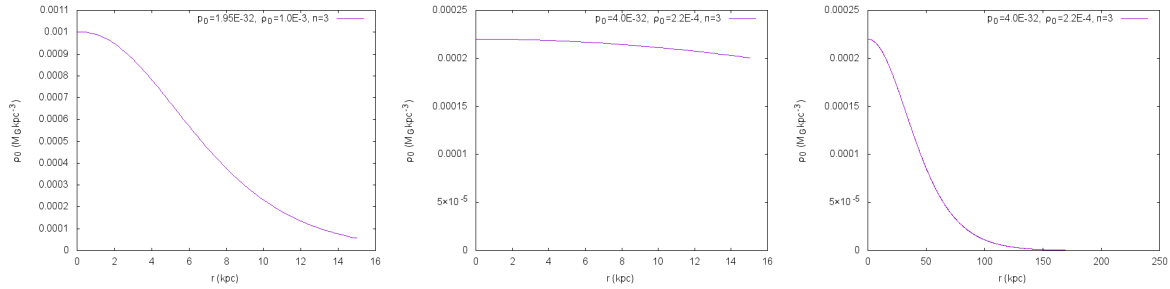


Figura 16 – Exemplos de perfil de densidade com massa de $2,9 M_G$ incluindo um com uma região maior que a estudada, a título de ilustração. Todos são de Lane-Emden, com pressão crítica dada em $M_G kpc^{-1} s^{-2}$ e densidade crítica em $M_G kpc^{-3}$.

hidrostático, a adição do termo de velocidade não deve gerar grandes mudanças na dinâmica.

A pressão inserida, interpretada do ponto de vista da matéria escura, desempenha o papel de um termo colisional, ligado à temperatura. Cabe ressaltar que perfis nucleados por matéria escura termalizada, com termos colisionais, foram obtidos também por simulações computacionais recentes (ALMEIDA; TRUJILLO, 2021). A obtenção de tais resultados a partir de modelos e simulações é interessante pois, em um primeiro olhar, elimina a contradição entre as simulações e modelos e as observações.

Independente de tais discussões, o fato de nossos modelos terem obtido faixas de densidade em perfis nucleados que condizem, de certa forma, com o observado, são um bom indicativo de que nossos objetivos foram alcançados. Conseguimos, a partir de uma descrição de fluido, obter uma descrição da distribuição de matéria em uma região da galáxia.

7.4 PERSPECTIVAS

Os próximos passos incluem retomar o termo de velocidade ao modelo, para talvez ajustar essas faixas de densidade e pressão, o que, como dito, não deve acrescentar grandes mudanças à dinâmica. Além disso, podemos incluir termos viscosos, que, como mecanismo de dissipação de energia, podem contribuir para elucidar questões relativas à termalização da matéria escura.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. S.; TRUJILLO, I. Numerical simulations of dark matter haloes produce polytropic central cores when reaching thermodynamic equilibrium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), Apr 2021. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stab1103>>.
- ARIS, R. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. New York: Dover Publ., 1989.
- BINNEY, J. J.; TREMAINE, S. *Galactic dynamics*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis*. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2005.
- CHANDRASEKHAR, S. *An introduction to the study of stellar structure*. New York: Dover Publications, 1967.
- CLARKE, C. J.; CARSWELL, B. *Principles of astrophysical fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- DIAS, W. S.; LÉPINE, J. A velocidade de rotação dos braços espirais da via láctea. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 28, p. 155 – 160, 06 2006. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172006000200006nrm=iso>.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- FABRIS, J.; VELTEN, H. Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 34, p. 1 – 9, 12 2012. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172012000400002nrm=iso>.
- FORTUNA, A. d. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: Edusp, 2000.
- HARRISON, E. Cosmology without general relativity. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 35, n. 3, p. 437–446, dez. 1965. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(65\)90249-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(65)90249-6)>.
- HERNÁNDEZ-ARBOLEDA, A.; RODRIGUES, D. C. Rotação de galáxias e matéria escura. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 1, p. 6, fev. 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/33939>>.
- HORED T, G. P. *Polytropes: applications in astrophysics and related fields*. Dordrecht: Springer, 2011.

- ISAACSON, E.; KELLER, H. B. *Analysis of numerical methods*. New York: Dover, 1996.
- KEPLER, S.; SARAIVA, M. d. F. O. *Astronomia e astrofísica*. Sao Paulo: Livraria da Física, 2014.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon, 1987.
- LUDWIG, G. O. Galactic rotation curve and dark matter according to gravitomagnetism. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 2, fev. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-08967-3>>.
- MCCREA, W. H. Relativity theory and the creation of matter. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 206, n. 1087, p. 562–575, maio 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0089>>.
- MCCREA, W. H.; MILNE, E. A. NEWTONIAN UNIVERSES AND THE CURVATURE OF SPACE. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford University Press (OUP), os-5, n. 1, p. 73–80, 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/qmath/os-5.1.73>>.
- MILNE, E. A. A NEWTONIAN EXPANDING UNIVERSE. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford University Press (OUP), os-5, n. 1, p. 64–72, 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/qmath/os-5.1.64>>.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica*. Sao Paulo: Blucher, 1997.
- RYDER, L. *INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY*. Cambridge: CAMBRIDGE UNIV PRESS, 2020.
- SOFUE, Y. Grand rotation curve and dark-matter halo in the milky way galaxy. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, Oxford University Press (OUP), v. 64, n. 4, p. 75, Aug 2012. ISSN 2053-051X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/pasj/64.4.75>>.
- SOFUE, Y. Rotation and mass in the milky way and spiral galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, Oxford University Press (OUP), v. 69, n. 1, p. R1, Dec 2016. ISSN 2053-051X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/pasj/psw103>>.
- SOFUE, Y.; RUBIN, V. Rotation curves of spiral galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 39, n. 1, p. 137–174, Sep 2001. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137>>.
- STRIKWERDA, J. C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinamica classica de particulas e sistemas*. Sao Paulo: Cengage Learning, 2011.
- WANG, W. et al. The mass of our milky way. *Science China Physics, Mechanics Astronomy*, Springer Science and Business Media LLC, v. 63, n. 10, May 2020. ISSN 1869-1927. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11433-019-1541-6>>.