Transformações Geométricas: Bordando Conceitos e Divulgando Atividades

Sabrine Costa Oliveira

Sandra Aparecida Fraga da Silva

Edifes

2016

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A Geometria está presente em nosso dia a dia, basta olharmos a nossa volta. Logo, aprender seus conceitos e suas propriedades torna-se imprescindível para o desenvolvimento intelectual do aluno.

Contudo, muitos estudos afirmam que a geometria não vem sendo abordada de forma satisfatória, de modo a garantir um ensino significativo em relação aos conceitos geométricos na educação básica. Por esse motivo, alguns professores sentem-se inseguros para trabalhar a geometria em aulas de Matemática.

Este material foi produzido na perspectiva de contribuir para transformar a prática pedagógica do professor de Matemática no que se refere ao ensino de geometria, nos diversos níveis de ensino. Abrange especificamente o conteúdo de transformações geométricas com o uso de materiais manipulativos.

É importante esclarecer que este material não é um manual para o professor abordar as transformações geométricas em sala de aula. Mas, contém ideias, propostas e sugestões consideradas importantes para serem discutidas em sala de aula. Estamos convencidos de que o professor será capaz de enriquecer sua prática pedagógica por meio das ideias apresentadas aqui.

Este livro está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo trazemos a motivação deste estudo e uma síntese da pesquisa que o subsidiou. No capítulo 2, discutimos os conceitos relacionados às transformações geométricas. No capitulo 3, apresentamos as atividades, os materiais manipulativos e algumas sugestões de outros professores. No último capítulo apresentamos algumas considerações finais sobre as atividades e o ensino de transformações geométricas.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é fruto de uma pesquisa de mestrado[1] vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (Educimat/Ifes), cujo objetivo foi analisar indícios de (re)construção do pensamento geométrico relacionado às transformações geométricas por alguns professores participantes de um curso de formação sobre este conteúdo. A pesquisa de natureza qualitativa caracteriza-se como pesquisa do tipo intervenção pedagógica, visto que é o pesquisador quem identifica e propõe uma ação para resolver o problema, com o objetivo de transformar a prática docente.

Para isso, realizamos um curso de extensão sobre o tema em uma abordagem investigativa, com o uso de materiais manipuláveis.

O curso semipresencial foi realizado no Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo e envolveu dez professores atuantes no ensino fundamental durante os meses de setembro a dezembro de 2015.

O curso representou um espaço para ampliar conhecimentos sobre transformações geométricas com professores dos anos finais do ensino fundamental, em um grupo com práticas colaborativas por meio de uma metodologia que privilegiou o diálogo e reflexões sobre o conteúdo abordado.

As atividades aplicadas e discutidas no curso subsidiaram a construção deste livro, produto educacional da pesquisa. Este material está disponível gratuitamente na página do programa Educimat[2]. Desejamos que seja utilizado tanto por professores em suas aulas quanto em formações de professores.

1.1 Curso de Extensão: Investigações sobre Transformações Geométricas

Com base no referencial teórico discutido na pesquisa, um curso de formação de professores é um ambiente propício para o desenvolvimento profissional docente se envolver momentos de teoria e prática sobre o conteúdo (PONTE, 2014) e momentos de reflexão na e sobre a prática (NÓVOA, 2002).

Desse modo, desenvolvemos um curso de extensão semipresencial destinado a professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental, com a finalidade de discutir atividades investigativas sobre transformações geométricas utilizando materiais manipulativos.

O curso foi realizado no Ifes, nos meses de setembro a dezembro de 2015, com um total de oitenta horas, organizado em encontros presenciais quinzenais e atividades não presenciais. Os encontros presenciais, realizados sempre às quartas-feiras, das 18h às 22h, destinavam-se ao estudo e à resolução de atividades sobre o tema abordado, em uma abordagem que privilegiou a investigação matemática e o uso de materiais manipulativos. As atividades não presenciais, via ambiente virtual, visavam complementar as discussões dos encontros presenciais e criar um espaço dinâmico para a troca de experiências e reflexões. No decorrer do curso, cada participante deveria escolher uma prática desenvolvida na formação

[1] Link do Educimat.
[2] http://educimat.vi.ifes.edu.br/

e aplicá-la em sua sala de aula, bem como compartilhar as experiências vivenciadas em uma roda de conversa no último encontro presencial.

O objetivo geral do curso foi realizar uma formação continuada docente para discutir/explorar conceitos matemáticos sobre transformações geométricas baseados em materiais manipulativos e atividades investigativas. E também tinha o curso os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Promover momentos de discussão sobre a importância do ensino e aprendizagem das transformações geométricas no ensino fundamental II;
- ✓ Discutir no contexto de formação propostas de atividades investigativas de transformações geométricas utilizando materiais manipulativos a serem aplicadas em sala de aula;
- ✓ Analisar as atividades de transformações geométricas aplicadas no ensino fundamental II;
- ✓ Socializar resultados das atividades didáticas de transformações geométricas aplicadas em turmas de ensino fundamental II.

No quadro 1 a seguir apresentamos a distribuição da carga horária de acordo com as atividades planejadas para desenvolvimento do curso.

Quadro 1 - Distribuição da carga horária de acordo com as atividades planejadas.

ATIVIDADE	QUANTIDADE	CARGA HORÁRIA
Encontros presenciais	5 encontros	20 h
Aplicação de atividades em sala de aula (pesquisa, leitura e planejamento das atividades)	2 semanas	26 h
Atividades no ambiente virtual	5 semanas	30 h
Roda de Conversa sobre as vivências do curso	1 encontro de encerramento	04 h
Total		80h

Fonte: Elaborado pela autora, 2015.

Inicialmente participaram do curso22 professores atuantes no ensino fundamental da rede pública e privada. Porém, no decorrer do curso houve desistências e 10 professores concluíram o curso. Desse total, seis possuíam licenciatura em matemática e quatro possuíam complementação pedagógica em matemática[3].

Na metodologia desenvolvida no curso, tendo por base os pressupostos da investigação matemática, adotamos a postura de mediador e questionador do processo formativo, auxiliando os participantes nas dúvidas, dando sugestões, compartilhando aspectos para reflexão, entre outros. Os encontros presenciais começavam com atividades ou questionamentos que serviam de suporte para o debate do tema e posteriormente para a construção de conceitos relacionados ao conteúdo.

Conforme já exposto, o curso foi organizado em encontros presenciais e atividades não

[3] Em conformidade com a Resolução nº 2, de 26 de julho de 1997, publicado no DOU em 15/7/1997.

presenciais, realizadas via ambiente virtual moodle. Os debates ocorridos no moodle eram conduzidos e instigados com auxílio de uma tutora on-line, aluna do curso de Matemática vinculada a uma pesquisa de iniciação científica com a mesma orientadora deste projeto. O quadro 2 contém uma síntese da dinâmica do curso e os temas de discussão por encontro e no ambiente virtual.

Quadro 2 - Resumo das atividades abordadas no curso.

Encontro Presencial	Tema do Encontro Presencial	Tema do Ambiente Virtual
1º	Construção de um mapa conceitual sobre transformações geométricas.	Definições e conceitos sobre transformações geométricas.
2º	Explorando transformações geométricas com geoplano quadrado, circular e isométrico.	
3º	Construções utilizando molde vazado, malha quadriculada e gráficos de bordado em ponto cruz e análise de barras de bordados prontos.	A matemática em bordados e ornamentos.
4º	Construções de figuras homotéticas com o geoplano.	Materiais manipuláveis e transformações geométricas.
5º	Explorando transformações geométricas com mosaicos.	Geometria e arte.
6º	Roda de conversa sobre as propostas realizadas em sala de aula.	Questionário de Avaliação do Curso e Sistematização das Propostas aplicadas em sala de aula.

Fonte: Elaborado pela autora, 2016.

Em síntese, verificamos que os professores (re)construíram seus conhecimentos em momentos de reflexão por meio de atividades investigativas sobre transformações geométricas e em práticas docentes incentivadas pelo curso. Além disso, nos diálogos e relatos ocorreram mudanças na compreensão sobre o ensino de geometria, em especial alguns conceitos de isometrias e homotetias.

1.2 Investigação Matemática

A aprendizagem matemática durante muitos anos esteve ligada à repetição de modelos, memorização de fórmulas e ao formalismo das demonstrações, o que, sem aplicação, podem ser esquecidos pelos alunos. Na tentativa de modificar esse cenário, foram realizadas muitas discussões sobre o uso de novas metodologias e recursos didáticos nas aulas de matemática. Isso porque, no contexto de ensino e aprendizagem de matemática, as discussões sobre o uso de investigação matemática como metodologia de ensino iniciaram-se em Portugal, nos anos 80 e 90.

No ensino de matemática por meio da investigação, as aulas são iniciadas utilizando situações que não possuem respostas prontas e imediatas e que necessariamente não precisam ser muito sofisticadas, para não se constituir em um obstáculo para o aluno. As situações-problema se apresentam com aspectos problemáticos, que inicialmente podem parecer confusos, porém são motivadoras e desafiadoras, cabendo ao investigador verificar as estratégias para chegar à solução. Segundo Azevedo (2004), as atividades investigativas são um recurso importante para o desenvolvimento de habilidades e capacidades, como: raciocínio lógico, argumentação, ação e astúcia.

A metodologia "*Cenário de Investigação"* é definida por Skovsmose (2000), como um ambiente criado para dar suporte a uma aula investigativa. Em uma aula baseada nessa premissa, o professor modifica a própria postura e passa a agir como um mediador, ele deve questionar os alunos para que os mesmos se tornem sujeitos ativos do processo de aprendizagem. Os questionamentos podem ser iniciados com a pergunta "*O que acontece se...?*", ao responder de forma solícita, os alunos assumem o processo de exploração e explicação. Essa metodologia promove a comunicação entre o professor e os alunos, uma vez que o diálogo para o debate e compartilhamento das soluções deve ser valorizado.

Nesse sentido, a investigação matemática se torna uma metodologia adequada para a construção do conhecimento, pois, para resolver uma determinada situação-problema, os alunos precisam organizar as ideias iniciais para clarificar e identificar quais os conceitos matemáticos serão utilizados, e traçar e testar as estratégias para solucioná-la. A intenção em utilizar a investigação matemática em sala de aula é "levar os alunos a pensar, debater, justificar suas ideias e aplicar seus conhecimentos em situações novas, usando os conhecimentos teóricos e matemáticos" (AZEVEDO, 2004, p.20).

As atividades matemáticas investigativas por si só não influenciam a aprendizagem do aluno. Nesse momento, é de suma importância o papel do professor na mediação da aula, na valorização e no debate das diferentes estratégias a serem utilizadas pelos alunos. Nessa perspectiva, Oliveira, Segurado e Ponte (1998, p. 2), afirmam que:

> O professor terá como papel fundamental iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou estimulantes e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que tem habitualmente respostas corretas ou ideias válidas.

Além disso, o professor precisa adotar uma atitude investigativa na apresentação da proposta para influenciar positivamente a curiosidade dos alunos, pois como as situações-problema são questões abertas, é possível planejar como uma investigação vai começar, mas não sabemos como ela vai acabar (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996; PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009).

Nesse sentido, o papel do professor no ensino em que o aluno é um sujeito ativo no processo de construção de seu conhecimento é descrito por Carvalho et al. (1998, p. 31-32):

> É o professor que propõe problemas a serem resolvidos, que irão gerar ideias que, sendo discutidas, permitirão a ampliação dos conhecimentos prévios; promove oportunidades para a reflexão, indo além das atividades puramente práticas; estabelece métodos de trabalho colaborativo e um ambiente na sala de aula em que todas as ideias são respeitadas.

As tarefas investigativas devem ser fundamentadas na ação do aluno, em aulas que sejam baseadas nessa proposta, sendo importante dar aos alunos autonomia para refletir, discutir, explicar e defender suas estratégias de resolução. Além disso, é importante que a atividade investigativa planejada faça sentido para o aluno, de modo que ele se sinta motivado a investigar a proposta a ele apresentada.

E, ainda, o processo de seleção ou criação das situações investigativas exige do professor uma sensibilidade no planejamento da aula. As questões sobre a gestão de sala de aula, como o tempo para executar a atividade, o trabalho dos alunos será em grupo ou individualmente e os recursos utilizados, exigem que o professor tenha bem definidos os objetivos a serem alcançados. O desenvolvimento de atividades investigativas requer um conhecimento aprofundado do conteúdo abordado, pois o professor precisa acompanhar os questionamentos dos alunos e conduzir as discussões coletivas.

Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1998), geralmente a estrutura escolhida pelo professor para uma aula de investigação consiste em três fases:

> - Introdução da tarefa pelo professor (quer seja apenas um ponto de partida ou uma questão bem definida) e arranque da sua realização pelos alunos (interpretação da situação e definição do caminho a seguir);
> - realização da tarefa (durante a qual o professor interage com os alunos individualmente ou em pequeno grupo); e
> - apresentação de resultados pelos alunos e sua discussão (comparação das interpretações da tarefa, estratégias seguidas e resultados obtidos; é frequente surgirem novas questões para futura investigação) (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998, p. 4).

No que refere à formação de professores, Ponte (1998) afirma que o trabalho investigativo relacionado à prática profissional é necessário para o desenvolvimento profissional docente. Segundo ele, há uma forte ligação entre as ideias de formação e investigação que tem origem em uma dificuldade concreta da prática e, ao realizá-la, pretende-se a melhoria das condições de trabalho.

Por fim, o uso da investigação nas aulas de matemática promove um estímulo diferenciado, pois os alunos se tornam protagonistas do próprio conhecimento ao investigar, sendo, contudo, necessário validar, justificar e provar estratégias, de forma autônoma, utilizando os conceitos matemáticos para demonstrar a veracidade das soluções propostas. Nesses momentos, os alunos desenvolvem a capacidade de argumentação, uma vez que procuram fundamentos para defender a própria opinião perante os colegas e o professor.

2 ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Para trabalhar o ensino de transformações geométricas é necessário aprofundar nosso conhecimento teórico sobre este conteúdo. Oliveira (1997) atenta para a terminologia ‘transformação’ ser usada em outras disciplinas em um sentido diferente do que iremos adotar neste tópico. Segundo ele, “cada disciplina interessa-se por certo tipo de transformações, aquelas que preservam as propriedades ou relações consideradas mais importantes para a disciplina em questão” (OLIVEIRA, 1997, p.48).

Na Geometria, as transformações geométricas são destinadas ao estudo de conceitos relativos à simetria, fundamentado numa caracterização ou classificação intrínseca das geometrias, ou seja, independente dos sistemas de axiomas (OLIVEIRA, 1997). O estudo realizado nesta seção refere-se às transformações geométricas no plano euclidiano e está baseado em investigações desenvolvidas em Veloso (2000, 2012) ao utilizar o conceito de funções e em Bairral (2010), em uma visão mais intuitiva.

No estudo de transformações geométricas apresentado a seguir será designado por $\mathbb{R}^2$ o símbolo que remete à associação de todos os pares ordenados de números reais. Além, disso, convém apresentar a linguagem que será utilizada. Para indicar as transformações geométricas usaremos letras maiúsculas em negrito, como **R, S** e **T**; para designar a imagem de uma transformação geométrica utilizaremos letras maiúsculas com apóstrofo, como o ponto P’ é o transformado de P por meio de **T**. Ao nos referirmos à distância entre dois pontos quaisquer do plano, utilizaremos a abreviação *dist* em itálico.

Para Veloso (2012), a função transformações geométricas é uma correspondência biunívoca do conjunto de pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio, isto é, transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas no mesmo plano ou em planos diferentes. De modo que, de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual (congruente) ou semelhante à primeira. Segundo ele, em uma transformação geométrica **T** verifica-se as seguintes condições:

a) a cada ponto P de $\mathbb{R}^2$ **T** faz corresponder um, e somente um ponto P’ de $\mathbb{R}^2$.

b) Se P e Q são dois pontos distintos, então, suas imagens P’ e Q’ são também distintas.

c) Para qualquer ponto V de $\mathbb{R}^2$, sempre existe um ponto V’ em $\mathbb{R}^2$, tal que V’ é a imagem de V pela transformação geométrica **T**.

Veloso (2012) considera oito transformações geométricas: translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante, dilação ou homotetia, semelhança em espiral, alongamento e inversão. Dessas oito transformações geométricas, apenas as quatro primeiras pertencem à categoria de isometrias. As transformações geométricas aqui aprofundadas são as isometrias e a homotetia.

Transformações geométricas são isometrias quando para quaisquer dois pontos P e Q, temos que *dist*(P’, Q’) = *dist*(P, Q). Essas transformações modificam apenas a posição da figura original. A palavra isometria origina-se do grego e significa igualdade de medida (iso – designativo de igualdade comparando-se dois a dois; metria – medida). As isometrias preservam as seguintes propriedades geométricas:

- ✓ *Colinearidade de pontos;*
- ✓ *Amplitude de ângulos;*

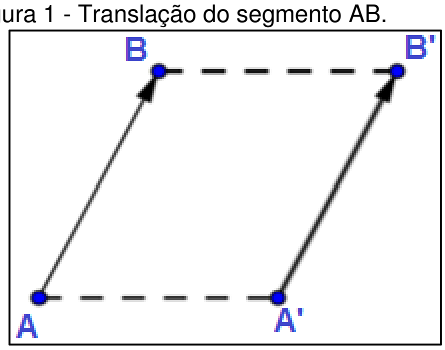
- ✓ *Paralelismos e perpendicularidade entre retas;*
- ✓ *Medidas de segmentos de retas;*

Conforme exposto, no plano euclidiano apenas quatro transformações geométricas conservam as distâncias entre pontos. São consideradas isometrias a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão deslizante. Apresentamos a seguir as noções resumidas das isometrias e de homotetia, objetos de estudos neste trabalho.

(I) TRANSLAÇÃO

Sejam A e B pontos distintos do plano. Considere o segmento orientado AB como um segmento de reta AB a que foi atribuído um sentido (de A para B). Os pontos A e B são a origem e a extremidade do segmento orientado AB, respectivamente. Um segmento orientado possui comprimento, direção e sentido. Dado AB um segmento orientado, a translação definida por AB é a transformação geométrica **T** que faz corresponder a cada ponto P do plano, o ponto Q é a extremidade do segmento orientado PQ se, e somente se, os segmentos orientados AB e PQ possuem o mesmo comprimento, a mesma direção (ou seja, são paralelos) e o mesmo sentido.

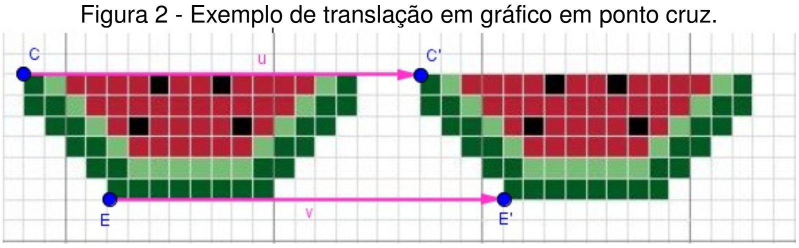
Figura 1 - Translação do segmento AB.



Bairral (2010, p.192) define a translação “como um movimento em que todos os pontos da figura percorrem segmentos paralelos de mesmo comprimento, ou seja, transladar uma figura é movê-la orientadamente”. Esses segmentos paralelos de mesmo comprimento, direção e sentido são denominados vetores, e são eles que indicam como a figura deve ser transladada.

Esse movimento está intuitivamente ligado à ideia de deslizar uma figura sobre o plano paralelamente à original. Como exemplo, a figura 2 mostra uma translação de uma melancia (gráfico de ponto cruz), obtida por meio de uma cópia da original e deslizada no papel para um ponto qualquer, porém mantendo o paralelismo com a posição original. É interessante destacar que às vezes a figura é transladada obedecendo o paralelismo entre seus lados, porém sem pensar no vetor de translação, isso porque se aborda-se o intuitivo e não aprofunda na definição matemática de translação. Observe que u // v de mesma medida e mesmo sentido.

Figura 2 - Exemplo de translação em gráfico em ponto cruz.



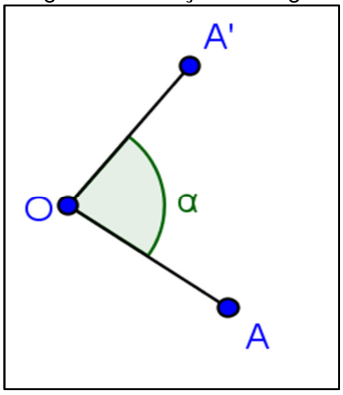
As pesquisas desenvolvidas por Jaime e Gutiérrez (1996) evidenciam que a translação é a isometria mais simples de ser compreendida por alunos de qualquer nível de ensino. Eles afirmam que os alunos de ensino fundamental compreendem com mais facilidade as características principais da translação, são capazes de reconhecer e desenhar imagens transladadas, enquanto que os alunos de ensino médio e superior reconhecem as características visuais da translação. As dificuldades relacionadas a esse conteúdo estão associadas ao conceito de vetor, que para alunos dos anos iniciais pode ser trocado por mesmo segmento de mesma medida, direção e sentido, sem falar na palavra vetor.

(II) ROTAÇÃO

Sejam A, O e A' três pontos distintos do plano. Considere o ângulo orientado α= AÔA', definido pelas semirretas AO e OA', a que se atribui, além disso, um sentido, AO para lado de origem e OA' para lado de extremidade, definido como um sentido positivo (o sentido anti-horário). Se α é um ângulo orientado, −α será obtido a partir de α pela inversão dos lados de origem e extremidade. Diz-se rotação **R** de centro O e ângulo α a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto A do plano, o ponto A' = **R** (A) nas condições abaixo:

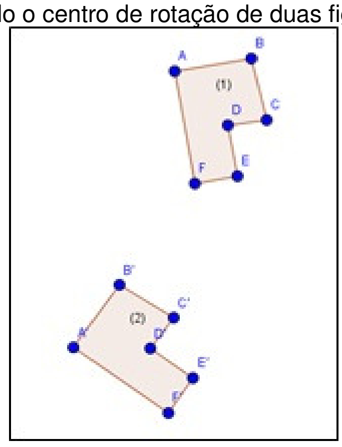
i. Se A = O, então **R** (A) = A, ou seja, o ponto A coincidente a origem é fixo para a rotação **R**.
ii. Se A ≠ O, o ângulo AÔA é igual a α e os segmentos OA e OA' são congruentes.

Figura 3 - Rotação do segmento OA.



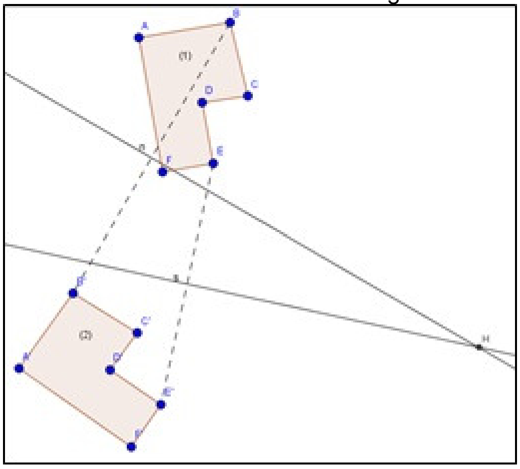
Para Bairral (2010), rotação é um giro de uma forma em torno de um ponto, chamado centro de rotação. A amplitude do giro se mantém constante e essa amplitude denomina-se ângulo de rotação. Uma discussão pouco comum sobre rotação é, com base em duas figuras já rotacionadas, como determinar o centro da rotação, conforme a figura 8.

Figura 4 - Descobrindo o centro de rotação de duas figuras já rotacionadas.



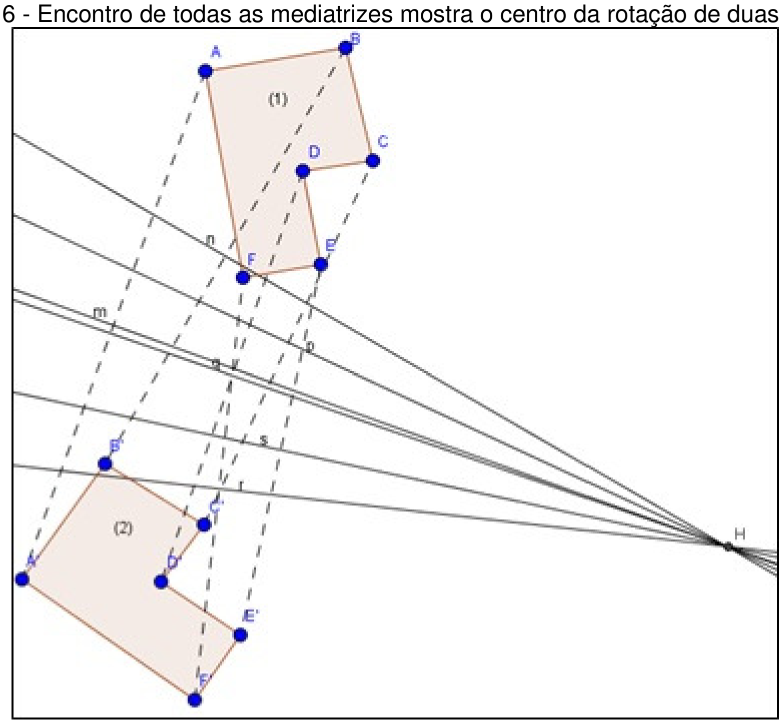
O hexágono (2) foi obtido por meio de uma rotação do hexágono (1). Para descobrir o centro da rotação, precisamos encontrar um ponto equidistante de cada ponto e de sua imagem rotacionada, isto para todos os pontos da figura. Basta então traçar a mediatriz dos segmentos que unem os pontos correspondentes, pois a mediatriz é um lugar geométrico do plano de todos equidistantes aos extremos dos segmentos. Por exemplo, a figura 9 mostra o encontro das mediatrizes dos segmentos BB' e EE', que será nosso ponto de rotação.

Figura 5 - Encontro das mediatrizes dos segmentos BB' e EE'.



Na sequência, se traçarmos todas as mediatrizes (AA', BB', CC', DD', EE', FF') observe que elas se encontram no ponto H, conforme mostrado na figura 8. Logo, H é o centro de rotação dos hexágonos.

Figura 6 - Encontro de todas as mediatrizes mostra o centro da rotação de duas figuras.



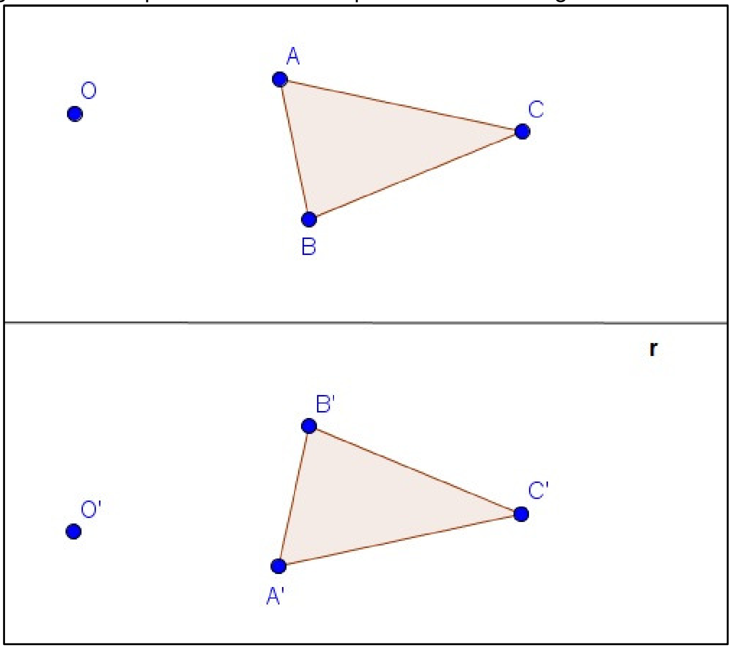
No exemplo dado, utilizamos o GeoGebra para realizar a construção de todas as mediatrizes dos segmentos dos pontos correspondentes, numa atividade impressa, podemos traçar apenas duas mediatrizes com régua e compasso que já encontramos o ponto de rotação. A construção de todas é importante apenas para que possamos visualizar que todas as mediatrizes se encontram num único ponto que será o centro de rotação.

Cabe destacar ainda que a utilização de representar uma figura e uma rotação da mesma, principalmente a um ângulo de 90º é comum entre atividades, porém, sem pensar em centro de rotação, sentido horário e anti-horário e diferentes ângulos de rotação. Mais uma vez notamos ser importante formalizar conceitos de rotação com todas suas propriedades.

(III) REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA

Dada uma reta r, chama-se reflexão de eixo r a transformação geométrica que se associa a cada ponto O do plano, não pertencente a r, o ponto O' = **E** (O), tal que a mediatriz do segmento OO' é a reta r. Usualmente, a reta r chama-se eixo de simetria e os pontos O e O' são chamados simétricos em relação a r.

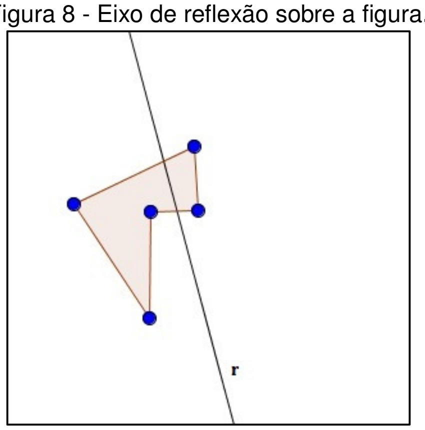
Figura 7 - Exemplos de reflexão do ponto O e do Triângulo ABC.



Veloso (2012) afirma que a reflexão em relação a uma reta r também é chamada de simetria axial e por esse motivo o ponto O' = **E** (O) costuma ser chamado de ponto simétrico de O em relação ao eixo r. Porém, segundo ele, embora seja admissível usar essa terminologia nos primeiros anos do ensino básico, os professores devem ser cuidadosos para não induzir os alunos ao erro. Veloso sugere que o ponto O' seja chamado de ponto transformado ou imagem de O por meio da reflexão de eixo r.

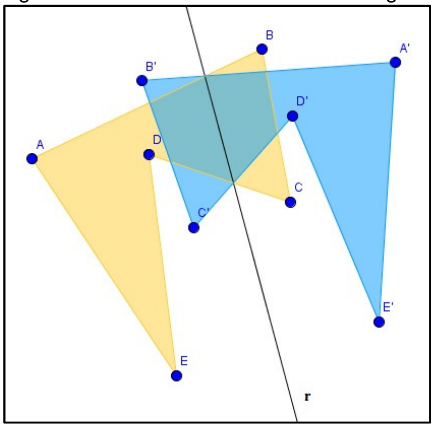
Uma abordagem pouco comum em relação à reflexão em relação a uma reta é quando o eixo de reflexão está sobre a figura, conforme observado na figura a seguir.

Figura 8 - Eixo de reflexão sobre a figura.



Apesar dessa discussão não ser frequente é importante abordá-la aqui. Mesmo sendo pouco explorado nos livros didáticos, é possível o eixo de reflexão estar sobre a figura, conforme observamos em VELOSO (2000), o único livro que faz referência a essa situação. A seguir, ilustramos essa construção.

Figura 9 - Reflexão com o eixo sobre a figura.



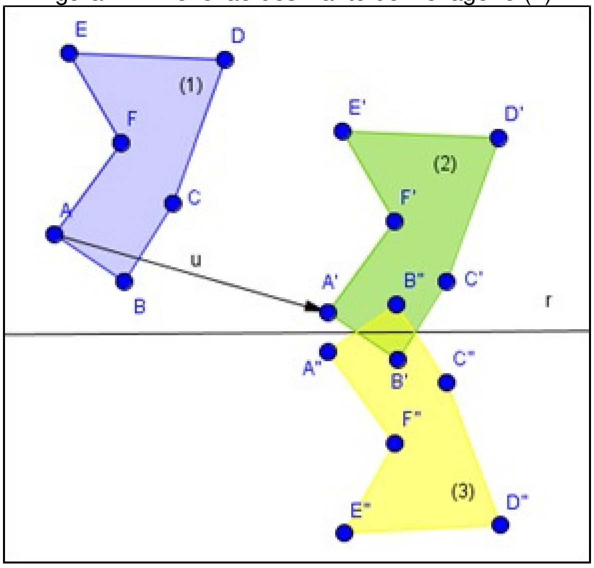
(IV) REFLEXÃO DESLIZANTE

Considere um segmento orientado AB e uma reta r paralela ao segmento AB. Diz-se reflexão deslizante a transformação geométrica **S** obtida por meio de uma reflexão de AB em relação a r, obtendo-se o segmento A'B', seguida por meio uma translação em A'B' obtendo A"B", ou vice-versa.

Figura 10 - Exemplo de reflexão deslizante do segmento AB.

Conforme dito anteriormente, a reflexão deslizante também pode ser obtida efetuando-se primeiro a translação e em seguida a reflexão em relação a uma reta. A seguir, a figura 15 ilustra essa outra maneira, em que o hexágono (2) representa a translação do hexágono (1) orientado pelo vetor u, e o hexágono (3) representa a reflexão do hexágono (2) em relação à reta r.

Figura 11 - Reflexão deslizante do Hexágono (1).



(V) HOMOTETIA

Considere um ponto O e um número real $k \neq 0$, diz-se dilação ou homotetia **D**, de centro O e razão k, a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto P’ = **D**(P) nas condições a seguir:

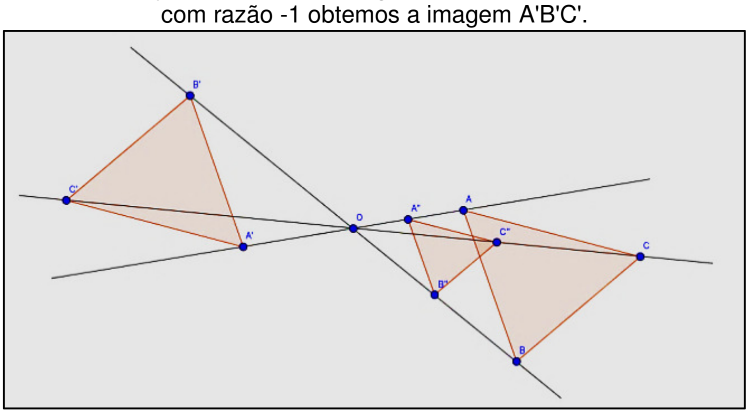
i. O ponto O é fixo para **D**, ou seja, **D**(O) = O.

ii. Se P ≠ O, então, P’ = **D**(P) está situado na reta OP e $\frac{\overline{OP\prime}}{\overline{OP}} = |k|$.

iii. A razão k pode ser positiva ou negativa, conforme as orientações dos segmentos OP e OP’.

Quando $|k|$ > 1, a dilação é uma ampliação, se $0 < k < 1$ trata-se de uma redução e se $|k|$ = 1, a dilação reduz-se à identidade. A dilação não é considerada uma isometria, pois não conserva as distâncias entre os pontos, salvo quando $|k|$ = 1. Vale destacar que quando $k < 0$ temos uma ampliação ou redução, porém com a imagem invertida.

Figura 12 - Exemplos de duas dilações do mesmo triângulo ABC. Com razão 0,5 obtemos a imagem A"B"C" e com razão -1 obtemos a imagem A'B'C'.



Assim como a translação destacamos que muitas vezes ampliações ou reduções de figuras em malhas quadriculadas obedecendo às proporções entre os lados são denominadas homotetias, mesmo sem ter um centro. Isso dificulta o entendimento do conceito correto das transformações geométricas.

Segundo Veloso (2012), o termo homotetia passou a ser chamado de dilação em seus estudos por causa da tradução adotada por ele, que antes era do francês (*homotétie)* e agora é do inglês (*dilation)*. No Brasil, ainda adotamos a terminologia homotetia nos livros didáticos.

3 ATIVIDADES, MATERIAIS E SUGESTÕES

Neste capítulo apresentamos as atividades que foram desenvolvidas no curso de extensão, em que as mesmas foram validadas. As atividades são diferenciadas e utilizam materiais manipulativos, como geoplano, atilhos de borracha, molde vazado, malha quadriculada, barras e gráficos em bordados em ponto cruz, entre outros.

Espera-se que cada professor consiga fazer adaptações para seu contexto escolar. As atividades são descritas com uma breve explicação e alguns comentários sobre como aplicar e sugestões de adaptação foram sugeridas pelos professores que participaram do curso.

Utilizaremos o símbolo para introduzir comentários sobre a metodologia de investigação matemática e a postura do professor em cada atividade.

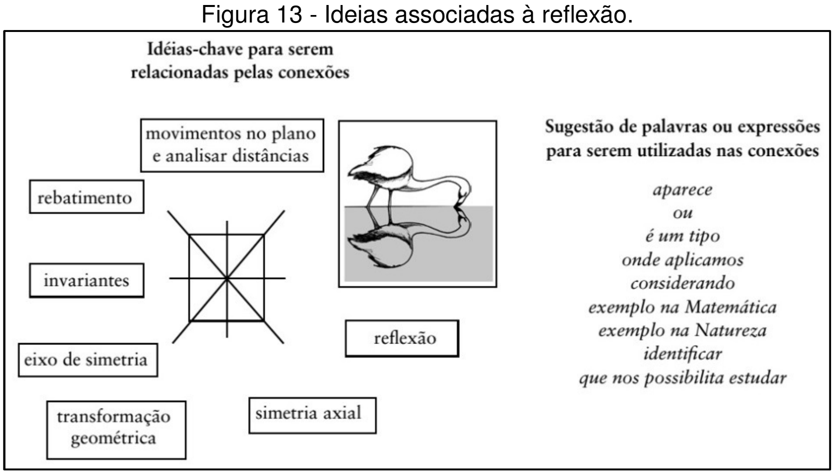
3.1 Identificando Conceitos Prévios

Objetivo: Identificar conhecimentos e ideias associadas às isometrias.

Materiais: cartolina; papel sulfite branco e colorido; canetas hidrocor, tesoura, régua.

Proponha que os alunos construam um mapa conceitual[4] relacionando-o com os conceitos prévios referentes às isometrias. Com alunos do ensino básico, forme grupos, forneça algumas ideias principais de cada isometria e solicite que eles realizem as conexões. A seguir, apresentamos uma sugestão proposta por Bairral (2010).

Figura 13 - Ideias associadas à reflexão.



Fonte: Bairral (2010, p.169).

Baseado nesta construção, problematize as conexões junto com grupo, realize um debate, questione-os, solicite exemplos. Não esgote todas as discussões em uma única aula. Sugerimos que inicie essa conversa em uma aula e em outra realize a sistematização de isometria. Os tipos de isometrias e suas definições serão abordados na próxima atividade.

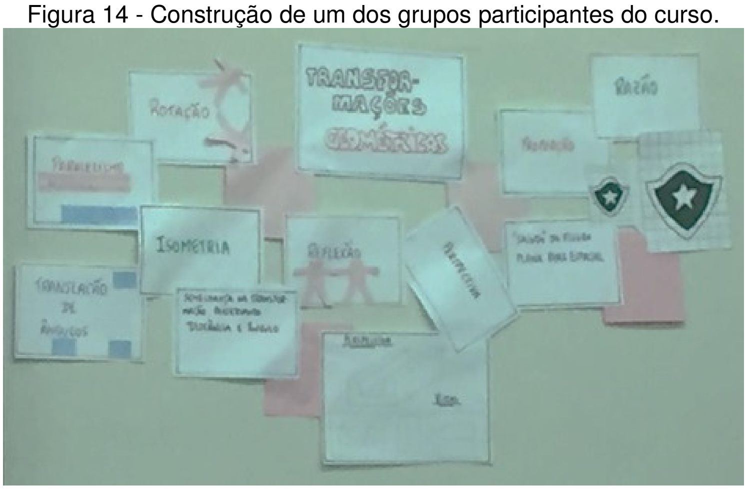
COMENTÁRIOS

[4] Um mapa conceitual é um recurso que permite organizar e representar, graficamente e por meio de um esquema, conceitos ou ideias relacionados a algum tema.

Esta atividade é importante por permitir ao professor identificar conceitos iniciais sobre o assunto a ser discutido. No momento de formalização aproveite as discussões já realizadas.

Os professores participantes do curso construíram mapas conceituais utilizando desenhos como exemplos de cada conteúdo. A seguir, uma imagem ilustra uma das construções.

Figura 14 - Construção de um dos grupos participantes do curso.



3. 2 Manipulações com o Geoplano

Objetivo: Construir os conceitos das isometrias.

Materiais: geoplano quadrado e isométrico; atilhos de borracha; folhas de papel sulfite; espelho.

Distribua o geoplano quadrado e os atilhos de borracha para os alunos e, caso eles não conheçam esse material, permita um momento de manipulação livre. Permita que eles construam polígonos, conjecturem entre eles. Em seguida, apresente o material e proponha as atividades[5].

Quadro 1 - Atividades iniciais sobre eixo de simetria e reflexão.

(i) Construa com os atilhos de borracha, figuras planas simétricas.
(ii) Construa uma imagem simétrica.
(iii) Construa uma figura e faça a reflexão da imagem.
(iv) Faça um eixo de simetria na diagonal no geoplano e construa figuras simétricas.

Problematize sobre a posição do eixo na reflexão. Geralmente, nas construções a posição do eixo está fora ou tangencia a imagem ou coincide com o eixo de simetria da figura. Construa um exemplo no seu material e observe as discussões.

Após as construções, solicite que respondam aos seguintes questionamentos:

Quadro 2 - Questionamentos sobre eixo de simetria e reflexão.

O que são figuras simétricas? Quais elementos as compõem?
Quais são as propriedades de figuras simétricas?
O que é reflexão?
A mudança da posição do eixo de simetria modificou seu modo de olhar?

Agora, proponha construções de rotações e translações.

[5] Nas atividades propostas, estimule que os alunos construam figuras diferentes dos polígonos conhecidos por eles. Incentive outras construções além de retângulo, quadrado, triângulos etc.

Quadro 3 - Atividades de Rotação e Translação.

(v) Construa algumas figuras e realize a rotação de cada uma.
(vi) Construa algumas figuras e faça a translação de cada uma.

Incentive os alunos com questionamentos do tipo: *Você rotacionou a figura em torno de que ponto? Quantos graus você rotacionou a figura? Você transladou a figura em que sentido? Em qual direção?* Envolva todo o grupo nesses questionamentos. Ao receber as respostas, envolva-os com perguntas iniciadas por: *E se eu... ?*

Em seguida, proponha os seguintes questionamentos:

Quadro 4 - Questionamentos sobre rotação e translação.

O que é rotação? Quais elementos são necessários para realizar a rotação? O que é translação? Quais elementos são necessários para realizar a translação? Por que a rotação e translação são consideradas isometrias?

Realize as mesmas construções utilizando o geoplano isométrico.

COMENTÁRIOS

Nestas atividades, podem surgir várias discussões interessantes. Na discussão sobre eixo de simetria, discuta, caso seja oportuno, o que são números simétricos. Estimule uma associação de conceitos.
Na reflexão, é natural que os alunos associem esse movimento com a reflexão do espelho. Este é um recurso útil no início das discussões, porém logo deve ser superado para não construir obstáculos epistemológicos desse conteúdo. Se possível, sugerimos ao professor utilizar a mirra, um espelho que reflete nos dois lados.

É natural que os alunos do ensino básico associem as palavras rotação e translação ao sentido utilizado na vida cotidiana (movimentos da Terra). Porém, o professor não deve combater essa associação, mas sim aproveitá-la.

No curso, os professores discutiram sobre a posição do eixo de reflexão sobre a figura. Alguns, mesmo após as sistematizações do conteúdo, não se mostraram convencidos sobre essa afirmação. Segundo eles, isso não é abordado em livros didáticos, porém precisamos observar a definição de cada conceito.

Como atividade de pesquisa, solicite aos alunos que pesquisem logomarcas que contenham algumas das isometrias. Posteriormente, em outra aula, sistematize as discussões e construa junto com eles as definições de cada assunto.

Apesar de pouco abordado, a reflexão deslizante também é uma isometria. Em alguns livros didáticos, ela é abordada como a composição de isometrias. Professor fique atento e discuta esses conceitos utilizando a definição de isometria.

3.3 Estudo das isometrias nos bordados em ponto cruz

Objetivo: Explorar isometrias em gráficos e barras em ponto cruz.

Materiais: Barras ou gráficos em pontos cruz.

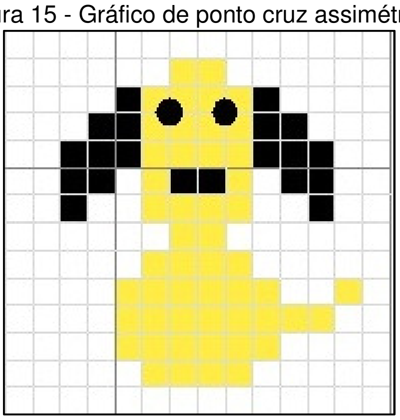
Organize os alunos em quatro grupos e distribua as barras ou gráficos em ponto cruz. Caso o professor não disponha desse material, solicite aos alunos que tragam algum pano de prato ou uma toalha bordada ou até mesmo uma revista de gráficos de ponto cruz, já que essa prática é comum em famílias brasileiras e é fácil encontrar algum tipo de bordado em casa. Peça que cada grupo analise o material e identifique as isometrias presentes.

Em seguida, peça que compartilhem as análises entre eles, para que os colegas verifiquem se há erros.

Em outra pesquisa[6], propusemos aos alunos de duas turmas de 8º ano que aplicassem os conceitos estudados nas barras de ponto cruz. Levamos as barras iniciadas e solicitamos que eles terminassem realizando uma das isometrias. Caso o professor sinta-se motivado, também pode fazer esta proposta aos alunos. Conforme exposto anteriormente, o bordado em ponto cruz é uma prática comum e é passada de geração em geração.

É importante o professor sinalizar que algumas imagens não possuem eixo de simetria, são chamadas de assimétricas. Questione em alguns casos o que deve ser retirado ou colocado na figura para torná-la simétrica. A seguir, um exemplo de gráfico de ponto cruz assimétrico.

Figura 15 - Gráfico de ponto cruz assimétrico.



COMENTÁRIOS

Esta atividade envolve os alunos por ser uma proposta diferenciada. Após problematizar sobre o assunto, questione os alunos se alguém já tinha notado a geometria dos bordados ou em outro artesanato.

Aplicamos esta proposta em várias oficinas[7] com professores e outros públicos. Os participantes ficaram fascinados por perceber e identificar algumas possibilidades do ponto cruz para o estudo de geometria. Ao propor atividades explorando o bordado em ponto cruz estamos apoiando novas possibilidades para o ensino da Matemática que favoreçam a criatividade e o prazer em aprender, em uma perspectiva de ensino contextualizado e com algo que faz parte da cultura brasileira.

[6] Maiores informações ver em: http://pse.ifes.edu.br/prppg/pesquisa/jornadas/Jornada_2012_2013/anais/anais.htm

[7] Maiores informações ver em: http://ocs.ifes.edu.br/index.php/semat/3/paper/viewFile/691/419; http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/viewFile/218/204; http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2015.010.

3.4 Construção de Pavimentações com Molde Vazado

Objetivo: Explorar as isometrias utilizando molde vazado.

Materiais: malha quadriculada; molde vazado; lápis de cor; tesoura.

Os moldes vazados utilizados nesta atividade foram construídos reciclando folhas de acetato utilizadas nas chapas de raio-X. O tratamento das chapas para que elas fiquem limpas é um processo químico. Sugere-se fazer uma parceria com a disciplina de ciências, em uma proposta interdisciplinar.

Distribua os moldes vazados em formatos quadrados de 3 cm x 3 cm, que devem ser 'deformados' pelos alunos, juntamente com a malha quadriculada e o lápis de cor. Na malha, eles devem usar o molde e pintar os espaços vagos a fim de pavimentar a região utilizando as isometrias estudadas. A seguir, apresentamos alguns exemplos de moldes vazados.

Figura 16 - Exemplos de moldes vazados.

Caso não seja possível construir os moldes com folhas de acetato, este material pode ser substituído por papel vergê.

Com criatividade, as pavimentações ficam muito bonitas. Incentive os alunos a utilizar cores vivas e realizar uma combinação de cores. A seguir, apresentamos a pavimentação que inspira a capa deste livro, realizada por uma professora participante do curso.

Figura 17 - Pavimentaçãoutilizando molde vazado.

Após esta atividade, organize uma roda de conversa para que cada aluno compartilhe suas construções identificando as isometrias contidas em sua pavimentação.

COMENTÁRIOS

Esta proposta deve ser problematizada pelo professor, para que os alunos visualizem o conteúdo implícito nas construções e o associem com o que estão estudando.

3.5 Homotetia, Ampliação e Redução de Figuras

Objetivo: Explorar ampliações, reduções e homotetia utilizando geoplano.

Materiais: geoplano quadrado e atilhos de borracha.

Distribua o geoplano quadrado e os atilhos de borracha para os alunos e proponha as atividades.

Quadro 5 - Atividade sobre ampliação de figuras.

(i) Construa uma figura no papel quadriculado e realize sua ampliação. (ii) Construa uma figura no geoplano e escolha um 'prego' para ser o centro e amplie na razão 2.

Nesta primeira atividade, o professor deve ficar atento, pois é um erro comum ampliar apenas alguns lados da figura e conservar a medida dos outros. Ao escolher um 'prego' para realizar a ampliação, normalmente os alunos escolhem um que faz parte do contorno da figura (geralmente um dos vértices da figura). O professor como mediador deve incentivar outras possibilidades. Questione: *E se escolher um 'prego' no centro ou no interior da figura, como fica a solução?*

Em seguida, apresente outra atividade de construção de quadrados semelhantes.

Quadro 6 - Atividade 2 sobre ampliação a partir da diagonal do quadrado.

Utilizando o geoplano, construa um quadrado (Q1) que possua 25 unidades de área. Escolha um vértice e trace sua diagonal. A partir do vértice escolhido, construa outro quadrado (Q2) dentro do Q1. O que você observa? A diagonal dos quadrados construídos está sobre a mesma reta suporte? Compare os lados dos quadrados e escreva a razão entre os lados homólogos dos quadrados. Agora, construa outro quadrado (Q3) em que um dos vértices seja comum a Q1 e Q2. Qual é a razão entre os lados homólogos dos quadrados? O que você observa com as diagonais dos três quadrados? Ou seja, seguindo esse procedimento, é possível construir outros quadrados que possuam a diagonal sobre a mesma reta suporte? Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Bairral (2010, p.35).

Incentive os alunos a escrever as razões para verificar se todas as ampliações e/ou reduções de quadrados são figuras semelhantes e homotéticas, por causa da razão de semelhança.

Os alunos costumam pensar que apenas os quadrados construídos sobre o mesmo vértice são semelhantes. Explore o material para mostrar a veracidade deste pensamento, caso essa discussão se sobressaia entre os alunos.

Propomos mais uma atividade, porém agora utilizando construções de retângulos.

Quadro 7 - Atividade de ampliação com retângulos no geoplano.

Construa no geoplano um retângulo (R1) com 5 unidades de comprimento por 3 de largura e trace uma de suas diagonais. A partir do vértice escolhido anteriormente para traçar a diagonal, construa

outro retângulo (R2) que possua 10 unidades de comprimento por 6 de largura. O que você observa em relação à diagonal de R1 e R2? Escreva a razão entre os lados de R1 e R2. Construa agora um retângulo (R3), com um vértice comum a R1 e R2, que possua 2 unidades de largura por 4 de comprimento. As diagonais passam por uma mesma reta suporte? Por quê? Escreva a razão entre os lados de R1 e R3 e de R2 e R3. O que você observa? Se você desenhar um retângulo com 10 unidades de largura por 6 de comprimento, as diagonais estarão sobre uma mesma reta suporte? Por quê? O que deve acontecer com as dimensões de cada retângulo, para que as diagonais estejam sobre alguma mesma reta? Dê outro exemplo.

Fonte: Adaptado de Bairral (2010, p.36).

Professor, explore esta atividade ao máximo. Solicite que os alunos escrevam as razões entre os lados homólogos e questione-os se essa é a mesma situação da atividade anterior. É necessário diferenciar, matematicamente falando, que nem todas as figuras que possuem a mesma forma são semelhantes.

Em seguida, formalize os conceitos e discuta as diferenças entre semelhança e homotetia.

COMENTÁRIOS

Nas atividades propostas nesta seção, o papel do professor é fundamental. Problematizar e questionar os alunos para que eles percebam a diferença de que nem toda figura que possui a mesma forma é semelhante. Caso o professor queira, explore a construção de outras figuras sem ser quadrado e retângulos. Pode ser uma oportunidade para mostrar a construção de figuras homotéticas usando régua e compasso.

3.6 Sugestões

Nesta seção apresentamos duas propostas que foram aplicadas pelos professores participantes do curso.

A primeira foi intitulada de Jogo de Simetria, semelhante à batalha naval, em que se trabalhou o conceito de eixo de simetria. Após dobrar ao meio uma folha de papel e desenhar 5 barcos em cada metade da dobra, os alunos devem "atingir" o barco no campo adversário fazendo um ponto no seu próprio campo e marcando o "ponto simétrico" em relação à dobra da folha. Ganha quem conseguir acertar todos os navios do campo adversário.

COMENTÁRIOS

Esta atividade é uma proposta simples, porém se explorada com o devido aprofundamento contribui para a construção do conceito de eixo de simetria. Aproveite e discuta as noções de conservação de distância, perpendicularidade e oposto ou simétrico em relação a uma reta.

Na segunda atividade, intitulada de Bate e Rebate, inicialmente os alunos devem desenhar uma figura simétrica. Em seguida, utilizando a técnica de ‘rebatimento de forma’ com o auxílio de um estilete, devem ser criadas figuras simétricas por meio de dobraduras. A seguir, algumas imagens ilustram o trabalho realizado.

Figura 18 - Rebatimento de forma estrela e coração.

Figura 19 - Atividade de rebatimento de taça.

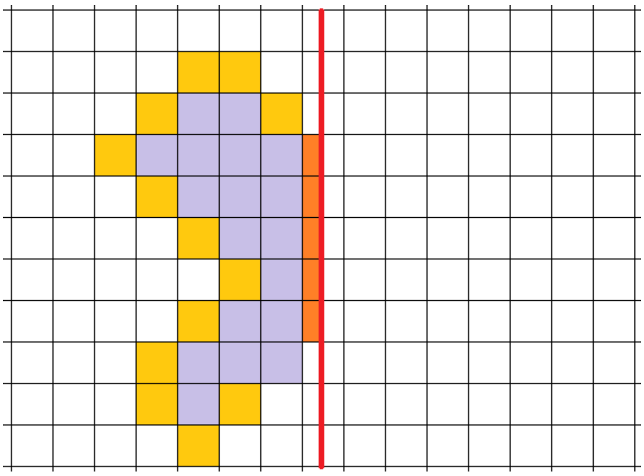
COMENTÁRIOS

Esta atividade esteticamente é muito bonita, porém utiliza estilete para realizar os cortes no papel. Caso o professor queira realizá-la, deve testá-la antes, a fim de garantir a segurança dos alunos. Pode também ser aproveitada para auxiliar a construção do conceito de eixo de simetria.

3.7 Atividades com Ponto Cruz

Nesta seção trazemos algumas atividades desenvolvidas com alunos de ensino fundamental em uma escola pública em Vitória/ES. Essas atividades foram utilizadas em outro estudo[8].

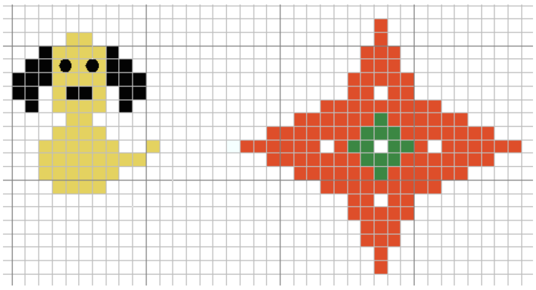
1) A mãe de Júlia está bordando um pano de prato em ponto cruz. Ela já bordou metade de uma borboleta. Se você colocar um espelho sobre a linha vermelha, poderá enxergá-la por completo. Termine o gráfico abaixo, observando a imagem refletida no espelho.

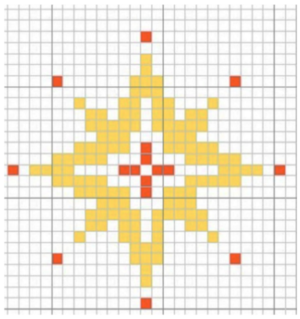


2) Nos bordados abaixo faça o que se pede.

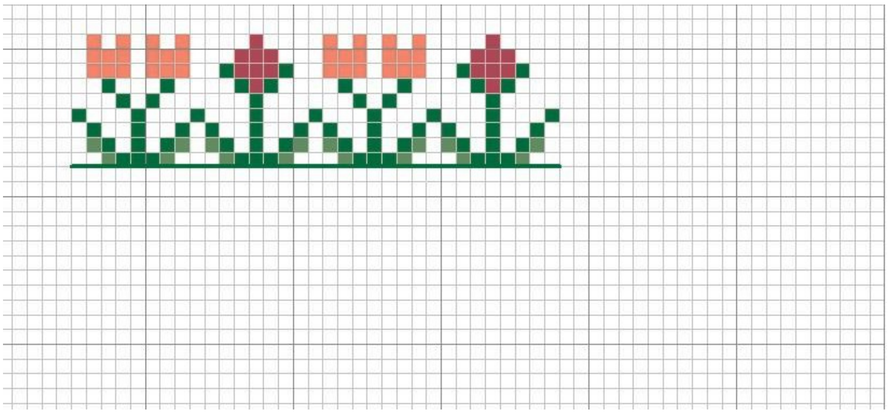
[8] Mais informações ver em: http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/viewFile/438/311

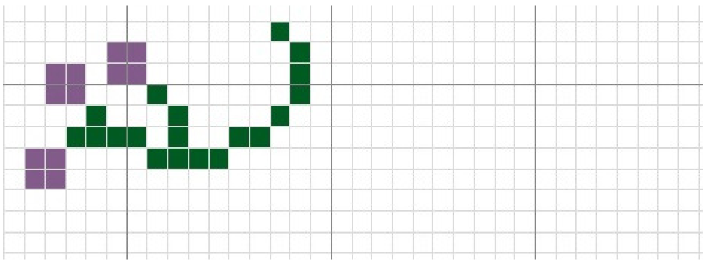
a) trace o eixo de simetria, se houver.

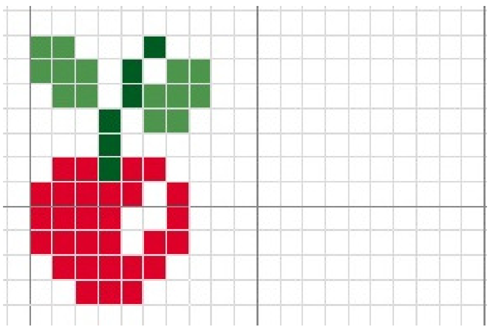


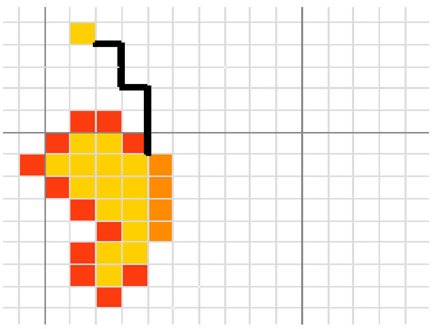


b) trace o eixo de simetria e efetue a reflexão da figura.

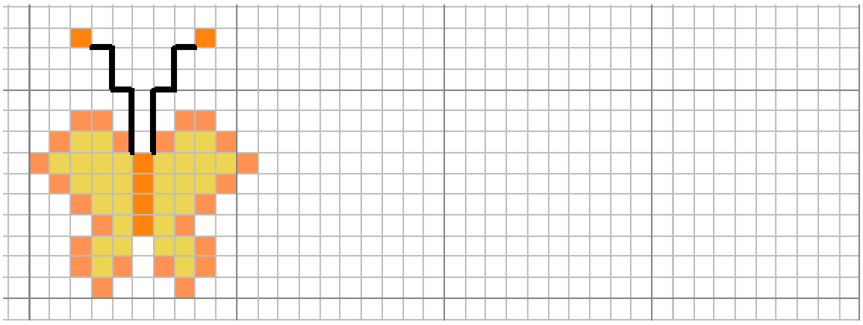




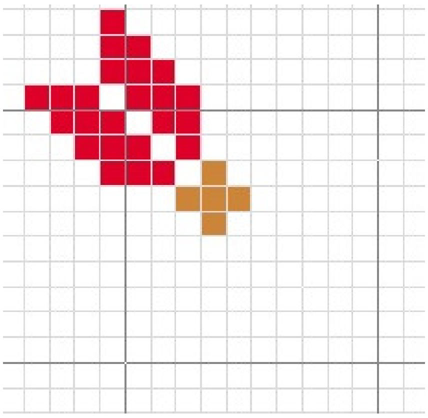


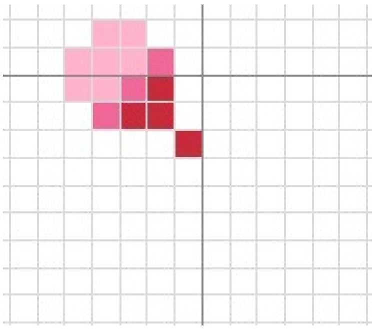


c) efetue a translação horizontal da figura.

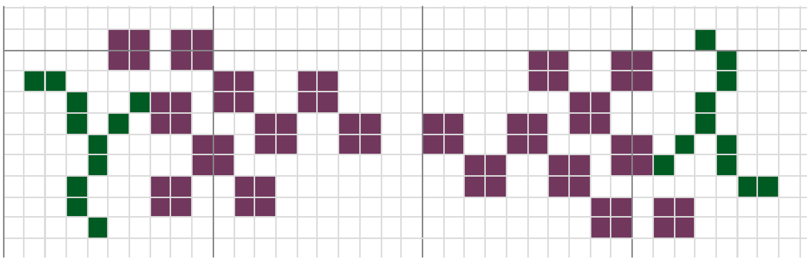


d) efetuando a rotação da pétala em 90º no sentido horário, complete a flor.





e) Identifique o centro, o ângulo de rotação e o sentido o qual a figura abaixo foi rotacionada.



4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme dito anteriormente, este material não é, de forma alguma, um manual para o professor abordar as transformações geométricas em sala de aula. O que apresentamos ao longo deste livro são atividades e ideias com o objetivo de inspirar novas discussões e atividades sobre transformações geométricas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, M. C. P. S. de. Ensino por investigação: problematizando as atividades em sala de aula. In: In: CARVALHO, A. M. P. de (Org.) **Ensino de ciências: unindo a pesquisa e a prática.** São Paulo: Thomson, 2006, p. 19-33.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Instrumentação do ensino da geometria**. V.1, 2ª reimp. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

CARVALHO, A. M. P.; VANNUCCHI, A. I.; BARROS, M. A.; GONÇALVES, M. E. R.; REY, R. C. **Ciências no Ensino Fundamental**: o conhecimento físico. São Paulo: Editora Scipione, 1998.

NÓVOA, Antônio. **Formação de professores e o trabalho pedagógico**. Lisboa: Educa, 2002.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI. **Actas.** Portalegre: SPCE-SEM, 1998 (p.107-125). Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto10.PDF> Acesso em: 30 ago. 2014.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. In: PROFMAT96. **Actas**. Lisboa: APM, 1996 Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF> Acesso em: 30 ago. 2014.

PONTE, João Pedro da. Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais. In: PONTE, João Pedro da. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

___________. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: **Educação Matemática: Temas de Investigação.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-239. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2985/1/92-Ponte%20(Concep%C3%A7%C3%B5es).pdf>. Acesso em: 8 dez. 2015.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia Margarida. **Investigações Matemática na Sala de Aula.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. In: **Bolema – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, ano 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

VELOSO, Eduardo. **Simetria e transformações geométricas.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM, 2012.

___________. **Geometria:** temas actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.